UNAM CCH ORIENTE

CUADERNO DE TRABAJO PARA LA ASIGNATURA CÁLCULO I

GRUPO EMCONA
Pantaleón Gómez Carranza
Aldo Nicolás Arenas García
Héctor González Pérez
Janett Karol Martínez Zapotitla
Ramón Sánchez Rivaas
José Luis Hernández Hernández
Rafael Martínez Patiño
Mauricio Enrique Rodríguez Pérez
José Adolfo Rendón Ortiz
Fernando Tovar Chávez
Edith Violeta de la Paz Casasola

COORDINACIÓN
Pantaleón Gómez Carranza
Aldo Nicolás Arenas García

CICLO 2022 - 2023

UNAM CCH ORIENTE

CUADERNO DE TRABAJO PARA LA ASIGNATURA CÁLCULO I

GRUPO EMCONA
Pantaleón Gómez Carranza
Aldo Nicolás Arenas García
Héctor González Pérez
Janett Karol Martínez Zapotitla
Ramón Sánchez Rivaas
José Luis Hernández Hernández
Rafael Martínez Patiño
Mauricio Enrique Rodríguez Pérez
José Adolfo Rendón Ortiz
Fernando Tovar Chávez
Edith Violeta de la Paz Casasola

COORDINACIÓN
Pantaleón Gómez Carranza
Aldo Nicolás Arenas García

CICLO 2022 - 2023

CONTENIDO

CONTENIDO

Introducción

Este cuaderno de trabajo no pretende formar alumnos especialistas en Cálculo Diferencial, pero sí apoyarlos en comprender las temáticas y aprendizajes que señala el programa de estudio de Cálculo Diferencial e Integral I del Colegio de ciencias y Humanidades y aplicarlas dentro de los problemas que involucran cambio. Las actividades que constituyen este material se elaboraron con el fin de promover: aprendizajes conceptuales, procedimentales y actitudinales, privilegiando el uso correcto de algoritmos, la modelación de situaciones problemáticas próximas a los intereses del alumno y el reforzamiento, o en su caso, de la restructuración de los conceptos. Las actividades propuestas proporcionan apoyo al desarrollo del trabajo teórico-práctico realizado en forma de "taller", proporcionando el número adecuado de ejercicios teóricos y prácticos estimulando el interés del alumno y permitiendo que enfoque su atención y energía en la resolución de problemas y en la reflexión sobre lo aprendido.

Los documentos: Orientación y Sentido del Área de Matemáticas y Programa de estudios de la asignatura de Cálculo Diferencial e Integral I, establecen las características que deben poseer los alumnos egresados del Colegio de Ciencias y Humanidades, señalan que el alumno debe caracterizarse por haberse apropiado sustantivamente de las diversas habilidades, actitudes y valores que le permitirán solventar con éxito los retos que afrontará en la continuación de sus estudios, o en su caso, en el ámbito laboral, como apoyo a los aspectos antes señalados, el grupo de trabajo (ENCOMA) decidió elaborar el presente cuaderno de trabajo considerando:

PROPÓSITOS GENERALES

1. Enriquecer el portal académico del Colegio, promoviendo así su consulta, su difusión y un posible intercambio académico.

2. Optimizar el perfil del egresado.

3. Contribuir y apoyar la comprensión e implementación del programa de estudio de la asignatura de Cálculo Diferencial e Integral I.

4. Apoyar la labor del docente que imparte la asignatura de Cálculo Diferencial e Integral I.

5. Proporcionar al estudiante que cursa la asignatura de Cálculo Diferencial e Integral I un material pertinente, conciso y de calidad que le facilite el aprendizaje de la materia y trascienda en su formación matemática.

PROPÓSITOS ACADÉMICOS

Los que señala el programa de estudios de la asignatura antes señalada y que reproducimos a continuación.

El alumno:

• Incrementará su capacidad en la resolución de problemas al adquirir sistemáticamente técnicas para representar e interpretar situaciones y fenómenos que involucren variación.

• Adquirirá una visión del concepto de límite, a través de la manipulación de las representaciones tabular, gráfica y algebraica de procesos infinitos, tanto discretos como continuos.

• Relacionará la derivada de una función con un proceso infinito que permita estudiar las características de la variación y de la rapidez de cambio.

• Identificará de manera sistemática y fundada las diversas interpretaciones de la derivada y las utilizará para obtener y analizar información sobre una función.

• Aplicará la derivada de una función para resolver problemas de razón de cambio y de optimización".

OTROS PROPÓSITOS

El alumno:

a. Aplicará los elementos del cálculo diferencial en la generación de estrategias que le permitan aproximarse e interactuar con su entorno para poder desenvolverse satisfactoriamente en él.

b. Utilizará diferentes formas de razonamiento y estrategias matemáticas para resolver problemas, modelar e interpretar los fenómenos que ocurren en su medio natural y social.

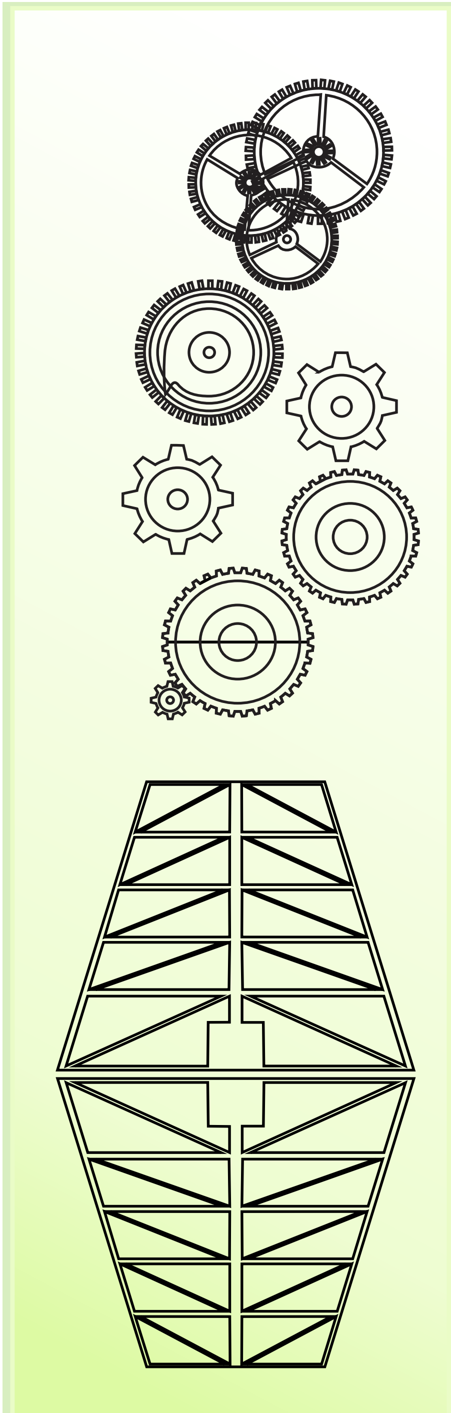
c. Incorporará a su lenguaje modos de sistematización, argumentación y representación habituales en el ámbito matemático para comunicar sus ideas y consolidar su pensamiento matemático.

Valorará las ideas y los argumentos de otros elementos que le permitirán aproximarse a la solución conjunta de los problemas.

b. Desarrollará el curso de Cálculo Diferencial e Integral I, a partir de los aprendizajes y temas contenidos del programa vigente con actividades prácticas y teóricas que le permitan la apropiación de conocimientos y habilidades.

c. Aplicará correctamente los algoritmos de la materia.

d. Construirá modelos matemáticos (funciones) y los analizará aplicando las herramientas del cálculo diferencial propiciando el desarrollo de su pensamiento matemático y la compresión de sus métodos.



ESTRUCTURA

El cuaderno de trabajo para la asignatura de Cálculo Diferencial e Integral I presenta la siguiente estructura:

1. Incluye una guía para su uso.

2. Contiene cuatro unidades, cada una de ellas se subdivide en cinco secciones.

a. Las dos primeras secciones presentan el desarrollo de los aprendizajes y temática que señala el programa de estudios.

i. Un título, los aprendizajes y la temática que en ella se desarrollan.

ii. El número adecuado de bloques, estructurados como función de la afinidad de los aprendizajes desarrollados y la temática; así como por el tamaño y complejidad de los contenidos temáticos que señala el programa correspondiente de la asignatura.

Cada bloque incluye:

iii. Una breve pero completa presentación de los elementos disciplinarios (definiciones, propiedades y algoritmos) básicos que señala el programa de estudios ya referidos.

iv. La sección de ejemplos y/o problemas resueltos y explicados a detalle como apoyo y guía al alumno o al profesor.

v. Una sección de problemas propuestos (el docente puede seleccionarlos y proponerlos al alumno), mismos que el alumno debe resolver.

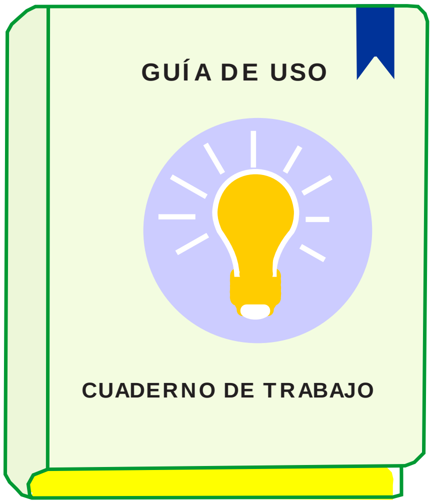
b. La tercera sección incluye el examen diagnóstico relativo a los conceptos, conocimientos y habilidades mínimas requeridas por el interesado para que realice un desempeño aceptable en la lectura y desarrollo de la obra.

En esta sección se encuentra la bibliografía de apoyo para aquél alumno que no haya respondido satisfactoriamente el examen diagnóstico.

c. La cuarta sección se refiere a la evaluación de la unidad incluyendo los niveles taxonómicos de conceptos, uso de algoritmos y problemas que requieren en su resolución algo más que el manejo de algoritmos. La sección incluye las respuestas de los problemas incluidos en la evaluación.

d. La quinta sección está compuesta por las respuestas de las actividades y problemarios propuestas.

e. La bibliografía recomendada para alumnos y profesores.



Hemos diseñado la presente obra con la finalidad de cubrir totalmente las cuatro unidades del curso de Cálculo I que se imparte en el CCH. Cada una de las unidades está configurada por bloques, cada bloque incluye aprendizajes y temática con contenidos disciplinarios afines y congruentemente del programa de estudios de la asignatura antes mencionada; también incluye: conceptos y propiedades básicas, ejercicios "tipo" resueltos, problemas propuestos con sus respectivas soluciones, etcétera.

AL ALUMNO:

Este cuaderno de trabajo ha sido escrito para que lo utilices como apoyo y complemento de tu curso de Cálculo I; para que repases, y/o conozcas los conceptos básicos y practiques a fondo los algoritmos de mayor representatividad del Cálculo Diferencial.

En las siguientes líneas te proponemos sugerencias que te apoyaran conseguir el máximo provecho de su contenido.

Inicialmente, en cada unidad, debes resolver el examen diagnóstico propuesto, si obtienes como mínimo el número de aciertos señalados estás preparado para avanzar en la resolución de la guía, si no es el caso debes revisar la bibliografía propuesta.

Reflexiona sobre los elementos teóricos contenidos, en el bloque de tu interés *antes* de intentar resolver los problemas y/o actividades que te proponemos. Ten en cuenta que leer sobre matemáticas dista de leer otro tipo de documentos, tales como una novela, un periódico o hasta libros de otras ramas del conocimiento. Regularmente las partes de textos de matemáticas, de interés para el lector, se leen y se releen varias veces para poder comprenderlas. Debes poner especial atención a los ejemplos resueltos y reconstruir su resolución; utiliza lápiz y papel a medida que los leas y, a continuación, intenta resolver los ejercicios propuesto en el bloque. Atendiendo estas sugerencias seguramente podrás hacer tu tarea optimizando tu tiempo e incrementando la comprensión de conceptos y habilidad en el uso de los algoritmos.

En el primer acercamiento a la unidad de interés, trata de comprender las definiciones y conceptos, sin embargo, no debes cometer el error de memorizar las reglas o ejercicios resueltos que observes. Las matemáticas no son simplemente memorización, son el *arte de modelar y posteriormente* *resolver problemas,* ¡no se trata de memorizar problemas resueltos! Para comprender significativamente una unidad o un tema, debes modelar y resolver problemas, muchos problemas; haz todos los que puedas, intenta escribir sus soluciones en forma lógica y detalladamente, paso a paso. Por lo general, para resolver un problema en matemáticas se realizan varios intentos, no te rindas ante un problema si no puedes resolverlo en los primeros intentos; los primeros intentos en la resolución de problemas se relacionan con su comprensión y para esto se tienen que leer varias veces y relacionarlo con lo aprendido en tu curso y de los ejemplos resueltos del cuaderno de trabajo. Lucha con cada problema hasta que lo resuelvas; una vez que hayas hecho esto varias veces comprenderás el papel de las matemáticas en los procesos mentales del aprendizaje. Las respuestas de todos: los ejercicios y todas las preguntas de los exámenes propuestos de todas las secciones y todas las unidades se encuentran en las secciones de fracción 5. Si tu respuesta a cierto ejercicio difiere de la que proponemos, no concluyas de inmediato que estás en error, tu respuesta y la propuesta pueden ser equivalentes y estar enlazadas por medio de ciertas consideraciones y ambas sean correctas.

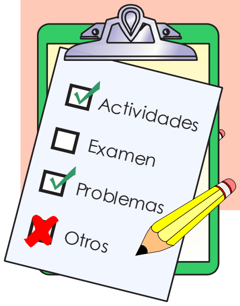
EL PROFESOR:

1. Los materiales contenidos en este cuaderno de trabajo son elementos auxiliares para el proceso de enseñanza – aprendizaje de la asignatura de Cálculo I, en la modalidad de clase – taller de acuerdo con los programas del Colegio de Ciencias y Humanidades, considerando que permite a los alumnos trabajar sobre los materiales que selecciona el profesor, ya sea en forma individual o en equipo. El profesor debe elegir previamente los materiales que utilizará en clase, de acuerdo con las condiciones académicas del grupo y el tiempo disponible para su realización.

2. Conviene que para ciertos ejercicios propuestos, una vez resueltos, se verifique su solución utilizando algún software (por ejemplo: GeoGebra o Symbolab Calculator).

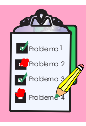
3. Los ejercicios propuestos están a consideración de cada profesor y puede proponerlos en clase o como trabajo extraclase.

4. En la parte final del cuaderno de trabajo se encuentran las referencias en que el alumno puede consultar la temática en que desee profundizar; los docentes pueden recurrir a ella para incrementar, la variedad, el número y el grado de dificultad de los ejercicios y contenidos propuestos en el cuaderno de trabajo.



TÉCNICAS DE EVALUACIÓN

En esta sección presentamos la propuesta de los instrumentos de evaluación del trabajo desarrollado por el alumno en el Cuaderno de Trabajo basado en un enfoque centrado en el estudiante y en la resolución de problemas, todo en concordancia con los propósitos del programa de estudio actualizado de la Escuela Nacional Colegio de Ciencias y Humanidades de la UNAM.



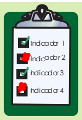
PROBLEMARIO

EVALUACIÓN DE EJERCICIOS PROPUESTOS (por ejercicio)

INDICADOR	VALOR	PUNTOS
PLANTEAMIENTO	0.1	
DESARROLLO	0.5	
RESULTADO E INTERPRETACIÓN	0.2	
PRESENTACIÓN	0.2	
TOTAL	1	

EVALUACIÓN DE PROBLEMAS DE APLICACIÓN (por problema)

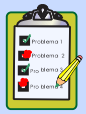
INDICADOR	VALOR	PUNTOS
EN BLANCO	0%	0
PLANTEAMIENTO (Uso de variable, condición de ligadura, figuras)	30%	0.30
DESARROLLO/ PROCEDIMIENTO (obtención del modelo y/o resultado simplificado)	30%	0.30
CONCLUSIONES	25%	0.25
PRESENTACIÓN (redacción, limpieza, a color)	15%	0.15
TOTAL		1



SECUENCIAS DIDÁCTICAS (RÚBRICA)

EVALUACIÓN DE LAS SECUENCIAS DIDÁCTICAS (por secuencia didáctica)

SECUENCIAS DIDÁCTICAS	CRITERIOS DE EVALUACIÓN				
	MUY BIEN (10)	BIEN (8)	SUFICIENTE (6)	DEFICIENTE (5 o menos)	VALOR
PRESENTACIÓN					**20%**
Portada, ortografía, redacción, legibilidad contenido poli cromático, entrega oportuna.	Cumple todos los indicadores.	Falta alguno de los indicadores	Faltan dos indicadores	Faltan tres indicadores	
CONTENIDO					**70%**
Identificación de variables, identificación de condiciones de ligadura, uso de figuras adecuadas.	Cumple todos los indicadores.	No cumple uno de los indicadores.	No cumple dos de los indicadores	No cumple tres o más de los indicadores	
Obtención del modelo. Revisión de resultados y formalización adecuada.	Cumple todos los indicadores.	No cumple uno de los indicadores.	No cumple dos de los indicadores	No cumple tres o más de los indicadores	
TRABAJO					**10 %**
Participación acertada. Trabajo en equipo.	Cumple todos los indicadores.		No cumple uno de los indicadores.	No cumple tres o más de los indicadores	
TOTAL					**100%**



EXÁMENES

EVALUACIÓN DE DESARROLLO EN EXÁMENES (por reactivo)

INDICADOR	VALOR (%)	PUNTOS
No realiza el proceso, no contesta el reactivo.	0%	0
Plantea y realiza parte del proceso o contesta sin proceso que justifique la solución.	30%	0.3
Proceso adecuado y resultado Incorrecto.	50%	0.5
Proceso adecuado y resultado correcto.	90%	0.9
Presentación	10%	0.1
TOTAL	100%	1

PROBLEMAS DE APLICACIÓN (EN EXÁMENES por reactivo)

INDICADOR	VALOR (%)	PUNTOS
En blanco	0%	0
Planteamiento	30%	0.30
Desarrollo / procedimiento	30%	0.30
Conclusión	25%	0.25
Presentación	15%	0.15
TOTAL	100%	1

1

PROCESOS INFINITOS Y LA NOCIÓN DE LÍMITE

PROPÓSITOS

Al finalizar la unidad:
el alumno descubrirá intuitivamente el concepto de límite, a través de diversos problemas que involucren procesos infinitos mediante los diferentes registros: numérico, gráfico o simbólico

CONTENIDO

UNIDAD 1

PRESENTACIÓN

La Unidad I “PROCESOS INFINITOS Y LA NOCIÓN DE LÍMITE” desarrolla el propósito:

“Al finalizar la unidad el alumno descubrirá intuitivamente el concepto de límite a través de diversos problemas que involucren procesos infinitos mediante los diferentes registros: numérico, gráfico o simbólico”.

Los aprendizajes y la temática propuestos se encuentran clasificados en dos secciones de títulos:

1.1 Procesos Infinitos.

1.2. Noción de límite.

Ambas secciones contienen un número específico de bloques (3), cada bloque presenta:

1. Título

2. La estrategia de aprendizaje utilizada en su desarrollo.

3. Breve introducción sobre la importancia del contenido.

4. Los elementos teóricos básicos (mínimos y necesarios) de los contenidos temáticos y aprendizajes que contiene el programa de estudios de Cálculo Diferencial e Integral I.

5. Definiciones básicas (y formales) sobre los conceptos relevantes.

6. Secciones (6) de ejemplos cuidadosamente seleccionados y resueltos a detalle.

7. Secuencias didácticas (2) que incluyen:

i. Los tiempos didácticos pertinentes (inicio desarrollo y serie) que guían al lector en la construcción y/o formalización de cierta propiedad (puede ser un aspecto teórico o metodológico).

8. Propiedades (teoremas inherentes a la temática de la disciplina).

9. Secciones (6) de ejercicios propuestos.

También contiene:

La sección de evaluación diagnóstica con:

i. El examen de evaluación diagnóstica (que si docente lo considera adecuado el estudiante debe responder), con escala de acreditación.

ii. Las respuestas a las preguntas del examen diagnóstico y la bibliografía que sugerimos como apoyo a aquellos alumnos que no lograron aprobar el examen.

La sección de evaluación de la unidad, con:

i. La evaluación de la unidad (en la taxonomía de: conceptos, desarrollos operativos y problemas que requieren un mayor grado de pensamiento).

ii. Las respuestas a la evaluación propuesta.

La sección de soluciones, con:

i. Las soluciones de las secuencias didácticas propuestas,

ii. Las soluciones de las secciones de ejercicios propuestos.

FIN DE SECCIÓN

SECCIÓN 1.1 PROCESOS INFINITOS

APRENDIZAJES

1. Reconoce características de los procesos infinitos utilizando alguno de estos procedimientos: numérico, gráfico o algebraico.

2. Identifica el patrón de comportamiento en un proceso infinito.

3. Reconoce un proceso infinito de uno que no lo es.

4. Resuelve problemas en diversos contextos que involucren en su solución procesos infinitos.

5. Utiliza las representaciones gráfica, tabular o algebraica de un proceso infinito para analizar su comportamiento en cuanta a: cómo cambia la variable, qué comportamiento sigue, cuáles son los valores siguientes, y a la larga como son estos.

6. Distingue aquellos procesos infinitos que tienen un resultado límite de los que no lo tienen.

TEMÁTICA

1. Situaciones numéricas, geométricas o algebraicas, que dan lugar a procesos infinitos.

2. Comportamiento de un proceso infinito: representación numérica, algebraica o gráfica.

3. Representación simbólica de procesos infinitos por medio de una función.

BLOQUE 1

PROCESOS INFINITOS GEOMÉTRICOS

Presentando situaciones geométricas con patrón de comportamiento específico se induce al alumno para que obtenga su modelo de comportamiento y posteriormente lo clasifique como finito o infinito.

En esta sección suponemos que un ***proceso finito*** está constituido por un *conjunto ordenado* de etapas sucesivas (o iteraciones), es decir, existe una primera etapa, una segunda etapa, una tercera etapa y una última etapa, es decir, cada etapa tiene asociado un número natural del conjunto:

$$\{\ 1,\ 2,\ 3,\ 4, \ldots, n_0\ \}$$

(en ese orden) y viceversa, cada número del conjunto

$$\{\ 1,\ 2,\ 3,\ 4, \ldots, n_0\ \}$$

está asociado a una etapa del proceso.
Por otra parte, si asignemos a cada etapa un número del conjunto

$$IN = \{\ 1,\ 2,\ 3,\ 4, \ldots\ \}$$

(en ese orden) y viceversa, a cada número del conjunto

$$IN = \{\ 1,\ 2,\ 3,\ 4, \ldots\ \},$$

una etapa, el "***proceso es infinito***" (*estrictamente, proceso "infinito numerable"*).

DEFINICIÓN 1.1

PROCESO

a. Un proceso es un conjunto de etapas sucesivas que conducen a un resultado.

b. Si las etapas del proceso se relacionan biunívocamente con los primeros n_0 números naturales, se denomina finito (utilizaremos la expresión $n \to n_0$ para indicar que la última etapa de un proceso finito es n_0).

d. Si cada etapa de un proceso está relacionado con un número del conjunto de los números naturales y viceversa, cada número natural se relaciona con una etapa del proceso, diremos que es infinito (con la expresión $n \to +\infty$ indicaremos que el número de etapas de un proceso es "indefinidamente grande")

SECCIÓN 1.1
BLOQUE 1
EJEMPLOS 1

1. Son ejemplos de procesos:
a. SUMA DE LOS PRIMEROS NÚMEROS NATURALES
El proceso consiste en sumar los primeros n números naturales.
Etapa 1. Se comienza con el número

$$1.$$

Etapa 2. Se realiza la suma

$$1+2.$$

Etapa 3. Se efectúa la suma

$$1+2+3.$$

La etapa n. Es el cálculo de la suma

$$1+2+3+4+5+\cdots+n.$$

b. SUMA DE LOS CUADRADOS DE LOS PRIMEROS n NÚMEROS NATURALES
El proceso que consiste en sumar los cuadrados de los primeros n números naturales.
Etapa 1. Se comienza con el número 1.
Etapa 2. Se realiza la suma

$$1^2+2^2.$$

Etapa 3. Se realiza la suma

$$1^2+2^2+3^2.$$

La etapa n es la realización de la suma

$$1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+\cdots+n^2.$$

c. SUMA DE LOS MEDIOS DE LOS MEDIOS
Supón que vas a realizar cierta tarea en etapas.
Etapa 1. Realizas la mitad de la tarea el primer día,

$$\frac{1}{2}.$$

Etapa 2. Efectúas la mitad de la tarea realizada en el primer día en la etapa,

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}.$$

Etapa 3. Realizas la mitad de la tarea hecha en el segundo día en la etapa 2. Tarea realizada

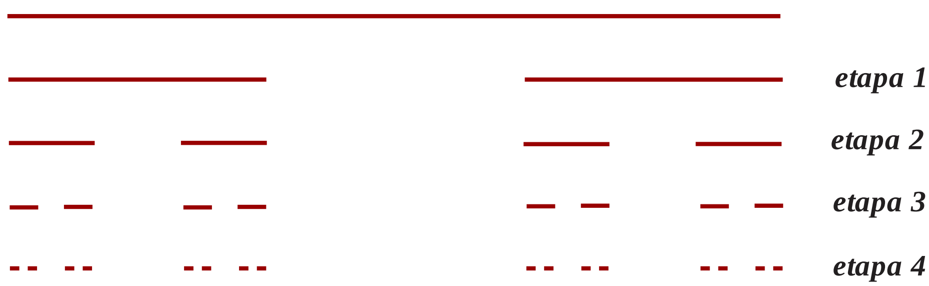
$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}.$$

Repites n veces la etapa. Tarea realizada

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^n}.$$

d. ELIMINACIÓN DEL TERCIO MEDIO Y PUNTOS EXTREMOS

Sea un segmento rectilíneo de longitud 1 efectúa el proceso:



Etapa 1. Cuenta el número de puntos extremos.

Etapa 2. Divide el segmento rectilíneo en tres partes congruentes y elimina la parte central, cuenta el número de puntos extremos.

$$4=2^2.$$

Etapa 3. Divide los segmentos rectilíneos sobrantes en la etapa anterior en tres partes congruentes, elimina las partes centrales, y cuentas el número de puntos extremos.

$$16=2^4.$$

Etapa 4. Secciona los segmentos rectilíneos sobrantes en la etapa anterior en tres partes congruentes, elimina las partes centrales, y cuentas el número de puntos extremos.

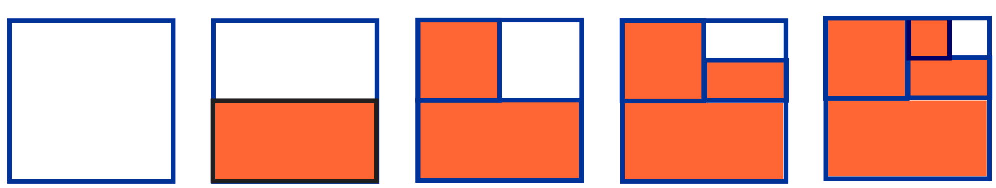
$$8=2^3.$$

Se repite n veces la etapa. El número de puntos extremos es

$$2^n.$$

e. ÁREA CUBIERTA

El proceso que consiste en cubrir una región cuadrada de lado de longitud uno, de la siguiente forma:



Etapa 1. Utiliza una región rectangular para cubrir la mitad de la superficie cuadrado. Superficie cubierta

$$\frac{1}{2}.$$

Etapa 2. Utiliza otra región rectangular para cubrir la mitad de la superficie del rectángulo que faltó cubrirse en la etapa 1. Superficie cubierta

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}.$$

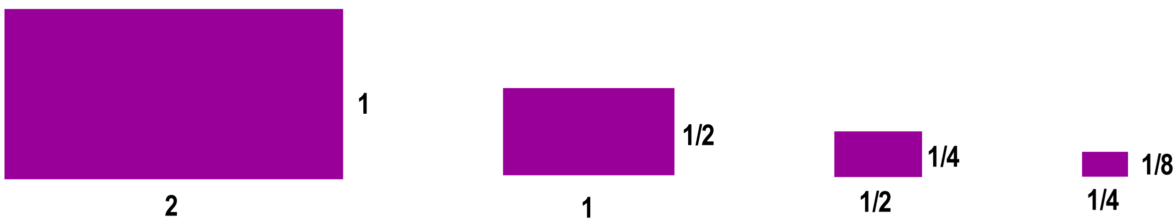
Etapa 3. Cubrir la mitad de la superficie del rectángulo que faltó cubrirse en la etapa 2. Superficie cubierta

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}.$$

Se repite n veces la etapa. La superficie cubierta es

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^n}.$$

f. COLAPSO DE UN RECTÁNGULO



Se tiene un rectángulo de dimensiones: largo 2, ancho 1. Su área es $A_0=(2)(1)=2$ unidades cuadradas.

Etapa 1.
El rectángulo se "reduce" en otro cuyas dimensiones son un medio de dimensiones del rectángulo original, su área es

$$A_1=(1)\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2^1}.$$

Etapa 2.
El rectángulo de la etapa anterior se "convierte" en otro rectángulo cuyas dimensiones son la mitad de las del rectángulo anterior. Ahora su área es

$$A_2=\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{8}=\frac{1}{2^3}.$$

Etapa 3.
El rectángulo de la etapa 2 se "reduce" en un rectángulo cuyas dimensiones son la mitad de las dimensiones del rectángulo de la etapa anterior. Su área es

$$A_3=\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{8}\right)=\frac{1}{32}=\frac{1}{2^5}.$$

Al repetir n veces la etapa, entonces el área del rectángulo es

$$A_n=\frac{1}{2^{2n-1}}.$$

g. PROCESO DE SUMA GEOMÉTRICO
La suma (con sumandos "ordenados" y positivos) con la propiedad: si dividimos cualquier par de sumandos consecutivos, el posterior entre el anterior obtenemos la misma razón $\frac{a_{n+1}}{a_n} = r$, se llama geométrica; estas sumas son de gran utilidad en la caracterización de diversos procesos tanto finitos como infinitos.

Supongamos que $r > 0$, $r \neq 1$, $a \neq 0$ es un número real.

Etapa 1. Inicia con el número

$$ar^0.$$

Etapa 2. Agrega al número de la etapa anterior ar^1

$$ar^0 + ar^1.$$

Etapa 3. Agrega al resultado de la etapa anterior ar^2

$$ar^0 + ar^1 + ar^2.$$

Se repite n veces la etapa.

$$ar^0 + ar^1 + ar^2 + a^3 + \cdots + ar^{n-1}.$$

g. POTENCIA n DEL NÚMERO r.
Etapa 1. Calcula la potencia 1 del número r, se obtiene

$$r^1.$$

Etapa 2. Se calcula la potencia 2 del número r, se obtiene

$$r^2.$$

Etapa 3. Se calcula la potencia 3 del número r, se obtiene

$$r^3.$$

En la etapa n se calcula la potencia n del número r, se obtiene

$$r^n.$$

DEFINICIÓN 1.1

SUMA Y SERIE GEOMÉTRICA
Si $r > 0$, $r \neq 1$ y $a \neq 0$, entonces:

a. La suma $a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots + ar^{n-1}$ se denomina geométrica.

b. La suma "infinita" $a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots$ se denomina serie geométrica.

SECCIÓN 1.1

SECUENCIA DIDÁCTICA 1

POTENCIA DEL NÚMERO r (positivo y distinto de 1)

INICIO - DESARROLLO

1. Cada etapa se evalúa en $f(n)=r^n$ (para los valores de r indicados), n representa un número natural. Establecerá una conjetura respecto al comportamiento de $f(n)=r^n$ para asignaciones enteras (cada vez más grandes) a la potencia n.

En la siguiente tabla $0 \le r < 1$ (r es un número comprendido entre cero y uno), complétala.

n	$f(n)=(0.1)^n$	$f(n)=(0.2)^n$	$f(n)=(0.5)^n$	$f(n)=(0.9)^n$
1				
3				
5				
10				
$\vdots$				

2. En todos los casos, ¿qué ocurre conforme el número de etapa n se incrementa?

Para representar que n se incrementa indefinidamente utilizaremos los $n \to +\infty$. También, cuando n se incrementa indefinidamente y $f(n)=r^n$ se aproxima al número L lo representaremos simbólicamente por $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)=L$.

3. Rescribe cada uno de los resultados de ***tabla 1*** utilizando los símbolos $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)=L$.

4. En este proceso, cada etapa consiste en evaluar $f(n)=r^n$ (para los valores de r indicados), n representa un número natural. Debes establecer una conjetura respecto al comportamiento de $f(n)=r^n$ para asignaciones cada vez más grandes a n.

En la siguiente tabla $r>1$ (r representa un número mayor que uno), complétala.

n	$f(n)=(2)^n$	$f(n)=(4)^n$	$f(n)=(10)^n$	$f(n)=(20)^n$
1				
3				
5				
10				
$\vdots$				

5. En todos los casos, ¿qué ocurre conforme el número de etapa n se incrementa?

6. Si n se incrementa se representa simbólicamente por $n \to +\infty$.
El hecho de que n se incremente indefinidamente y $f(n)=r^n$ también se comporte de esta forma se representa $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)=+\infty$.
Rescribe cada uno de los resultados de ***la tabla 1*** utilizando la notación $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)=L$.

CIERRE

7. Completa las conjeturas:

Si $0 \le r < 1$ entonces .

Si $r>1$ entonces .

Fin de actividad

La ***propiedad 1.1*** presenta gran utilidad en la clasificación de los procesos infinitos, por tanto, se debe tener un conocimiento adecuado de su uso.

PROPIEDAD 1.1

TENDENCIA DE r^n

a. Si $0 \leq r < 1$, entonces $\lim\limits_{x \to +\infty} r^n = 0$.

b. Si $r > 1$, entonces $\lim\limits_{x \to +\infty} r^n = +\infty$.

SECCIÓN 1.1
SECUENCIA DIDÁCTICA 2
TOTAL DE UNA SUMA GEOMÉTRICA

INICIO

1. ¿Cómo se define una suma geométrica?

DESARROLLO

2. Supón $S = a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots + ar^{n-1}$. Multiplica ambas partes de la suma por la razón $r > 0$.

3. Calcula $S - rS$ y posterior simplifica.

4. En la ecuación que obtuviste en el ***inciso 3.*** factoriza S.

5. Despeja S de la ecuación que obtuviste en el ***inciso 4.***.

6. Rescribe el resultado obtenido en el ***inciso 5.*** en términos de

$$a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots + ar^{n-1}.$$

7. Supón: $0 \leq r < 1,\ n$ es "muy grande" y el resultado obtenido en el ***inciso 6.*** y calcula

$$S = a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots + ar^{n-1}.$$

CIERRE

8. Con base en las observaciones anteriores es posible establecer:

a. Si n es un número entero positivo, entonces:

b. Si $n \to +\infty$, entonces

Fin de actividad

El total de una suma geométrica es de gran utilidad en la clasificación de los procesos infinitos.

PROPIEDAD 1.2

SUMA DE UN PROCESO GEOMÉTRICO

Si

$$S = a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots + ar^{n-1} + \cdots,$$

con $a \neq 0$, entonces:

a. Si n es un número natural, entonces

$$S = a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots + ar^{n-1} = a\frac{1-r^n}{1-r}.$$

b. Si $0 < r < 1$, entonces

$$S = a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots = \frac{a}{1-r}.$$

c. Si $r \geq 1$ entonces

$$S = a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots$$

crece indefinidamente (no tiene suma).

A continuación clasificaremos y asignaremos una notación a los procesos antes estudiados.

DEFINICIÓN 1.2

TIPOS DE PROCESOS

Sea $A(n)$ la función (modelo) que describe un proceso específico.

a. Si $A(n) = L$ cuando $n \to +\infty$,

entonces el proceso es ***infinito con resultado finito***, simbólicamente

$$\lim_{n \to +\infty} A(n) = L.$$

b. Si $A(n) = +\infty$ cuando $n \to +\infty$, entonces el proceso se conoce como ***infinito con resultado infinito***, se representa

$$\lim_{n \to +\infty} A(n) = +\infty, \text{ o bien } \lim_{n \to +\infty} A(n) = -\infty.$$

c. Si $A(n) = L$ cuando $n \to n_0$, se trata de un ***proceso finito con resultado finito***, se representa por

$$\lim_{n \to n_0} A(n) = L.$$

d. Si $A(n) = L$ cuando $n \to n_0$, el proceso es ***finito con resultado infinito***, se representa por

$$\lim_{n \to n_0} A(n) = +\infty.$$

SECCIÓN 1.1
BLOQUE 1
EJEMPLOS 2

CLASIFICACIÓN DE PROCESOS

1. En otros cursos de matemáticas se asegura que todo número racional (o fraccionario) es equivalente a un decimal periódico. Un número racional periódico puede expresarse como un "proceso de suma infinita" y posteriormente es posible obtener la fracción

$$\frac{p}{q}$$

que le corresponde.

El decimal periódico

$$0.\overline{18} = 0.1818181818\cdots,$$

puede rescribirse

$$0.\overline{18} = 0.18 + 0.0018 + 0.000018 + 0.00000018 + 0.0000000018 + \cdots,$$

o bien,

$$0.\overline{18} = \frac{18}{100} + \frac{18}{10000} + \frac{18}{1000000} + \frac{18}{100000000} + \frac{18}{10000000000} + \cdots$$

$$0.\overline{18} = \frac{18}{10^2} + \frac{18}{10^4} + \frac{18}{10^6} + \frac{18}{10^8} + \frac{18}{10^{10}} + \cdots$$

$$0.\overline{18} = \frac{18}{10^2}\left(1 + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^4} + \frac{1}{10^6} + \frac{1}{10^8} + \cdots\right).$$

Comparando con la serie geométrica obtenemos

$$a = \frac{18}{100} \text{ y } r = \frac{1}{100}, \text{ por tanto, } 0.\overline{18} = \frac{\frac{18}{100}}{1 - \frac{1}{100}} = \frac{18}{99}.$$

En concreto,

$$0.\overline{18} = 0.18 + 0.0018 + 0.000018 + 0.00000018 + 0.0000000018 + 0.000000000018 + \cdots = \frac{18}{99},$$

esto significa

$$\lim_{n\to+\infty}\left(0.\overline{18} = 0.18 + 0.0018 + 0.000018 + 0.00000018 + 0.0000000018 + 0.0000000000\,18 + \cdots\right) = \frac{18}{99}.$$

Como consecuencia, podemos clasificar al proceso como:

infinito con resultado finito.

2. CUBRIENDO UNA SUPERFICIE CUADRADA

etapa 1 *etapa 2* *etapa 3* *etapa 4*

a. El proceso que consiste en cubrir una región cuadrada de lado de longitud uno, de la siguiente forma:

Etapa 1. Cubrir la mitad de la superficie cuadrado. Superficie cubierta

$$A(1)=\frac{1}{2}.$$

Etapa 2. Cubrir la mitad de la superficie del rectángulo que faltó cubrirse en la etapa 1. Superficie cubierta

$$A(2)=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2^1}+\frac{1}{2^2}.$$

Etapa 3. Cubrir la mitad de la superficie del rectángulo que faltó cubrirse en la etapa 2. Superficie cubierta

$$A(3)=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}=\frac{1}{2^1}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}.$$

Etapa n. La superficie cubierta es

$$A(n)=\frac{1}{2^1}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^n}=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2^1}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}\right),$$

o bien, en términos de la suma geométrica, como un proceso geométrico de razón $r=\frac{1}{2}$ y factor constante $a=\frac{1}{2}$. Su suma es $A(n)=\frac{1}{2}\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{\frac{1}{2}}=1-\left(\frac{1}{2}\right)^n$.

b. En la octava etapa se habrá cubierto

$$A(8)=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2^1}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^7}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^8}{1-\frac{1}{2}}\right)=1-\frac{1}{2^8}=\frac{255}{256}$$

de la superficie del cuadrado.

Podemos escribir $\lim_{n\to 8} A(n)=\frac{255}{256}$ y caracterizarlo al proceso como “finito con resultado finito”.

c. En la etapa 20, $A(20)=\frac{1}{2^1}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^{20}}=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2^1}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^{19}}\right)$

o también

$$\underset{n\to 20}{\text{lím}}\, A(n) = 1 - \frac{1}{2^{20}} = \frac{1048575}{1048576}$$

y caracterizarlo como "proceso finito con resultado finito".

d. Si $n \to +\infty$, la superficie cuadrada ha sido cubierta en su totalidad y tal proceso se clasifica como infinito con resultado finito,

$$\underset{n\to +\infty}{\text{lím}}\, A(n) = 1.$$

3. LONGITUD DE UNA CURVA

Sea un segmento de recta de longitud 1, consideremos el proceso (representemos por $L(n)$ la longitud de la curva en cada etapa):

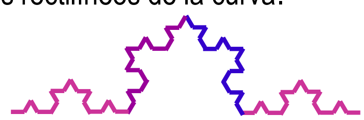
Etapa 1. Dividimos el segmento de recta en tres partes de la misma longitud, suprimimos la parte central y la sustituimos por dos segmentos de recta congruentes con el segmento de recta eliminado (dos de los extremos de los dos nuevos segmentos de recta son comunes y los otros dos extremos coinciden con los extremos del segmento original).

Etapa 2. Dividimos cada uno de los cuatro segmentos de recta de la etapa anterior en tres partes iguales, suprimimos las partes centrales y las reemplazamos con dos segmentos congruentes con las partes centrales (antes eliminadas) de manera que dos de sus extremos sean comunes y los otros dos extremos coincidan con los extremos del segmento original.

Etapa 3. Se repite el proceso anterior con cada uno de los segmentos rectilíneos de la curva.

etapa 1

etapa 2



etapa 3

Etapa n. Se repite el proceso anterior con cada uno de los segmentos rectilíneos de la curva de la etapa anterior, por tanto,

.

ETAPA n	NÚMERO DE SEGMENTOS	LONGITUD DE CADA SEGMENTO	LONGITUD DE LA CURVA $L(n)$
1	4	$\frac{1}{3}$	$\frac{4}{3}$
2	$16 = 4^2$	$\frac{1}{9} = \left(\frac{1}{3}\right)^2$	$\left(\frac{4}{3}\right)^2$
3	$64 = 4^3$	$\frac{1}{27} = \left(\frac{1}{3}\right)^3$	$\left(\frac{4}{3}\right)^3$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n	4^n	$\left(\frac{1}{3}\right)^n$	$\left(\frac{4}{3}\right)^n$

La relación $L(n)=\left(\frac{4}{3}\right)^n$ proporciona la longitud de la curva en la etapa n, observa que si n crece indefinidamente, entonces $L(n)=\left(\frac{4}{3}\right)^n$ también crece indefinidamente.

Por tanto, en la **etapa** 5 el proceso es finito y la curva tiene longitud finita

$$L(5)=\left(\frac{4}{3}\right)^5, \text{ o bien } \lim_{n\to 5} L(n)=\left(\frac{4}{3}\right)^5,$$

Si $n\to+\infty$, el proceso es infinito y $\lim_{n\to+\infty} L(n)=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{4}{3}\right)^n=+\infty$, el resultado infinito.

SECCIÓN 1.1 BLOQUE 1 EJERCICIOS 1	Nombre Fecha

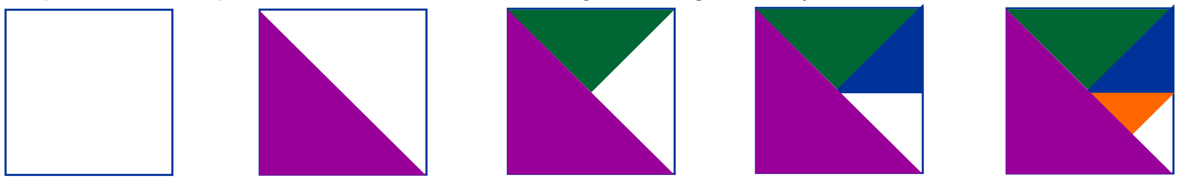
a. Sea el proceso:
Etapa 1. 0.9.
Etapa 2. $0.9+0.09$.
Etapa 3. $0.9+0.09+0.009$.
Etapa 4. $0.9+0.09+0.009+0.0009$.
Etapa 5. $0.9+0.09+0.009+0.0009+0.00009$.
El proceso se repite indefinidamente.

1. Expresa el proceso como una “suma geométrica infinita”.

2. Verifica que el proceso es geométrico, obtén el factor constante a y la razón r.

3. Obtén la suma del proceso y clasifícalo.

b. Sea un cuadrado de lado de longitud 1, considera el proceso (representemos por $A(n)$ el área sombreada en cada etapa):
Etapa 1. Utilizar una diagonal para dividir el cuadrado en dos triángulos congruentes y sombrear uno de ellos.
Etapa 2. Dividir la parte sin sombrear en dos triángulos congruentes y sombrear uno de ellos.



etapa 1 ***etapa 2*** ***etapa 3*** ***etapa 4***

Etapa 3. Repetir el proceso anterior con el triángulo sin sombrear.

1. Construye un modelo que proporcione el área sombreada en cada etapa.

2. Calcula $\lim\limits_{n\to 6} A(n)$ y clasifica este proceso.

3. Calcula $\lim\limits_{n\to +\infty} A(n)$ y clasifica el proceso.

c. Toma como base un segmento rectilíneo de longitud uno y considera las etapas (o iteraciones).
Etapa 1. Divide el segmento de recta en tres partes de la misma longitud, suprimir el tercio central y cuenta el número de puntos que son extremos de los segmentos rectilíneos que quedaron.
Etapa 2. Divide cada uno de los segmentos de recta de la etapa anterior en tres partes iguales y suprimir el tercio central, contar el número de puntos que son extremos de los segmentos rectilíneos que quedaron.
Repite el proceso indefinidamente.

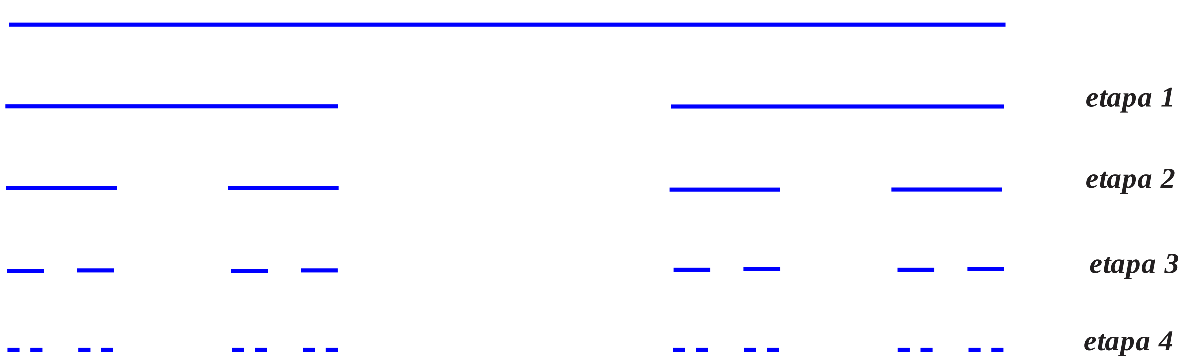
etapa 1
etapa 2
etapa 3
etapa 4

1. Construye un modelo ($N(n)$) que proporcione el número total de puntos extremos en los segmentos rectilíneos generados en cada etapa.

2. Calcula $\lim\limits_{n \to 10} N(n)$ y clasifica este proceso.

3. Calcula $\lim\limits_{n \to +\infty} N(n)$ y clasifica este proceso.

d. Toma como base un segmento rectilíneo de longitud uno y considera las etapas (o iteraciones).
Etapa 1. Divide el segmento de recta en tres partes de la misma longitud, suprimir el tercio central y sumar las longitudes de los segmentos rectilíneos restantes.
Etapa 2. Divide los segmentos de línea recta en tres partes de la misma longitud, suprimir el tercio central y sumar las longitudes de los segmentos rectilíneos restantes.
Repite el proceso indefinidamente.
Representa la suma de los segmentos rectilíneos remanentes por $S(n)$).

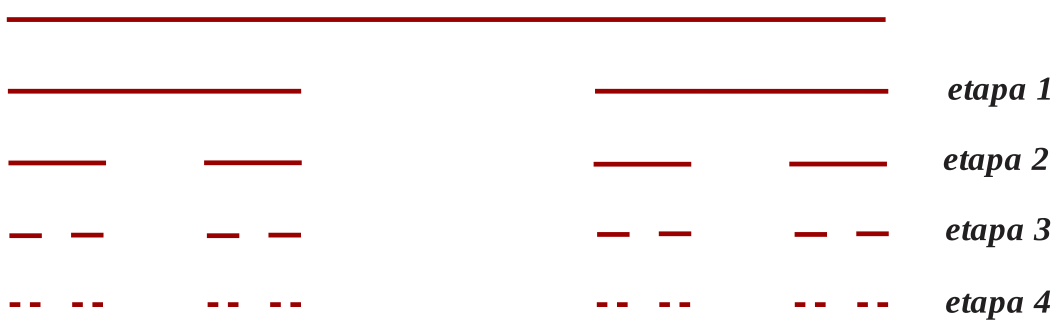


1. Construye un modelo para $L(n)$, que proporcione la longitud cada uno de los segmentos rectilíneos de la etapa n.

2. Calcula $\lim\limits_{n \to 5} L(n)$ y clasifica este proceso.

3. Calcula $\lim\limits_{n \to +\infty} L(n)$ y clasifica este proceso.

e. Toma como base un segmento rectilíneo de longitud uno y considera las etapas (o iteraciones).
Etapa 1. Divide el segmento de recta en tres partes de la misma longitud, suprimir el tercio central y sumar las longitudes de los segmentos rectilíneos restantes.
Etapa 2. Divide los segmentos de línea recta en tres partes de la misma longitud, suprimir el tercio central y sumar las longitudes de los segmentos rectilíneos restantes.
Repite el proceso indefinidamente.
Representa la suma de los segmentos rectilíneos remanentes por $S(n)$).



1. Completa la tabla:

ETAPA n	SEGMENTOS RECTILÍNEOS $S(n)$	LONGITUD TOTAL DE LOS SEGMENTOS RECTILÍNEOS $H(n)$	LONGITUD ELIMINADA $L(n)$
1			
2			
3			
4			
$\vdots$			
n			

2. Calcula $\lim\limits_{n \to +\infty} S(n)$ y clasifica el proceso.

3. Calcula $H(n)$ y clasifica el proceso.

4. Calcula $\lim\limits_{n \to +\infty} L(n)$ y clasifica el proceso.

f. En el plano cartesiano, sea el segmento de recta $\overline{OA}$ con extremos en $O(0\,,\,0)$ y en el punto $A(1\,,\,1)$, evidentemente su longitud es

$$d = \sqrt{(1-0)^2 + (1-0)^2} = \sqrt{2} \text{ unidades.}$$

Etapa 1. Se dobla el segmento de recta no horizontal $\overline{OA}$ de manera que, junto con el eje de las abscisas genera el triángulo con vértices en

$$O(0\,,\,0),\ A(1\,,\,1) \text{ y } B\left(\tfrac{1}{2}\,,\,\tfrac{1}{2}\right),$$

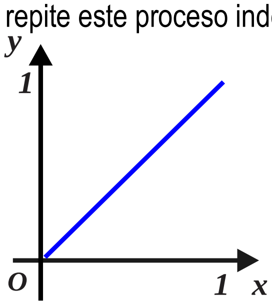
la suma de las longitudes de los lados del triángulo que no se encuentran en el intervalo $[0\,,\,1]$ es también

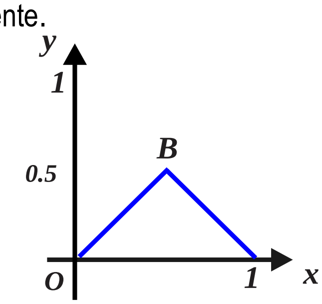
$$d_1 = \sqrt{2}\,.$$

Etapa 2. Se doblan los segmentos de recta $\overline{OB}$ y $\overline{BA}$ de manera que, junto con el eje de las abscisas, cada uno de ellos genere dos triángulos con vértice común $B\left(\tfrac{1}{2}\,,\,0\right)$. Así la suma de las longitudes de los lados del triángulo que no se encuentran en el intervalo $[0\,,\,1]$ es también

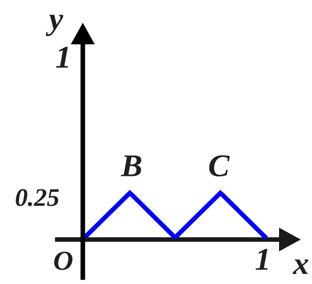
$$d_1 = \sqrt{2}\,.$$

Se repite este proceso indefinidamente.

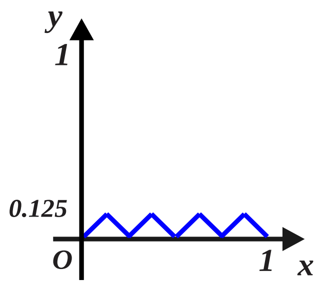




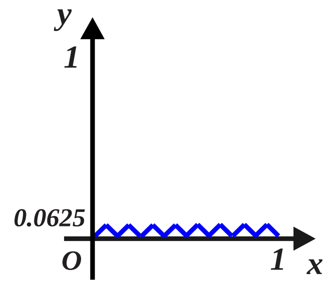
etapa 1



etapa 2



etapa 3



etapa 4

1. Completa la tabla.

ETAPA n	LONGITUD DE LOS LADOS FUERA DE $[0,1]$ $p(n)$	ÁREA DE TODOS LOS TRIÁNGULOS $A(n)$
1		
2		
3		
$\vdots$		
n		

2. Calcula $\lim\limits_{n \to +\infty} p(n)$ y clasifica el proceso.

3. Calcula $\lim\limits_{n \to +\infty} A(n)$ y clasifica el proceso.

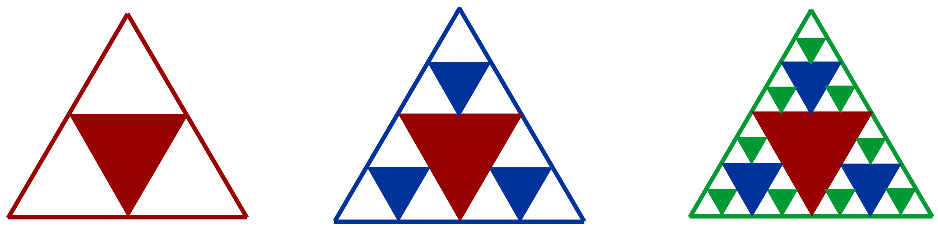
g. Sea una región plana triangular de área igual a uno, consideremos el siguiente proceso:

Etapa 1. Con segmentos de recta unimos los puntos medios de los lados y así obtenemos cuatro triángulos equiláteros semejantes al original, pero sólo tres comparten su orientación, seleccionamos y sombreamos el triángulo con orientación diferente (etapa 1) y calculamos su área.

Etapa 2. Repetimos el proceso efectuado en la etapa 1 con los tres triángulos orientados en la misma forma que el triángulo original.

Etapa 3. Repetimos el proceso efectuado en la etapa 1 con los nueve triángulos obtenidos en la etapa 2 orientados en la misma forma que el triángulo original.

El proceso se repite indefinidamente.



etapa 1 *etapa 2* *etapa 3*

1. Completa la tabla.

ETAPA n	TRIÁNGULOS SOMBRADOS AGREGADOS $N(n)$	ÁREA TOTAL SIN SOMBREAR $A(n)$	ÁREA TOTAL SOMBREADA $S(n)$
1			
2			
3			
$\vdots$			
n			

2. Calcula $\lim\limits_{n \to +\infty} N(n)$ y clasifica el proceso.

3. Calcula $\lim\limits_{n \to +\infty} A(n)$ y clasifica el proceso.

4. Calcula $\underset{n \to +\infty}{lím} S(n)$ y clasifica el proceso.

FIN DE SECCIÓN

SECCIÓN 1.2 NOCIÓN DE LÍMITE

APRENDIZAJES

7. Expresa simbólicamente el límite de un proceso infinito si éste existe.

8. Interpreta el límite de un proceso infinito.

9. Identifica cuál es el resultado límite de un proceso infinito.

10. Establece el valor límite de un proceso infinito dado en forma algebraica, con base en otras representaciones de dicho proceso.

TEMÁTICA

1. Acercamiento al concepto de límite de una función.

Notación de límite

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L \ .$$

BLOQUE 1

CONCEPTO DE LÍMITE

Presentamos como guía ejercicios resueltos con la intención de que el alumno los tome como ejemplo en la resolución otros ejercicios similares.

Por las características de la presente obra, solo trataremos intuitivamente el concepto de límite. En diversas ramas del conocimiento (ingeniería, física, biología, química, entre otras) los conceptos de exactitud y precisión se encuentran vinculados; la precisión se refiere a la magnitud del error que se comete (a causa del azar, de la escala de medición, etcétera) al medir un objeto, la exactitud se refiere a la medida (real) del objeto y por lo general es imposible de obtener. Supón que estamos interesados en obtener las medidas de dos características de un objeto, y que ambas medidas se relacionan por medio de la función con regla de correspondencia f, es decir, en caso de que sea posible determinar la medida de la primera característica, que representamos por $x = x_0$, al aplicarle la función f obtenemos que la medida de la otra característica es $f(x_0) = L$. Así, al utilizar la relación f para obtener el valor L (valor de la segunda característica), primero debemos obtener un valor x_0 de x, sin embargo, por lo general esto no podemos hacerlo exactamente por lo que es inevitable que cometamos un error que influye en la correspondiente determinación del valor real $f(x_0) = L$.

Por tanto, es natural que nos preguntemos ¿de qué forma el error cometido al medir x_0 se refleja en el intento de medir L? Si para valores “muy cercanos” de x a x_0, la función f proporciona valores muy diferentes del valor real L, entonces f carece de utilidad, esto hace que **fijemos un nivel de precisión admisible (ε) para el valor** L (nos obliga a fijar una cota de error ε) de manera que cuando **midamos** x_0 **con un error menor que** δ tengamos la certeza de que el valor resultante sea diferente de L en menos que ε.

Naturalmente, la precisión δ en la medida de x_0 depende también del valor de x_0. Esto se justifica entendiendo que no es lo mismo, por ejemplo, medir kilómetros que milímetros, la precisión de nuestra medida debe ser mejor en este último caso. Las ideas antes descritas nos conducen, de forma natural a la definición matemática de límite, misma que enunciamos en las siguientes líneas.

i. “Fijar un nivel de precisión admisible (ε) para L” significa que las ordenadas $y = f(x)$ y el valor real de L cumple la condición

$$-\varepsilon < f(x) - L < \varepsilon,$$

que representa un intervalo sobre el eje de las ordenadas, su centro está en la ordenada $y = L$ y los extremos son los números (ordenadas)

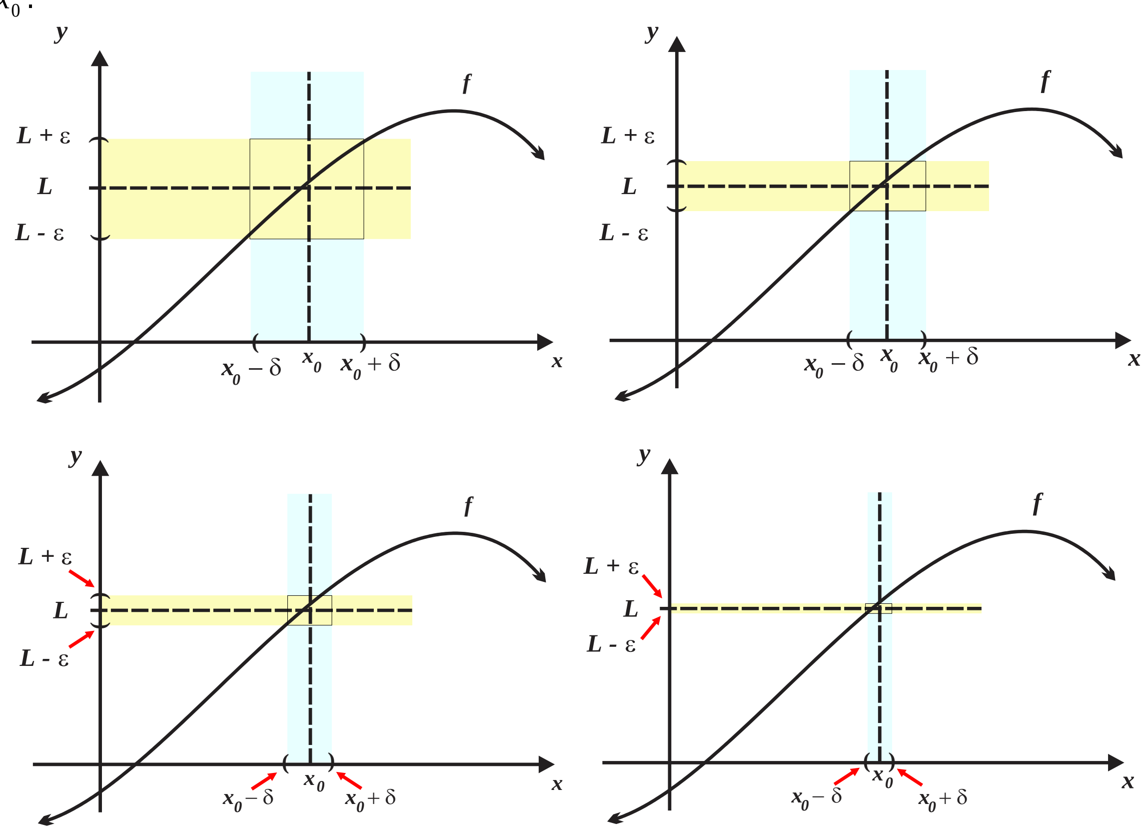
$$L - \varepsilon \text{ y } L + \varepsilon;$$

nota que al disminuir el número ε los números $y = f(x)$ serán más próximos al número L.

ii. "Medir x_0 con un error menor que δ" significa que las abscisas x y el valor real de x_0 cumple la condición

$$-\delta < x - x_0 < \delta, \text{ siempre que } 0 < \delta$$

que garantiza $x \neq x_0$. Para números δ cada vez menores los números x estarán más próximos a x_0.



Las observaciones anteriores se representan por la expresión $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$, misma que se lee "el límite $f(x)$ cuando x tiende a x_0 es igual a L".

Entre las propiedades de mayor importancia en el proceso de evaluación de límites se encuentran:

PROPIEDAD 1.3

UNICIDAD DEL LÍMITE

Si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$ y $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = M$, entonces $L = M$.

La propiedad 1.3 asegura, si existe el número $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$, entonces tiene un valor único L, por tanto, este valor no depende de la forma en que se efectúe la aproximación de x a x_0.

Para evaluar límites de funciones algebraicas no debemos perder de vista la siguiente propiedad.

PROPIEDAD 1.4

LÍMITES BÁSICOS

Sea x_0 un número real, n es un número entero, entonces:

a. Si $f(x) = k$, entonces $\lim\limits_{x \to x_0} k = k$.

b. Si $f(x) = x$, entonces $\lim\limits_{x \to x_0} x = x_0$.

c. Si $f(x) = x^n$, entonces $\lim\limits_{x \to x_0} x^n = x_0^n$.

d. Si $p(x)$ es una función polinomial, entonces $\lim\limits_{x \to x_0} p(x) = p(x_0)$.

PROPIEDAD 1.5

LÍMITES DE FUNCIONES POLINOMIALES Y RACIONALES

Si $r(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$ es una función racional, entonces $\lim\limits_{x \to x_0} r(x) = \dfrac{p(x_0)}{q(x_0)}$ siempre que $q(x_0) \neq 0$.

SECCIÓN 1.2
BLOQUE 1
EJEMPLOS 1

1. $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{1}{8}$.

En este caso $f(x) = \dfrac{1}{8}$, entonces $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{1}{8} = f\left(\dfrac{1}{8}\right) = \dfrac{1}{8}$.

2. $\lim\limits_{x \to 13} x$.

$f(x) = x$, entonces $\lim\limits_{x \to 13} x = f(13) = 13$.

3. $\lim\limits_{x\to -1} 2x^2$.

En este caso $f(x)=2x^2$, entonces $\lim\limits_{x\to -1} 2x^2 = 2(-1)^2 = 2$.

4. $\lim\limits_{x\to -4} \frac{1}{4}x^3$.

Puesto que $f(x)=\frac{1}{4}x^3$, entonces $\lim\limits_{x\to -4} \frac{1}{4}x^3 = \frac{1}{4}(-4)^3 = -16$.

5. $\lim\limits_{x\to \frac{2}{3}} \left(3x^3-2x^2-x+4\right)$.

Si $f(x)=3x^3-2x^2-x+4$, entonces

$$\lim_{x\to \frac{2}{3}} \left(3x^3-2x^2-x+4\right)=3\left(\frac{2}{3}\right)^3-2\left(\frac{2}{3}\right)^2-\left(\frac{2}{3}\right)+4=\frac{10}{3}.$$

6. En $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}} \frac{x^2-3x+9}{x-3}$, $f(x)=\frac{x^2-3x-9}{x-3}$, entonces

$$\lim_{x\to \frac{1}{2}} \frac{x^2-3x+9}{x-3}=\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2-3\left(\frac{1}{2}\right)+9}{\left(\frac{1}{2}\right)-3}=-\frac{31}{10}.$$

7. En $\lim\limits_{x\to -1} \frac{6}{4x-3}$, $f(x)=\frac{6}{4x-3}$, luego $\lim\limits_{x\to -1} \frac{6}{4x-3}=\frac{6}{4(-1)-3}=-\frac{6}{7}$.

8. Si $\lim\limits_{x\to 2} \left(3x-\sqrt{x^2+12}\right)$, entonces $f(x)=3x-\sqrt{x^2+12}$, así

$$\lim_{x\to 2} \left(3x-\sqrt{x^2+12}\right)=3(2)-\sqrt{(2)^2+12}=6-4=2.$$

9. Si $\lim\limits_{x\to 4} \left(3x-\sqrt{x}\right)(x-2)$, sea $f(x)=\left(3x-\sqrt{x}\right)(x-2)$ y

$$\lim_{x\to 4} \left(3x-\sqrt{x}\right)(x-2)=\left(3(4)-\sqrt{4}\right)(4-2)=20.$$

10. En $\lim\limits_{x\to 1} \sqrt{\frac{5x-1}{x+3}}$, $f(x)=\sqrt{\frac{5x-1}{x+3}}$, luego $\lim\limits_{x\to 1} \sqrt{\frac{5x-1}{x+3}}=\sqrt{\frac{5(1)-1}{1+3}}=\sqrt{\frac{4}{4}}=1$.

SECCIÓN 1.2 BLOQUE 1 EJERCICIOS 1	Nombre Fecha

1. $\lim\limits_{x \to 4} 7$.

2. $\lim\limits_{x \to 13} (3x+1)$.

3. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{2x^2}{4x}$.

4. $\lim\limits_{x \to -2} (x^2 - 5x)$.

5. $\lim\limits_{x \to 0} (5x^4 - x^3 + 5x^2 + x - 6)$.

6. $\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}} \dfrac{x^2 - x + 2}{x - 3}$.

7. $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{2x-1}{5x+2}$.

8. $\lim\limits_{x\to -1}\left(\sqrt{8x^2+1}+x\right)$.

9. $\lim\limits_{x\to 0}\left(x+\sqrt{x+1}\right)\left(3x+2\right)$.

10. $\lim\limits_{x\to 1}\sqrt{\dfrac{1}{x+3}}$.

La ***propiedad 1.6*** presenta las propiedades operativas de los límites.

PROPIEDAD 1.6

PROPIEDADES OPERATIVAS DE LOS LÍMITES

Si $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=L_1$ y $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=L_2$ existen, entonces:

a. Homogeneidad $\lim\limits_{x\to x_0}(k)f(x)=(k)\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=(k)(L_1)$.

b. Aditividad $\lim\limits_{x\to x_0}\left[f(x)\pm g(x)\right]=L_1\pm L_2$.

c. Producto: $\lim\limits_{x\to x_0}(f\,g)(x)=L_1\cdot L_2$.

d. División: $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{L_1}{L_2}$, siempre que $L_2\neq 0$.

SECCIÓN 1.2
BLOQUE 1
EJEMPLOS 2

Uso de la ***propiedad 1.6.***

1. $\lim\limits_{x\to -1}\left(2x^4+2\right)=\lim\limits_{x\to -1}\left(2x^4\right)+\lim\limits_{x\to -1}(2)$ Propiedad ***b.***

$=(2)\lim\limits_{x\to -1}\left(x^4\right)+2$ Propiedad ***a.***

$=(2)(-1)^4+2=4$. Evaluación.

2. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^3-1}{x+4}=\dfrac{\lim\limits_{x\to -2}\left(x^3-1\right)}{\lim\limits_{x\to -2}\left(x+4\right)}$ Propiedad ***c.***

$=\dfrac{\lim\limits_{x\to -2}\left(x^3\right)-\lim\limits_{x\to -2}\left(1\right)}{\lim\limits_{x\to -2}\left(x\right)+\lim\limits_{x\to -2}\left(4\right)}=\dfrac{\left(-2\right)^3-1}{\left(-2\right)+4}=-\dfrac{9}{2}.$ Propiedad ***b.*** Evaluación.

SECCIÓN 1.2 BLOQUE 1 EJERCICIOS 2	Nombre Fecha

Desarrolla ilustrando el uso de la ***propiedad 1.6*** (propiedades operativas de los límites).

1. $\lim\limits_{x\to 2}\left(3x^2-2x+5\right).$

2. $\lim\limits_{x\to 0}\left(x-4\right)\left(x^2-x+2\right).$

3. $\lim\limits_{x\to 2} x\left(x^4-2^4\right)\left(x+2\right).$

4. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3+1}{x^2-1}.$

5. $\lim\limits_{x\to 1}\left[3x-\dfrac{2x+1}{x^2+4}\right].$

Evaluamos límites de funciones en que basta con sustituir el número al que tiende la variable en la regla de correspondencia de la función, sin embargo, no siempre funciona este método, puesto que existen situaciones en que el proceso anterior conduce a la forma indeterminada $\frac{0}{0}$, si éste es el caso la siguiente propiedad puede ser de gran ayuda.

PROPIEDAD 1.7

COMPORTAMIENTO EQUIVALENTE ALREDEDOR DE x_0

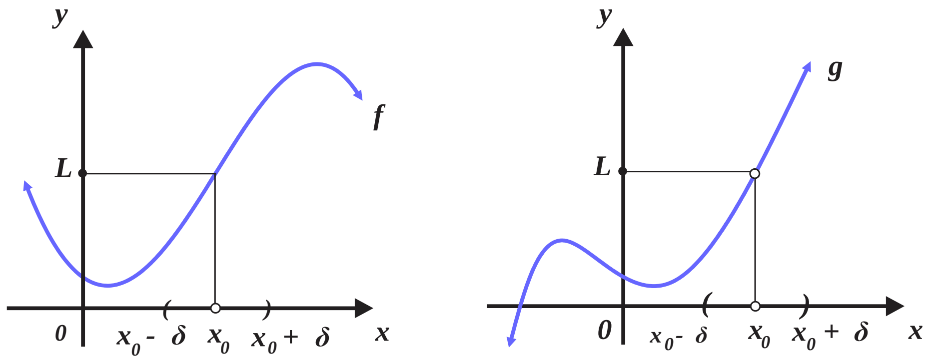
Sean $f = g$ en el intervalo I, $x_0 \in I$ y $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = L$, entonces

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = L.$$

La ***propiedad 1.7*** garantiza: si dos funciones f y g tienen el mismo comportamiento alrededor de x_0, entonces

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = L,$$

y permite, que en el proceso de evaluar ciertos límites sea posible "simplificar las reglas de correspondencia de la función" involucrada.



Los elementos teóricos antes tratados la siguiente estrategia que es de gran utilidad para evaluar límites.

ESTRATEGIA 1.1

Verifica que es posible aproximarse a $x = x_0$, en caso afirmativo sustituya $x = x_0$ en $f(x)$:

1. Si $f(x_0)$ existe, entonces $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

2. Si $f(x_0)$ no existe, entonces $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ no existe.

Si obtiene una indeterminación de la forma $\frac{0}{0}$, es posible que $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ exista y deberás utilizar la ***propiedad 1.7***.

Las factorizaciones:

$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$,

$x^2 + (a+b)x + ab = (x+a)(x+b)$,

$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$,

$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$,

$a^m - b^n = (a-b)(a^{m-1} + a^{m-2}b^1 + \cdots + b^{n-1})$,

son de gran utilidad en la simplificación de funciones y posterior evaluación de límites.

SECCIÓN 1.2 BLOQUE 1 EJEMPLOS 3

En todos los casos, la sustitución $x = x_0$ en la función f conduce a la forma indeterminada $\frac{0}{0}$, por tanto, el uso de la estrategia 1.1 puede ser útil en la evaluación del límite.

1. En la evaluación de $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{x^2-5x}{x-5}$, $f(x) = \dfrac{x^2-5x}{x-5} = \dfrac{x(x-5)}{x-5} = x$ siempre que $x \neq 5$, entonces $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{x^2-5x}{x-5} = \lim\limits_{x\to 5} x = 5$.

2. Para $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{9-x^2}{3-x}$, se tiene $f(x) = \dfrac{9-x^2}{3-x} = \dfrac{(3-x)(3+x)}{3-x} = 3+x$ siempre que $x \neq 3$, entonces $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{9-x^2}{3-x} = \lim\limits_{x\to 3} (3+x) = 6$.

3. En $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{x^2-10x+24}{x-4}$, $f(x) = \dfrac{x^2-10x+24}{x-4} = \dfrac{(x-6)(x-4)}{x-4} = x-6$, siempre que $x \neq 4$, así $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{x^2-10x+24}{x-4} = \lim\limits_{x\to 4} (x-6) = 4-6 = -2$.

4. Si $\lim\limits_{x\to -7} \dfrac{x+7}{x^2+8x+7}$, entonces $f(x) = \dfrac{x+7}{x^2+8x+7} = \dfrac{x+7}{(x+7)(x+1)} = \dfrac{1}{x+1}$, siempre que $x \neq -7$, por tanto, $\lim\limits_{x\to -7} \dfrac{x+7}{x^2+8x+7} = \dfrac{1}{-7+1} = -\dfrac{1}{6}$.

5. En $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{\sqrt{x}-\sqrt{2}}$ se tiene $f(x)=\dfrac{x-2}{\sqrt{x}-\sqrt{2}}=\dfrac{(\sqrt{x}-\sqrt{2})(\sqrt{x}+\sqrt{2})}{\sqrt{x}-\sqrt{2}}=(\sqrt{x}+\sqrt{2})$, siempre que $x\neq\sqrt{2}$, entonces $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{\sqrt{x}-\sqrt{2}}=\lim\limits_{x\to 2}(\sqrt{x}+\sqrt{2})=\sqrt{2}+\sqrt{2}=2\sqrt{2}$.

6. Si $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2+8x+7}{x^2-6x-7}$, entonces $f(x)=\dfrac{x^2+8x+7}{x^2-6x-7}=\dfrac{(x+1)(x+7)}{(x+1)(x-7)}=\dfrac{x+7}{x-7}$ siempre que $x\neq -1$, por tanto, $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2+8x+7}{x^2-6x-7}=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x+7}{x-7}=\dfrac{-1+7}{-1-7}=-\dfrac{3}{4}$.

7. En $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x-5}{x^3-125}$, entonces $f(x)=\dfrac{x-5}{x^3-125}=\dfrac{x-5}{(x-5)(x^2+5x+25)}=\dfrac{1}{x^2+5x+25}$ cuando $x\neq 5$, en consecuencia $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x-5}{x^3-125}=\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{1}{x^2+5x+25}=\dfrac{1}{75}$.

8. Si $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+4}-2}{x}$, entonces

$$f(x)=\frac{\sqrt{x+4}-2}{x}=\frac{(\sqrt{x+4}-2)(\sqrt{x+4}+2)}{x(\sqrt{x+4}-2)}=\frac{x+4-4}{x(\sqrt{x+4}+2)}=\frac{1}{\sqrt{x+4}+2},$$

siempre que $x\neq 0$, luego, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+4}-2}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\sqrt{x+4}+2}=\dfrac{1}{2+2}=\dfrac{1}{4}$.

9. En $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{1}{x-2}$ la sustitución de $x_0=2$ en f conduce a la forma indeterminada $\dfrac{1}{2-2}=\dfrac{1}{0}$, por tanto, $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{1}{x-2}$ no existe.

10. Si $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\sqrt{x+2}}{x+2}$, entonces $f(x)=\dfrac{\sqrt{x+2}}{x+2}=\dfrac{1}{\sqrt{x+2}}$, la sustitución $x_0=-2$ conduce a la forma indeterminada $\dfrac{1}{0}$, entonces $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\sqrt{x+2}}{x+2}$ no existe.

11. En $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{4}{(x-3)^2}$ la sustitución de $x_0=3$ en $f(x)=\dfrac{4}{(x-3)^2}$ da $\dfrac{1}{0}$ y $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{4}{(x-3)^2}$ no existe.

SECCIÓN 1.2 BLOQUE 1 EJERCICIOS 3	Nombre Fecha

Evalúa el límite propuesto o concluye que no existe.

1. $\lim_{x \to 1} \frac{x-1}{x^2-1}$.

2. $\lim_{x \to -5} \frac{x^2-24}{x^2+2x-15}$.

3. $\lim_{t \to 7} \frac{t^2-5t-14}{t-7}$.

4. $\lim_{t \to -3} \frac{t^2+6t+9}{t^2+7t+12}$.

5. $\lim_{x \to -3} \frac{x^2+x}{x+3}$.

6. $\lim_{t \to -3} \frac{t^3-27}{t+3}$.

7. $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{5x+\sqrt{-x}}{x^3+1}$.

8. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-1}{(x-1)^2}$.

9. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-3}{(x-1)^2}$.

10. $\lim\limits_{x\to -5} \dfrac{2x^2-10x+12}{x^2+3x-10}$.

11. $\lim\limits_{s\to 4} \dfrac{4-s}{s^2-16}$.

12. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-1}{x^2+x-2}$.

13. $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2-9}{2x-6}$.

14. $\lim_{w \to 2} \dfrac{w^2 - 4w + 4}{w^2 - 4}$.

15. $\lim_{x \to 1} \dfrac{6x^5 - 4x^4 + 3x^2 - 9x + 4}{x^4 - 8x^3 + 9x - 2}$.

16. $\lim_{x \to -2} \dfrac{5x^4 + x^3 - 2x - 76}{x^3 - 2x^2 + x + 18}$.

17. $\lim_{x \to 3} \dfrac{x^2 - x - 6}{x - 3}$.

18. $\lim_{x \to -2} \dfrac{x^3 + 4x^2 - x - 10}{x + 2}$.

19. $\lim_{x \to \frac{1}{2}} \dfrac{4x^3 - 8x^2 + 11x - 4}{2x - 1}$.

20. $\lim\limits_{z\to -2} \dfrac{2z^3-2z^2-4z+16}{z+2}$.

21. $\lim\limits_{z\to \frac{1}{2}} \dfrac{2z^4-3z^3-z^2}{2z-1}$.

22. $\lim\limits_{z\to 1} \dfrac{z^4+5z-6}{z-1}$.

23. $\lim\limits_{t\to \frac{3}{2}} \dfrac{2t^2+t-6}{2t^2-5t+3}$.

24. $\lim\limits_{t\to -\frac{2}{3}} \dfrac{9t^2-4}{3t^2-10t-8}$.

25. $\lim\limits_{t \to \frac{1}{2}} \dfrac{2t^2 + t - 1}{2t^2 + 3t - 2}$.

26. $\lim\limits_{t \to \frac{3}{4}} \dfrac{4t^2 + 5t - 6}{16t^2 - 9}$.

27. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^3 - 1}{x^2 - 1}$.

28. $\lim\limits_{p \to 1} \dfrac{3p^2 - 3}{p - 1}$.

29. $\lim\limits_{t \to -4} \dfrac{t^3 + 64}{t + 4}$.

30. $\lim\limits_{u \to 1} \dfrac{u^4 - 16}{u^3 - 8}$.

31. $\lim\limits_{v \to 3} \dfrac{v^2 - 9}{v^2 - 5v + 6}$.

32. $\lim\limits_{v \to 4} \dfrac{v^2 - 16}{\sqrt{v} - 2}$.

33. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{5x^3 + 8x^2}{3x^4 - 16x^2}$.

34. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt[3]{x} - 1}{x - 1}$.

35. $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{\sqrt[3]{x + 5} - 2}{x - 3}$.

36. $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\sqrt{5 + h} - \sqrt{5}}{2h}$.

37. $\lim\limits_{h \to 3} \dfrac{\sqrt{2h+3}-h}{h-3}$.

38. $\lim\limits_{x \to 8} \dfrac{\sqrt[3]{x}-2}{x-8}$.

39. $\lim\limits_{h \to 27} \dfrac{\sqrt[3]{h}-3}{h-27}$.

40. $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{h}{\sqrt{h+36}-6}$.

41. $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\sqrt{h+4}-2}{h}$.

42. $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\sqrt[3]{h+8}-2}{h}$.

BLOQUE 2

LÍMITES CUANDO LA VARIABLE TIENDE AL INFINITO

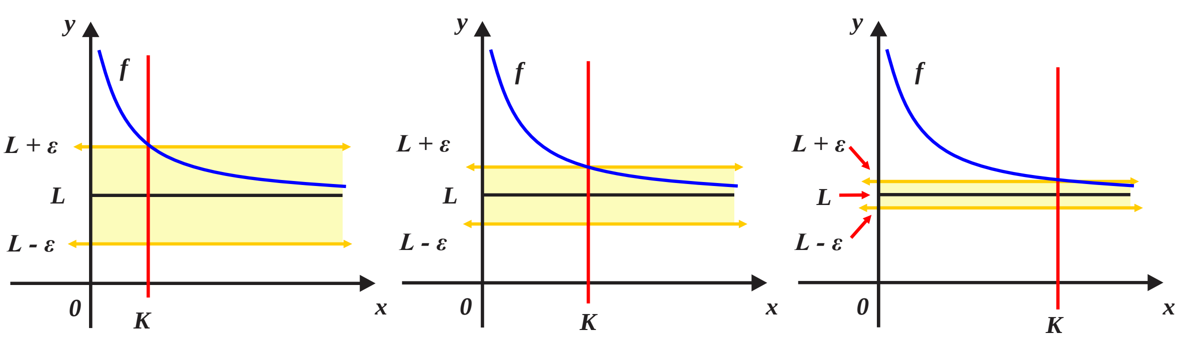
Presentamos los elementos teóricos suficientes que justifican los procesos utilizados en la evaluación de límites que sirven como ejemplo para que el alumno evalúe otros de dificultad equivalente.

Ya dimos significado a la expresión $\lim\limits_{n\to+\infty} f(n)=L$, en términos de los "procesos infinitos", sin embargo, fue impreciso y se encuentra en el contexto de los procesos discretos. Ahora estableceremos el significado de las expresiones

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=L \text{ y } \lim_{x\to-\infty} f(x)=L,$$

expresiones cuando la variable x es continua.

Revisemos la terna de figuras:

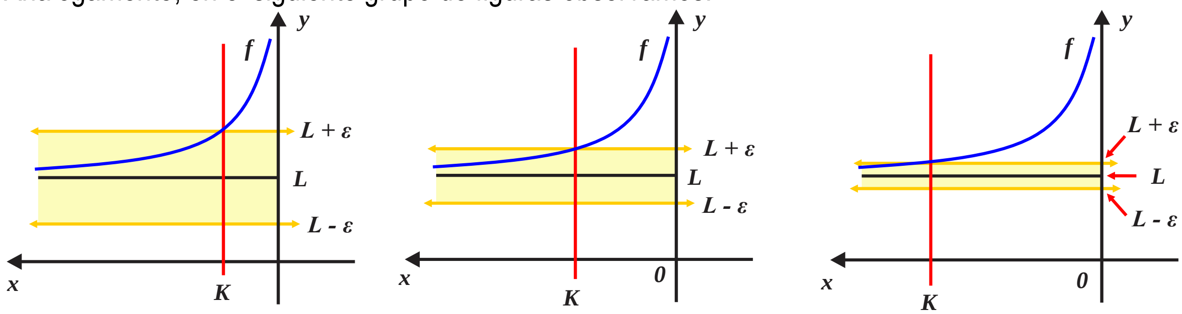


Nota que a partir de la línea recta vertical de ecuación $x=K$ $(K>0)$ la curva asociada a la función f se encuentra contenida en la franja (amarilla) del plano cartesiano determinada por las líneas rectas de ecuaciones $y=L-\varepsilon$ y $y=L-\varepsilon$, sin embargo, al disminuir el número ε, la franja se hace más angosta y la línea recta vertical $x=K$ se desplaza a la derecha, conservándose ya señalado. Este hecho se escribe formalmente:

Sea f una función definida en un intervalo no acotado I, diremos que f tiene límite en $+\infty$, si existe un número real L, lo que escribimos como $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=L$, si para el número real $\varepsilon>0$, existe un número real $K>0$ de manera que si $x\in dom(f)$ y $x>K$, entonces

$$|f(x)-L|<\varepsilon.$$

Análogamente, en el siguiente grupo de figuras observamos:



A partir de la línea recta vertical de ecuación $x = K$ $(K < 0)$ la curva asociada a la función f se encuentra contenida en la franja del plano cartesiano que determinan las líneas rectas de ecuaciones

$$y = L - \varepsilon \text{ y } y = L - \varepsilon,$$

al disminuir el número ε, la franja se hace más angosta y la línea recta vertical $x = K$ se desplaza a la izquierda. Este comportamiento se escribe formalmente:

"Sea f una función definida en un intervalo no acotado I, diremos que f tiene límite en $-\infty$, si existe el número real L, (lo que escribimos como

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = L,$$

si para el número real $\varepsilon > 0$, existe un número real $K < 0$ de manera que si $x \in dom(f)$ y $x < K$, entonces

$$|f(x) - L| < \varepsilon\text{"},$$

equivalente a

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = L$$

La ***propiedad 1.8*** presenta algunas de las consideraciones a seguir en la evaluación de límites al infinito.

PROPIEDAD 1.8

COMPORTAMIENTO DE x^r CUANDO $r > 0$.

Si $r > 0$ es un número racional y k un número real, entonces:

a. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{k}{x^r} = 0$ y $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{k}{x^r} = 0$.

b. Si x^r está definido, entonces $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{k}{x^r} = 0$.

La evaluación de los límites

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n}{b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_m x^m}, \text{ o bien } \lim_{x \to -\infty} \frac{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n}{b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_m x^m},$$

(donde n y m son números enteros) se realiza a partir de la ***propiedad 1.9***.

PROPIEDAD 1.9

DE LOS TÉRMINOS LÍDERES

a. Sea $f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$ con a_nx^n de término líder, entonces

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} a_nx^n.$$

b. Si f y g son funciones polinomiales con términos líderes a_nx^n y b_mx^m respectivamente, entonces $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{a_nx^n}{b_mx^m}$, así mismo, $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{a_nx^n}{b_mx^m}$.

Las ***propiedades 1.8** y **1.9*** fundamentan la "***estrategia 1.2***".

ESTRATEGIA 1.2

1. Verifica que f esté definida para asignaciones "extremadamente grandes" a x.

2. Selecciona los términos dominantes, del numerador y del denominador.

a. Si el término dominante del numerador es de menor potencia que el término dominante del denominador, entones el límite de la función es 0.

b. Si ambas términos dominantes tienen igual potencia, entonces el límite de la función es el cociente de los coeficientes de los términos dominantes.

c. Si la potencia del término dominante del numerador es mayor que la potencia del término dominante del denominador, entones el límite de la función no existe (recuerda que esto se representa por $+\infty$ o $-\infty$).

SECCIÓN 1.2 BLOQUE 2 EJEMPLOS 1

1. En $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{6}{x^{3.5}}$, $r=3.5>0$, entonces $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{6}{x^{3.5}}=0$.

2. Si $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-\dfrac{12}{x^5}\right)$, entonces $r=5>0$ y $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-\dfrac{12}{x^5}\right)=0$.

3. Si $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt[5]{x}}$, entonces $r=\dfrac{1}{5}>0$ y $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt[5]{x}}=0$.

4. En $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{8}{\sqrt[5]{x}}=0$, $x<0$, también $r=\dfrac{1}{5}$, por tanto, $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{8}{\sqrt[5]{x}}=0$.

5. Si $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\dfrac{-12}{x^6}\right)$, entonces $r=6>0$, por tanto, $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\dfrac{-12}{x^6}\right)=0$.

6. Para evaluar $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{7x^2+2x-4}{3x^2-9}$ nota que los términos dominantes son $7x^2$ y $3x^2$, por tanto

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{7x^2+2x-4}{3x^2-9}=\lim_{x\to +\infty}\frac{7x^2}{3x^2}=\lim_{x\to +\infty}\frac{7}{3}=\frac{7}{3}.$$

7. Para $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{8x-5}{3x^2+x+1}$, los términos dominantes son $8x$ y $3x^2$, entonces

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{8x-5}{3x^2+x+1}=\lim_{x\to +\infty}\frac{8x}{3x^2}=\lim_{x\to +\infty}\frac{8}{3x}=0.$$

8. En $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{6x^4+2}{2x-7}$, los términos dominantes son $6x^4$ y $2x$, entonces

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{6x^4+2}{2x-7}=\lim_{x\to +\infty}\frac{6x^4}{2x}=\frac{6}{2}\lim_{x\to +\infty}x^3=+\infty.$$

9. En la evaluación de $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{(2x-1)^3(x+2)^2(2x-6)}{x^3(3x+2)^3}$, primero se desarrollan los productos y luego utilizamos los términos dominantes,

$$\lim_{x\to -\infty}\frac{(2x-1)^3(x+2)^2(2x-6)}{x^3(3x+2)^3}=\lim_{x\to -\infty}\frac{(2x)^3(x)^2(2x)}{x^3(3x)^3}=\lim_{x\to -\infty}\frac{16x^6}{27x^6}=\frac{16}{27}.$$

10. En $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{9}}}}{4-\sqrt{x}}$, los términos dominantes son $\sqrt{x}$ y $-\sqrt{x}$,

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{9}}}}{4-\sqrt{x}}=-1.$$

11. Si $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{8}}}}{3-\sqrt{x}}$, observa que $\sqrt{x}$ no está definida si $x<0$, entonces

$$\lim_{x\to -\infty}\frac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{8}}}}{3-\sqrt{x}}\ \text{no existe.}$$

SECCIÓN 1.2 BLOQUE 2 EJERCICIOS 1	Nombre Fecha

1. $\displaystyle \lim_{x \to +\infty} \frac{5x^3 + 2x^2}{2x+3}.$

2. $\displaystyle \lim_{x \to +\infty} \frac{4x^2 + 2x^2}{2x^2 + x - 1}.$

3. $\displaystyle \lim_{x \to +\infty} \frac{-5x^3 + 2x^2 - 4}{2x+3}.$

4. $\displaystyle \lim_{x \to -\infty} \frac{2x^3 + 5x + 2}{6x^2 + x}.$

5. $\displaystyle \lim_{x \to +\infty} \frac{3x^6 + 3x^3 + 2}{9x^6 + 4x - 3}.$

6. $\displaystyle \lim_{x \to -\infty} \left(-8x^3 + 4x - 4x^6\right).$

7. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2 + x - 2}{x^2 + 4x - 6}$.

8. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt[3]{81x^3 - 4x + 6}}{x^2 - 3}$.

9. $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2x^3 + 5x + 2}{4x^3 + 6x^2 - 2}$.

10. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1 - 3x^5}{x^5 + 2x^2 + 4}$.

11. $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{(x-1)^4 (2x+3)^2}{x^4 (2x+1)^3}$.

12. $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{(3x+1)^2 (x-2)(x+1)}{x^3 (2x^2+1)^2}$.

13. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x(x+1)(3x+3)^2}{x(2x+x+1)^3}$.

14. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x(2x-1)(2x+1)(x+3)^2}{x(x^2+x+1)^3}$.

15. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x(x^2-1)(x^2+1)(x+2)^2}{x(x^2+x+1)^3}$.

16. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{4x+\sqrt{x+\sqrt{9}}}}{4-\sqrt{9x}}$.

17. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2+9}}{\sqrt[4]{x^3+x}-x}$.

18. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x^3+3x}+\sqrt[4]{x^3}}{\sqrt[3]{x^2+3}+\sqrt[5]{x}}$.

Si $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ y $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$, entonces $\lim\limits_{x\to x_0}\left[f(x)\cdot g(x)\right] = +\infty\cdot 0$, pero el "producto" $+\infty\cdot 0$, sin embargo, por medio de un procesos algebraicos podemos rescribirlas en la forma "$\dfrac{0}{0}$ y $\dfrac{+\infty}{+\infty}$" por lo que puede ser posible evaluar el límite correspondiente.

SECCIÓN 1.2 BLOQUE 2 EJEMPLOS 2

1. $$\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x^2}{x+2}-\frac{x^3}{x+3}\right] = \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x^3+3x^2-x^4-2x^3}{(x+2)(x+3)}\right]$$
$$= \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{-x^4-x^3+3x^2}{x^2+5x+6}\right] = \lim_{x\to+\infty} -\frac{x^4}{x^2} = -\infty.$$

2. $\lim\limits_{x\to3}\left[\dfrac{1}{x-3}+\dfrac{5}{(x+3)(3-x)}\right] = \lim\limits_{x\to3}\left(\dfrac{1}{x-3}\right)\left(\dfrac{x-3}{x+2}\right) = \lim\limits_{x\to3}\dfrac{1}{x+2} = \dfrac{1}{5}.$

3. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{x^2-1}\right] = \lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{x}{x^2-1}\right] = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{x^2} = +\infty.$

4. $\lim\limits_{x\to3}\left[\dfrac{x-1}{x-3}-\dfrac{x+5}{x^2-4x+3}\right] = \lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^2-2x-1-(x+5)}{(x-3)(x-1)} = \lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^2-3x+4}{x^2-4x+3} = -\dfrac{4}{0}$, por tanto, no existe.

5.
$$\lim_{x\to+\infty}\left[(x+7)\frac{1}{\sqrt{4x^2+3}}-\right] = \lim_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{(x+7)^2}{4x^2+3}} = \lim_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{x^2+14x+49}{4x^2+3}} = \lim_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{x^2}{4x^2}} = \frac{1}{2}.$$

6. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+5}-1\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left(\sqrt{x+5}-1\right)\left(\sqrt{x+5}+1\right)}{\sqrt{x+5}+1} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+4}{\sqrt{x+5}+1} = +\infty.$

7. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+2}-x\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left(\sqrt{x^2+2}-x\right)\left(\sqrt{x^2+2}+x\right)}{\sqrt{x^2+2}+x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2}{\sqrt{x^2+2}+x} = 1.$

8. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-4x\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left(\sqrt{x^2+1}-4x\right)\left(\sqrt{x^2+1}+4x\right)}{\sqrt{x^2+1}+4x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2+1-16x^2}{\sqrt{x^2+1}+4x} = -\infty.$

SECCIÓN 1.2 BLOQUE 2 EJERCICIOS 2	Nombre Fecha

1. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{3}{1-x^2}\right)$.

2. $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\frac{x^3}{x^2+1}-x\right)$.

3. $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\frac{2x^3}{x^2+4}-2x\right)$.

4. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^3}{2x^2-1}-\dfrac{x^2}{2x+1}\right)$.

5. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^3+2}-\sqrt{x^3-2}\right)$.

6. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+1}-1\right)$.

7. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+2}-x\right)$.

8. $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2+1} - 4x \right)$.

9. $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{(x+1)(x+2)} - x \right)$.

10. $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2+x+1} - x \right)$.

11. $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2+2x+1} - x \right)$.

12. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{3x+1}-\sqrt{4x-1}\right)$.

13. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^3+4x}-\sqrt{x^3-4x}\right)$.

14. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x^2\right)$.

FIN DE SECCIÓN

1.3 EVALUACIÓN DIAGNÓSTICA

Sugerimos al lector responderla al inicio de la unidad o tema para medir su nivel de conocimientos

NÚMEROS REALES

1. ¿Qué números se utilizan para contar?

2. ¿Qué números se utilizan para medir?

3. ¿Cómo se define el conjunto de los números racionales?

4. La unión de los números racionales y los números irracionales constituyen el conjunto de los números.

5. La división de números reales no está definida cuando el denominador es el número.

6. ¿Qué números no tienen raíz "enésima par"?

7. ¿Qué significa (geométricamente) que el número x sea menor que el número y?

8. ¿Qué establece la ley de la tricotomía?

9. Si x y y son números reales tales que $x \cdot y = 0$, entonces podemos concluir:

10. Si x es un número real distinto de cero, entonces podemos concluir que x^2:

11. ¿Cómo se escribe $\sqrt[n]{x^m}$ es términos de una potencia fraccionaria?

12. Si $a < b$, ¿podemos concluir que $a^2 < b^2$? Explica.

VALOR: Un punto por pregunta (máximo 12 puntos)

POTENCIA ENTERA DE UN BINOMIO Y FACTORIZACIÓN

1. Enuncia la propiedad distributiva de los números reales.

2. Desarrolla $(a+b)^n$ si:

a. $n = 2$.

b. $n = 3$.

c. $n = 4$.

3. Factoriza $x^n - y^n$ suponiendo que:

a. $n = 2$.

b. $n = 3$.

c. $n = 4$.

d. $n = 5$.

4. Factoriza $x - y$ suponiendo que:

a. $\left(\sqrt{x} - \sqrt{y}\right)$ es uno de los factores.

b. $\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}$ es uno de los factores.

c. $\sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{y}$ es uno de los factores.

d. $\sqrt[5]{x}-\sqrt[5]{y}$ es uno de los factores.

VALOR: Un punto por pregunta o un punto por inciso (máximo 12 puntos)

FUNCIONES

1. ¿Qué partes constituyen a una función real de variable real?

2. ¿Cómo se define el dominio de una función real de variable real?

3. ¿Qué condiciones deben cumplir dos funciones para ser iguales?

4. ¿Qué es la imagen de un número bajo una función?

5. ¿El dominio de una suma de funciones tiene como dominio a?

6. ¿El dominio de una división de funciones tiene como dominio a?

7. ¿Cómo se define una función polinomial?

8. Proporciona dos ejemplos de familias de funciones polinomiales.

9. Proporciona dos características de las funciones senoidales.

10. Proporciona dos propiedades de una función exponencial.

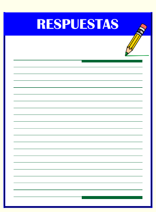
11. La función inversa asociada a la función exponencial natural es la función.

12. El dominio de la función logaritmo natural es:

VALOR: Un punto por pregunta (máximo 12 puntos)

ESCALA DE ACREDITACIÓN (SUFICIENTE Y NO SUFICIENTE)

SUFICIENTE: 21 O MÁS PUNTOS
NO SUFICIENTE: 21 O MENOS PUNTOS



RESPUESTAS A LAS PREGUNTAS DEL EXAMEN DIAGNÓSTICO

NÚMEROS REALES

1. Números naturales.
2. los números reales positivos.
3. El conjunto de números de la forma $\frac{p}{q}$, donde p y q son números enteros y $q \neq 0$.
4. Reales.
5. Cero.
6. Los números negativos.
7. En la recta numérica x ocupa una posición a la izquierda que la posición del número y.
8. Que dados dos números x e y reales se cumple una y sólo una de las afirmaciones

$$x = y\ ,\ x > y \text{ o } x < y\ .$$

9. $x = 0$ y $y \neq 0$, o bien $x \neq 0$, $y = 0$ o $x = y = 0$.

10. Es un número positivo.

11. $x^{\frac{m}{n}}$.

12. No se cumple para números negativos

POTENCIA ENTERA DE UN BINOMIO Y FACTORIZACIÓN

1. $c(a + b) = a \cdot c + b \cdot c$.

2.

a. $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

b. $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.

c. $(a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$.

3.

a. $x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$.

b. $x^3 - y^3 = (x - y)\left(x^2 + xy + y^2 \right)$.

c. $x^4 - y^4 = (x - y)\left(x^3 + x^2y + xy^2 + y^3 \right)$.

d. $x^5 - y^5 = (x - y)\left(x^4 + x^3y + x^2y^2 + xy^3 + y^4 \right)$.

4.

a. $x - y = \left(\sqrt{x} - \sqrt{y} \right)\left(\sqrt{x} + \sqrt{y} \right)$.

b. $x - y = \left(\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y} \right)\left(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x^2}\sqrt[3]{y^2} + \sqrt[3]{y^2} \right)$.

c. $x - y = \left(\sqrt[4]{x} - \sqrt[4]{y} \right)\left(\sqrt[4]{x^3} + \sqrt[4]{x^2}\sqrt[4]{y}\sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{y}\sqrt[4]{y^2} + \sqrt[4]{x^3} \right)$.

d. $(x - y) = \left(\sqrt[5]{x} - \sqrt[5]{y} \right)\left(\sqrt[5]{x^4} + \sqrt[5]{x^3}\sqrt[5]{y} + \sqrt[5]{x^2}\sqrt[5]{y^2} + \sqrt[5]{x}\sqrt[5]{y^3} + \sqrt[5]{y^4} \right)$.

FUNCIONES

1. Dominio recorrido y regla de correspondencia.

2. El conjunto de números x tales que $f (x)$ existe.

3. Tener el mismo dominio y la misma regla de correspondencia.

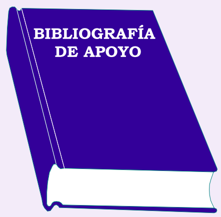
4. La imagen del número x_0 en el dominio de la función es el número $f (x_0)$.

5. La intersección de los dominios de las funciones.

6. La intersección de los dominios de las funciones menos los números x_0 (en el dominio de la función divisor) tales que $f (x_0) = 0$.

7. Aquella con regla de correspondencia $f (x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$, siendo n un número entero y $a_0 ,\ \ldots a_n$ números reales.

8. Lineales y cuadráticas.
9. Son periódicas y pueden tener una fase.
10. Su dominio son los números reales y su base es positiva.
11. Logaritmo natural.
12. El conjunto de los números reales positivos.



SI NO APROBASTE EL EXAMEN DIAGNÓSTICO LA REVISIÓN DE LOS SIGUIENTES DOCUMENTOS PUEDE AYUDARTE.

1. Purcell, E. (2007). Preliminares. *Cálculo diferencial e integral. Novena edición* (pp. 1-54). MÉXICO, Pearson Educación.
2. Stewart, J. (2012). Fundamentos. *Precálculo Matemáticas para el cálculo sexta edición.* (pp. 1-130). MÉXICO, CENGAGE LEARNING.

FIN DE SECCIÓN

1.4 EVALUACIÓN DE LA UNIDAD 1

PROCESOS INFINITOS Y LA NOCIÓN DE LÍMITE

CONCEPTOS

1. ¿Qué es un proceso?

2. ¿Cuándo se dice que un proceso es infinito?

3. ¿Cómo indicas que un proceso finito tiene límite?

4. ¿En qué condiciones converge una serie geométrica?

5. Si pretendemos que los "números x sean cada vez más próximos al número x_0", ¿qué debemos hacer con el número δ en $\left(x_0 - \delta\, , x_0 + \delta \right)$?

6. ¿Qué condición debe cumplir el número δ para que en el intervalo de números reales $\left(x_0 - \delta\, , x_0 + \delta \right)$ los "números x nunca sean iguales al número x_0"?

7. ¿Qué debemos hacer con el número ε en el intervalo de números reales $\left(L - \varepsilon\, , L + \varepsilon \right)$, si pretendemos que los "números $f\left(x \right)$ sean cada vez más próximos al número L"?

8. Enuncia la propiedad de unicidad de los límites.

9. Enuncia la propiedad de homogeneidad de los límites.

DESARROLLOS OPERATIVOS

1. Evalúa los límites.

a. $\displaystyle \lim_{x \to 9} \frac{\sqrt{x} - 3}{x - 9}$.

b. $\displaystyle \lim_{x \to 2} \frac{x^4 - 16}{x - 2}$.

c. $\displaystyle \lim_{x \to +\infty} \frac{2x^4 - 3x^2 - 5x + 2}{7x^4 - 2x + 3}$.

d. $\underset{x\to +\infty}{lím} \dfrac{-3x^2+2x+1}{4x^3-2x+1}$.

PARA PENSAR

1.

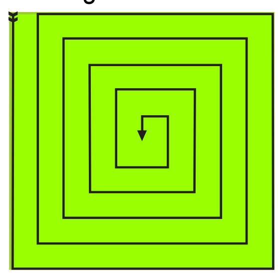
a. Expresa el número decimal periódico $0.\overline{13}$ como un proceso de “suma infinita”.

b. Determina el total del proceso de “suma infinita” del inciso anterior.

c. Clasifica el proceso de “suma infinita” en términos de su finitud.

2. En el proceso de suma infinita $T=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots$, determina el valor de T.

3. Se recorre un camino como lo muestra la figura.



Las trayectorias forman partes de cuadrados. El cuadrado externo tiene lados de longitud 50 metros. La distancia entre paredes consecutivas (verticales u horizontales) es 2 metros.

a. Construye un modelo que describa la longitud de la pared construida (una vuelta) en función del número de etapa.

b. ¿Cómo se clasifica el proceso “longitud de las paredes por etapa”?

4. Se deja caer una pelota desde una altura de 20 metros. En cada rebote la pelota pierde el 15% de su altura.

a. ¿Cuál es el modelo (función $d(n)$) que describe la distancia que recorre la pelota en función del número de rebote?

b. Supón que $d(n)$ representa la distancia recorrida por la pelota en el rebote n, ¿qué significa $\underset{n\to +\infty}{lím} d(n)$?, ¿tiene sentido la expresión anterior? Explica.

5. Considera el proceso:

Etapa 1: se elige una casilla de un tablero de ajedrez y se le coloca un peso.

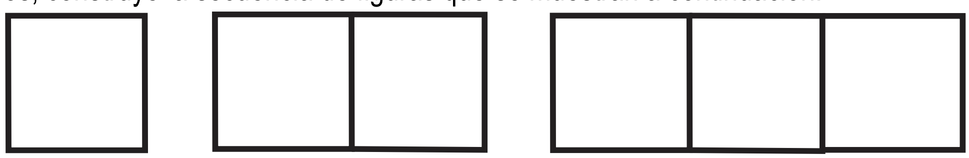
Etapa 2: se elige una segunda casilla del tablero de ajedrez (distinta a la de la etapa previa) y se le colocan dos pesos.

Etapa 3: se elige una tercera casilla del tablero de ajedrez (distinta a la de la etapa previa) y se le colocan cuatro pesos.
El proceso continúa hasta que han sido seleccionadas todas las casillas.
a. Determina el modelo que proporciona el número de pesos asignados a una casilla en la etapa n.

b. ¿Cuántos pesos son necesarios una vez que han sido seleccionadas todas las casillas?

c. Clasifica el proceso de acuerdo con la teoría desarrollada en la sección.

6. Sea el proceso infinito que consiste en:
Con palillos, construye la secuencia de figuras que se muestran a continuación:

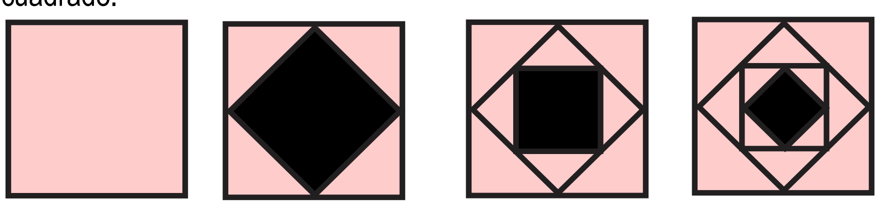


a. Si $P(n)$ representa el número de palillos en la etapa n, determina la relación que proporciona el número de palillos utilizados en la etapa n del proceso.

b. Si n crece indefinidamente, ¿qué ocurre con $P(n)$?

c. Clasifica el proceso de acuerdo con el último párrafo de la presente sección.

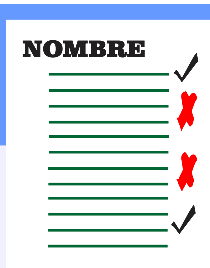
7. Sea una región cuadrada con longitud de lado uno**.** Considera el proceso:
Etapa 1. Utiliza segmentos de recta para unir los puntos medios de los lados de un cuadrado de lado 1, dando origen a otro cuadrado.
Etapa 2, Une los puntos medios de los lados del cuadrado obtenido en la etapa anterior para así generar otro cuadrado.
Etapa 3, Une los puntos medios de los lados del cuadrado obtenido en la etapa anterior para así generar otro cuadrado.



a. Construye modelos para $A(n)$ y $P(n)$, si representan respectivamente, el área y el perímetro del cuadrado obtenido en la etapa n.

b. ¿Qué ocurre con $A(n)$ y $P(n)$ si el número de etapa n se incrementa indefinidamente?

c. Clasifica los procesos de acuerdo al último párrafo de la presente sección.



RESPUESTAS A LA EVALUACIÓN DE LA UNIDAD 1

PROCESOS INFINITOS Y LA NOCIÓN DE LÍMITE

CONCEPTOS

1. Conjunto de etapas que conducen a un resultado.
2. Si se puede establecer una relación uno a uno con el conjunto de los números naturales.
3. $\displaystyle\lim_{n\to n_0} f(n)=L$.
4. Cuando la razón r tiene un valor mayor que cero y menor que uno ($0<r<1$).
5. Disminuir su valor.
6. Que sea positivo (mayor que cero).
7. Disminuir su valor.
8. Si $\displaystyle\lim_{x\to x_0} f(x)=L_1$ y $\displaystyle\lim_{x\to x_0} f(x)=L_2$, entonces $L_1=L_2$.
9. Si $c\in IR$ y $\displaystyle\lim_{x\to x_0} f(x)=L$, entonces $\displaystyle\lim_{x\to x_0} cf(x)=c\lim_{x\to x_0} cf(x)=c\cdot L$.

DESARROLLOS OPERATIVOS

1. a. $\frac{1}{6}$. **b.** 24 .**c.** $\frac{2}{7}$. **d.** 0.

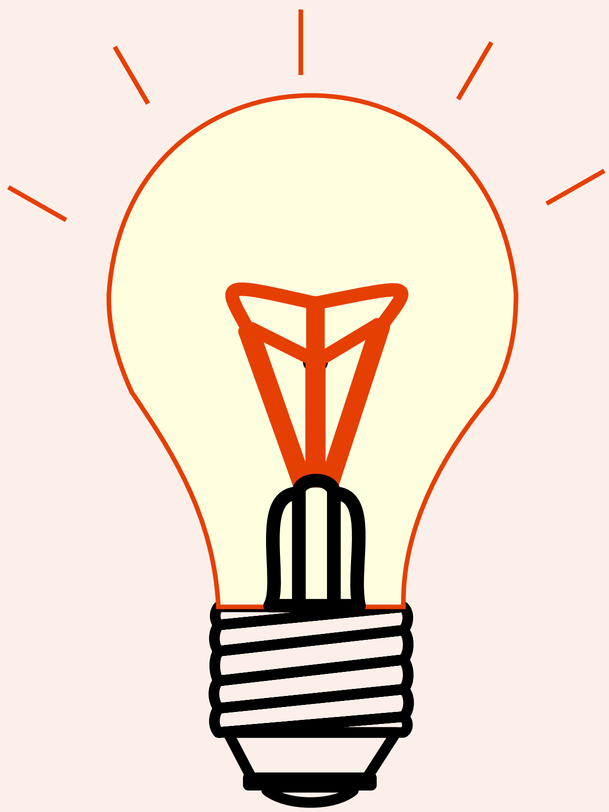
PARA PENSAR

1. a. $0.\overline{13}=\frac{13}{100}+\frac{13}{10000}+\frac{13}{1000000}+\cdots$ **b.** $\frac{13}{99}$. **c.** Proceso infinito con suma finita.
2. $T=1$.
3. a. $L(n)=-8n+206$, $1\le n\le 25$. **b.** Proceso finito con resultado finito.
4. a. $d(n)=20(0.85)^n$. **b.** $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} d(n)=\lim_{n\to+\infty} 20(0.85)^n=0$. La pelota se detiene.
5. a. $p(n)=2^n$. **b.** $2^1+\cdots+2^{64}$. **c.** Proceso finito con total finito.
6. a. $P(n)=3n+1$. **b.** $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} p(n)=+\infty$. **c.** Proceso infinito con resultado infinito.
7. a. $A(n)=\left(\frac{1}{2}\right)^n$, $P(n)=4\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right)^n$. **b.** $A(n)\to 0$ y $P(n)\to 0$. **c.** Procesos infinitos con resultado finito.

FIN DE SECCIÓN

SOLUCIONES DE EJERCICIOS Y ACTIVIDADES

1.5 PROCESOS INFINITOS Y LA NOCIÓN DE LÍMITE



SECCIÓN 1.1

BLOQUE 1

SECCIÓN 1.1
SECUENCIA DIDÁCTICA 1
POTENCIA DEL NÚMERO
r (positivo y distinto de 1)

1.

n	$f(n)=(0.1)^n$	$f(n)=(0.2)^n$	$f(n)=(0.5)^n$	$f(n)=(0.9)^n$
1	0.1	0.2	0.5	0.9
3	0.001	0.008	0.125	0.729
5	0.00001	0.00032	0.03125	0.59049
10	0.0000000001	0.0000000102	0.00097625	0.3486794401
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
	0	0	0	0

2. Conforme n se incrementa $f(n)$ se aproxima a cero.

3. $\lim\limits_{x\to+\infty}(0.1)^n=0$, $\lim\limits_{x\to+\infty}(0.2)^n=0$, $\lim\limits_{x\to+\infty}(0.5)^n=0$ y $\lim\limits_{x\to+\infty}(0.9)^n=0$.

4.

n	$f(n)=(2)^n$	$f(n)=(4)^n$	$f(n)=(10)^n$	$f(n)=(20)^n$
1	2	4	10	20
3	8	64	1000	8000
5	32	1024	100000	3200000
10	1024	1048576	1000000000 0	1024000000 0000
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$

5. Si n se incrementa $f(n)$ se crece o aumenta.

6. $\lim\limits_{x\to+\infty}(2)^n=+\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty}(4)^n=+\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty}(10)^n=+\infty$ y $\lim\limits_{x\to+\infty}(20)^n=+\infty$.

CIERRE

7. Si $0\le r<1$ entonces $\lim\limits_{x\to+\infty} r^n=0$.

Si $r>1$ entonces $\lim\limits_{x\to+\infty} r^n=+\infty$.

Fin de actividad

SECCIÓN 1.1
SECUENCIA DIDÁCTICA 2
TOTAL DE UNA SUMA GEOMÉTRICA

INICIO
1. $a+ar+ar^2+ar^3+\cdots+ar^{n-1}$ con $r>0$, $r\neq 1$ y $a\neq 0$.

DESARROLLO
2. $rS=ra+ar^2+ar^3+\cdots+ar^n$

3.
$$\begin{aligned} S-rS &= a+ar+ar^2+ar^3+\cdots+ar^{n-1}-\left(ar+ar^2+ar^3+\cdots+ar^n\right) \\ &= a+ar+ar^2+ar^3+\cdots+ar^{n-1}-ar-ar^2-ar^3-\cdots-ar^n \end{aligned}$$

4. $S-rS=a-ar^n$

5. $S=a\dfrac{1-r^n}{1-r}$.

6. $S=a+ar+ar^2+ar^3+\cdots+ar^{n-1}=a\dfrac{1-r^n}{1-r}$.

7. $S=a+ar+ar^2+ar^3+\cdots=a\dfrac{1}{1-r}$.

CIERRE
8. a. Si n es un número entero positivo, entonces $a+ar+ar^2+ar^3+\cdots+ar^{n-1}=a\dfrac{1-r^n}{1-r}$.

b. Si $n\to+\infty$, entonces $a+ar+ar^2+ar^3+\cdots=a\dfrac{1}{1-r}$.

Fin de actividad

SECCIÓN 1.1 BLOQUE 1 EJERCICIOS 1

a. 1. $0.\bar{9}=\dfrac{9}{10}+\dfrac{9}{100}+\dfrac{9}{1000}+\dfrac{9}{10000}+\cdots$.

2. $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\dfrac{1}{10}$, $a=\dfrac{9}{10}$ y $r=\dfrac{1}{10}$.

3. $0.\bar{9}=1$ proceso infinito con resultado finito.

b. 1. $A(n)=1-\dfrac{1}{2^n}$. **2.** $\lim\limits_{n\to 6}\left(1-\dfrac{1}{2^n}\right)=\dfrac{63}{64}$, proceso finito con resultado finito.

3. $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1-\dfrac{1}{2^n}\right)=1$, proceso infinito con resultado finito.

c. 1. $N(n)=2^{n+1}$. **2.** $\lim\limits_{n\to 10}\left(2^{10}\right)=1024$, proceso finito con resultado finito.

3. $\lim\limits_{n\to+\infty}2^{n+1}=+\infty$, proceso infinito con resultado infinito.

d. 1. $L(n)=\left(\frac{2}{3}\right)^n$. **2.** $\lim\limits_{n\to 5}\left(\frac{2}{3}\right)^n=\frac{32}{243}$, proceso finito con resultado finito.

3. $\lim\limits_{n\to +\infty} 2^{n+1}=0$, proceso infinito con resultado finito.

e. 1.

ETAPA n	SEGMENTOS RECTILÍNEOS $S(n)$	LONGITUD TOTAL DE LOS SEGMENTOS RECTILÍNEOS $H(n)$	LONGITUD ELIMINADA $L(n)$
1	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$
2	4	$\frac{4}{9}$	$\frac{5}{9}$
3	8	$\frac{8}{27}$	$\frac{19}{27}$
4	16	$\frac{16}{81}$	$\frac{65}{81}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n	2^n	$\left(\frac{2}{3}\right)^n$	$1-\left(\frac{2}{3}\right)^n$

2. $\lim\limits_{n\to +\infty} S(n)=+\infty$, proceso infinito con resultado infinito.

3. $\lim\limits_{n\to +\infty} H(n)=0$, proceso infinito con resultado finito.

4. $\lim\limits_{n\to +\infty} L(n)=0$, proceso infinito con resultado finito.

f. 1.

ETAPA n	PERÍMETRO $p(n)$	ÁREA $A(n)$
1	$1+\sqrt{2}$	$\frac{1}{4}$
2	$1+\sqrt{2}$	$\frac{1}{8}$
3	$1+\sqrt{2}$	$\frac{1}{16}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n	$1+\sqrt{2}$	$\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$

2. $\lim\limits_{n\to +\infty} p(n)=1+\sqrt{2}$, proceso infinito con resultado finito.

3. $\underset{n\to+\infty}{lím} A(n)=0$, proceso infinito con resultado finito.

g.
1.

ETAPA n	TRIÁNGULOS SOMBRADOS AGREGADOS $N(n)$	ÁREA TOTAL SIN SOMBREAR $A(n)$	ÁREA TOTAL SOMBREADA $S(n)$
1	1	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$
2	3	$\frac{9}{16}$	$\frac{7}{16}$
3	9	$\frac{27}{64}$	$\frac{37}{64}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n	3^{n-1}	$\left(\frac{3}{4}\right)^n$	$1-\left(\frac{3}{4}\right)^n$

2. $\underset{n\to+\infty}{lím} N(n)=+\infty$, proceso infinito con resultado infinito.

3. $\underset{n\to+\infty}{lím} A(n)=0$, proceso infinito con resultado finito.

4. $\underset{n\to+\infty}{lím} S(n)=0$, proceso infinito con resultado finito.

SECCIÓN 2.1

SECCIÓN 1.2 BLOQUE 1 EJERCICIOS 1

1. 7. **2.** 40. **3.** 1. **4.** 14. **5.** -6. **6.** $-\frac{7}{10}$. **7.** 1. 8. 2. **9.** 2. **10.** $\frac{1}{2}$.

SECCIÓN 1.2 BLOQUE 1 EJERCICIOS 2

1. Propiedad ***c.*** Propiedad ***b.*** Propiedad ***b.*** Evaluación 13.
2. Propiedad ***b.*** Propiedad ***a.*** Evaluación 8.
3. Propiedad ***d.*** Propiedad ***b.*** Propiedad ***a.*** Evaluación 0.
4. Propiedad ***d.*** Propiedad ***b.*** Propiedad ***a.*** Evaluación no existe.
5. Propiedad ***b.*** Propiedad ***d.*** Propiedad ***b.*** Propiedad ***a.*** Evaluación $\frac{12}{5}$.

SECCIÓN 1.2 BLOQUE 1 EJERCICIOS 3

1. $\frac{1}{2}$. **2.** No existe.. **3.** 9. **4.** 0. **5.** No existe. **6.** No existe. **7.** No existe. **8.** No existe. **9.** No existe. **10.** No existe. **11.** $-\frac{1}{8}$. **12.** $\frac{2}{3}$. **13.** 3. **14.** 0. **15.** -1. **16.** $-\frac{50}{7}$. **17.** 5. **18.** -5. **19.** 3. **20.** 28. **21.** $\frac{17}{8}$. **22.** 9. **23.** 7. **24.** $\frac{6}{7}$. **25.** $\frac{3}{5}$. **26.** $\frac{11}{24}$. **27.** $\frac{3}{2}$. **28.** 6. **29.** 48. **30.** $\frac{15}{7}$. **31.** 6. **32.** 32. **33.** $-\frac{1}{2}$. **34.** $\frac{1}{3}$. **35.** $\frac{1}{12}$. **36.** $\frac{1}{4\sqrt{5}}$. **37.** $-\frac{2}{3}$. **38.** $\frac{1}{12}$. **39.** $\frac{1}{27}$. **40.** 12. **41.** $\frac{1}{4}$. **42.** $\frac{1}{12}$.

BLOQUE 2

SECCIÓN 1.2 BLOQUE 2 EJERCICIOS 1

1. $+\infty$. **2.** $+\infty$. **3.** $-\infty$. **4.** $-\infty$. **5.** $\frac{1}{2}$. **6.** $-\infty$. **7.** 1. **8.** 0. **9.** $\frac{1}{2}$. **10.** -3. **11.** $\frac{1}{2}$. **12.** 0. **13.** $\frac{9}{8}$. **14.** 0. **15.** 1. **16.** $\frac{4}{9}$. **17.** 0. **18.** $+\infty$.

SECCIÓN 1.2 BLOQUE 2 EJERCICIOS 2

1. 0. **2.** 0. **3.** 0. **4.** $\frac{1}{4}$. **5.** 0. **6.** $+\infty$. **7.** 0. **8.** $-\infty$. **9.** $\frac{3}{2}$. **10.** $\frac{1}{2}$. **11.** 1. **12.** $+\infty$. **13.** 0. **14.** $-\infty$.

FIN DE SECCIÓN

2

EL CONCEPTO DE DERIVADA, VARIACIÓN Y RAZÓN DE CAMBIO

Al finalizar la unidad:
el alumno interpretará el concepto de derivada a partir del análisis de la variación y de la razón de cambio, al resolver problemas en diferentes contextos cuyos modelos sean funciones polinomiales.

CONTENIDO

UNIDAD 2

PRESENTACIÓN

La Unidad 2. “EL CONCEPTO DE DERIVADA, VARIACIÓN Y RAZÓN DE CAMBIO” atiende el propósito:

Al finalizar la unidad, el alumno interpretará el concepto de derivada a partir del análisis de la variación y de la razón de cambio, al resolver problemas en diferentes contextos cuyos modelos sean funciones polinomiales.

Los aprendizajes y la temática propuestos se encuentran clasificados en dos secciones de títulos:

2.1 Cambio y razón de cambio promedio, que incluye:

1. Dos bloques.

2. Tres secuencias didácticas.

3. Cinco bloques de ejemplos resueltos.

Dos bloques de ejercicios propuestos.

2.2. Cambio instantáneo, concepto de derivada, incluyendo:

1. Dos bloques.

2. Una secuencia didáctica.

3. Cuatro bloques de ejemplos resueltos.

4. Cuatro bloques de ejercicios propuestos.

Ambas secciones se desarrollan en bloques y cada uno de ellos contiene:

1. Título

2. La estrategia de aprendizaje para su desarrollo.

3. Breve introducción sobre la importancia de la temática.

4. Los elementos teóricos básicos de los contenidos temáticos y aprendizajes que señala el programa de estudios.

5. Definiciones básicas (y formales) de los conceptos relevantes.

6. Secciones de ejemplos cuidadosamente seleccionados y resueltos con todo detalle.

7. Secuencias didácticas con:

i. Los tiempos didácticos pertinentes (inicio, desarrollo y cierre), que guían al lector en la construcción y/o formalización de propiedades (puede ser un aspecto teórico o metodológico).

8. Propiedades (teoremas inherentes a la temática de la disciplina).

9. Secciones de ejercicios propuestos.

También incluye:

La sección de evaluación diagnóstica, con:

i. Un examen de evaluación diagnóstica (que el estudiante debe responder), con la correspondiente escala de acreditación.

ii. Las respuestas a las preguntas del examen diagnóstico y una bibliografía de apoyo a aquellos alumnos que no lograron aprobar el examen.

La sección de evaluación de la unidad, con:

i. El examen de evaluación de la unidad (en la taxonomía de: conceptos, desarrollos operativos y problemas que requieren un mayor grado de razonamiento).

ii. Las respuestas a la evaluación propuesta.

La sección de soluciones, con:

i. Las soluciones de las secuencias didácticas propuestas.

ii. Las soluciones de los ejercicios propuestos.

SECCIÓN 2.1 CAMBIO Y RAZÓN DE CAMBIO PROMEDIO

APRENDIZAJES

1. Reconoce en diversos contextos la variación y la razón de cambio en funciones lineales. Explica el significado de la razón de cambio y verifica que es una constante, a través de procesar la información de las situaciones planteadas.

2. Reconoce en diversos contextos la variación y la razón de cambio de las funciones cuadráticas en un intervalo dado, a través de procesar la información de las situaciones planteadas.

3. Reconoce en diversos contextos la variación y la razón de cambio de las funciones cúbicas en un intervalo dado, a través de procesar la información de las situaciones planteadas.

TEMÁTICA

En diferentes contextos, variación y razón de cambio promedio e instantánea en:

1. Funciones polinomiales de grado no mayor a tres.

BLOQUE 1

VARIACIÓN Y RAZÓN DE CAMBIO EN FUNCIONES POLINOMIALES DE HASTA GRADO TRES

Por medio de preguntas específicas se guía al alumno para que establezca la razón de cambio promedio y la razón de cambio en situaciones que conducen a modelos de comportamiento descritos por funciones polinomiales de hasta grado tres.

Las funciones son los “modelos matemáticos” básicos en la descripción de situaciones o problemas con características variables. El concepto de función ha alcanzado tal importancia, que incluso muchas ramas de la matemática se caracterizan por el tipo de funciones que estudian, en la presente unidad los conceptos que desarrollaremos estarán vinculados con funciones constituidas por dos variables.

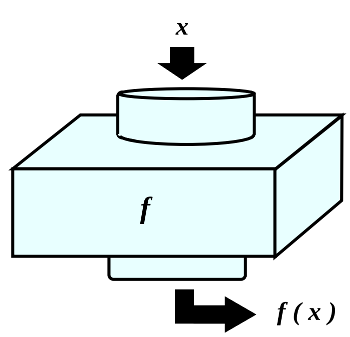
DEFINICIÓN 2.1

FUNCIÓN

a. Una función real de variable real es la relación f existente entre las variables X y Y de manera que cada asignación numérica hecha a la variable X asocia un número real a la variable Y.

b. El conjunto de todos los números asignados a la primera variable (en los que el modelo tiene sentido) se denomina dominio de la función; la variable recibe el nombre de “variable independiente”. La forma o criterio con los que son transformados se denomina regla de correspondencia (o variable dependiente).

c. El conjunto de todos los números transformados es el recorrido (conjunto imagen o rango) de la función.



A partir del modelo que describe el comportamiento de una situación, sigue determinar sus características, tales como: la forma en que cambia, cuál es valor más pequeño que asume (mínimo), cuál es su valor más grande (máximo), como aumenta (crece) o como disminuye (decrece) etcétera. Ahora presentaremos los elementos de la descripción que destacan en el análisis del cambio de una función.

DEFINICIÓN 2.2

CAMBIO EN UNA FUNCIÓN

Sea: la función $f : I \to IR$, x_1 y $x_2 \in I$, entonces:

a. El número $\Delta x = x_2 - x_1$ es el cambio (incremento) de la variable x en el intervalo

$$[\ x_1\ ,\ x_2\ ].$$

b. Si $f\ (\ x_1\ )$ y $f\ (\ x_2\ )$ son las imágenes de x_1 y x_2 respectivamente, el cambio o incremento de la función f es $\Delta f = f\ (\ x_2\ ) - f\ (\ x_1\ )$.

Ciertos modelos de situaciones reales de diversas ramas del conocimiento son funciones que relacionan una variable independiente x con una variable dependiente $y = f\ (\ x\ )$, si la variable independiente cambia de un valor inicial x_1 a otro valor x_2 y la otra variable lo hace desde $y_1 = f\ (\ x_1\ )$ hasta $y_2 = f\ (\ x_2\ )$, la razón de cambio promedio de $y = f\ (\ x\ )$ con respecto al cambio en la variable x sobre el intervalo $[\ x_1\ ,\ x_2\ ]$ es

$$\frac{f\ (\ x_2\ ) - f\ (\ x_1\ )}{x_2 - x_1}, \text{ siempre que } x_2 \neq x_1 .$$

DEFINICIÓN 2.3

RAZÓN DE CAMBIO PROMEDIO COMO NÚMERO Y COMO FUNCIÓN

Sea: la función $f : I \to IR$, x_1 y $x_2 \in I$, entonces:

a. Si $\Delta x = x_2 - x_1$ ($x_2 \neq x_1$) el cambio de x y $\Delta f = f\ (\ x_2\ ) - f\ (\ x_1\ )$ es el cambio correspondiente en f, entonces el número

$$\overline{f}\ (\ x_2\ ) = \frac{f\ (\ x_2\ ) - f\ (\ x_1\ )}{x_2 - x_1} \quad \text{(siempre que } x_2 \neq x_1\text{),}$$

es la razón de cambio promedio de f sobre el intervalo $[\ x_1\ ,\ x_2\ ]$.

b. Sean $\Delta x = x - x_1$ un cambio (o incremento) en la variable x y $\Delta y = f\ (\ x\ ) - f\ (\ x_1\ )$ el cambio correspondiente en la función f, entonces la función

$$\overline{f}\ (\ x\ ) = \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f\ (\ x\ ) - f\ (\ x_1\ )}{x - x_1} \quad \text{(siempre que } x \neq x_1\text{),}$$

es la función razón de cambio promedio asociada a f sobre $[\ x_1\ ,\ x\ ]$.

SECCIÓN 2.1
BLOQUE 1
EJEMPLOS 1

EJEMPLO (USO DE LA DEFINICIÓN 2.3)

1. Sea la función con regla de correspondencia $f(x)=5x-4$.

a. Si x cambia de 4 a 12, entonces $\Delta x=12-4=8$.

b. Puesto que

$$f(4)=5(4)-4=16 \text{ y } f(12)=5(12)-4=56,$$

entonces

$$\Delta f=56-16=40.$$

c. La razón de cambio promedio de $f(x)=5x-4$ sobre $[4,12]$ es

$$.\ \bar{f}(12)=\frac{40}{8}=5.$$

d. En $[4,x]$ tenemos:

$$f(4)=5(4)-4=16 \text{ y } f(x)=5x-4,$$

entonces

$$\bar{f}(x)=\frac{5x-4-16}{x-4}=\frac{5x-20}{x-4}=\frac{5(x-4)}{x-4}=5.$$

2. Sea la función con regla de correspondencia $f(x)=x^2+1$.

a. Si x cambia de 1 a 3, entonces

$$\Delta x=3-1=2.$$

b. Puesto que

$$f(1)=(1)^2+1=2 \text{ y } f(3)=(3)^2+1=10,$$

entonces

$$\Delta f=10-2=8.$$

c. La razón de cambio promedio de la función $f(x)=x^2+1$ sobre el intervalo $[1,3]$ es

$$\bar{f}(3)=\frac{8}{2}=4.$$

d. Sobre el intervalo $[1,x]$ tenemos $f(1)=(1)^2+1=2$ y $f(x)=x^2+1$, entonces

$$\bar{f}(x)=\frac{x^2+1-2}{x-1}=\frac{x^2-1}{x-1}=\frac{(x-1)(x+1)}{x-1}=x+1.$$

SECCIÓN 2.1 BLOQUE 1 EJERCICIOS 1	Nombre Fecha

Aplica la ***definición 2.3*** y obtén la función "razón de cambio promedio" en el intervalo solicitado.

1. $f(x) = 3x$, sobre el intervalo $[1\ ,\ x]$.

2. $f(x) = 5x - 2$, sobre el intervalo $[-2\ ,\ x]$.

3. $f(x) = 2x^2 + 3x + 7$ sobre el intervalo $\left[\frac{2}{3}\ ,\ x\right]$.

4. $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 - 3x + 2$ sobre el intervalo $[0\ ,\ x]$.

5. $f(x) = x^3 - 2x^2 + x - 1$ en el intervalo $[-4\ ,\ x]$.

6. $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 - x^2 + 5$ sobre el intervalo $[1\ ,\ x]$.

SECCIÓN 2.1

SECUENCIA DIDÁCTICA 1

RAZÓN DE CAMBIO DE UNA FUNCIÓN LINEAL

INICIO

1. ¿Cómo se define una función lineal?

DESARROLLO

2. Calcula el cambio de la variable independiente sobre el intervalo $[x_1 , x]$ del domino de la función lineal $f(x) = Ax + B$.

3. Calcula el cambio de la función lineal $f(x) = Ax + B$ sobre el intervalo $[x_1 , x]$, simplifica.

4. Calcula la razón de cambio promedio de la función lineal $f(x) = Ax + B$ sobre el intervalo $[x_1 , x]$, simplifica.

CIERRE

5. Concluye en términos de la función lineal y la razón de cambio promedio.

Fin de actividad

SECCIÓN 2.1
SECUENCIA DIDÁCTICA 2
RAZÓN DE CAMBIO DE UNA FUNCIÓN CUADRÁTICA

INICIO
1. ¿Cómo se define una función cuadrática?

DESARROLLO
2. Calcula el cambio de la variable dependiente sobre el intervalo $[x_1, x]$ del domino de la función cuadrática $f(x) = Ax^2 + Bx + C$.

3. Calcula el cambio de la función cuadrática $f(x) = Ax^2 + Bx + C$ sobre el intervalo $[x_1, x]$, simplifica y factoriza $(x - x_1)$.

4. Calcula la razón de cambio promedio de la función lineal $f(x) = Ax^2 + Bx + C$ sobre el intervalo $[x_1, x]$, simplifica.

CIERRE
5. Concluye en términos de la función cuadrática y la razón de cambio promedio.

Si entonces

Fin de actividad

SECCIÓN 2.1

SECUENCIA DIDÁCTICA 3

RAZÓN DE CAMBIO DE UNA FUNCIÓN CÚBICA

INICIO

1. ¿Cómo se define una función cúbica?

DESARROLLO

2. Calcula el cambio de la variable independiente, sobre el intervalo $[\,x_1\ ,\ x\,]$ del domino, de la función cuadrática $f(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$.

3. Calcula el cambio de la función cúbica $f(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$ sobre el intervalo $[\,x_1\ ,\ x\,]$, simplifica y factoriza $(x - x_1)$. Recuerda que $\left(x^3 - x_1^3\right) = (x - x_1)\left(x^2 + xx_1 + x_1^2\right)$.

4. Calcula la razón de cambio promedio de la función cúbica $f(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$ sobre el intervalo $[x_1, x]$, simplifica.

CIERRE

5. Concluye en términos de la función cúbica y la razón de cambio promedio.

Si , entonces .

Fin de actividad

PROPIEDAD 2.1

RAZÓN DE CAMBIO PROMEDIO DE UNA FUNCIÓN POLINOMIAL DE HASTA GRADO 3

Sobre el intervalo $[x_1 \ , \ x]$:

a. Sea $f(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$,

entonces

$$\overline{f}(x) = A\left(x^2 + x \cdot x_1 + x_1^2\right) + B(x + x_1) + C \text{, si } x \neq x_1 \ .$$

COROLARIO

b. Si $f(x) = Ax^2 + Bx + C$ y $x \neq x_1$, entonces

$$\overline{f}(x) = A(x + x_1) + B.$$

c. Si $f(x) = Ax + B$ y $x \neq x_1$, entonces

$$\overline{f}(x) = A.$$

SECCIÓN 2.1
BLOQUE 1
EJEMPLOS 2

En cada caso calcula la función razón de cambio promedio en el intervalo señalado.

1. Para $f(x) = -6$ sobre $[4 \ , \ x]$, entonces $A = 0$, $B = -6$ y $x_1 = 4$

$$\overline{f}(x) = A = 0.$$

2. Para $f(x) = 8x + 4$, sobre el intervalo $[-6 \ , \ x]$, luego $A = 8$, $B = 4$ y

$$\overline{f}(x) = A = 8.$$

3. Si $f(x) = -4x^2 + x + 5$ en $[0 \ , \ x]$, entonces $A = -4$, $B = 1$, $C = 5$ y $x_1 = 0$

$\overline{f}(x) = A(x + x_1) + B = -4(x + 0) + 1 = -4x + 1$, obre el intervalo $[0 \ , \ x]$.

4. Si $f(x) = \frac{1}{3}x^2 - 2x - \frac{1}{4}$ sobre $[1 \ , \ x]$, luego $A = \frac{1}{3}$, $B = -2$ y $C = -\frac{1}{4}$, por tanto,

$\overline{f}(x) = \frac{1}{3}\left(x^2 + x + 1\right) - 2(x + 1) - \frac{1}{4}$ sobre el intervalo $[1 \ , \ x]$.

5. $f(x) = -3x^3 - 5x - 2$ para $[1 \ , \ x]$, luego $A = -3$, $B = 0$, $C = -5$, $D = -2$ y $x_1 = 1$, por tanto,

$$\overline{f}(x) = -3\left(x^2 + xx_1 + x_1^2\right) + 0(x + 1) - 5 = -3\left(x^2 + x + 1\right) - 5.$$

SECCIÓN 2.1 BLOQUE 1 EJERCICIOS 2	Nombre Fecha

Utiliza la ***propiedad 2.1*** y obtén la función "razón de de cambio promedio" sobre el intervalo solicitado.

1. $f(x) = 45$ en $[1, x]$.

2. $f(x) = 8x - 3$ en $[-2, x]$.

3. $f(x) = -5x + 7$ en $\left[\frac{2}{3}, x\right]$.

4. $f(x) = -4x^2 - 6x + 2$ en $[0, x]$.

5. $f(x) = -\frac{3}{2}x^2 + 5x - 4$ en $[-1, x]$.

6. $f(x) = -3x^3 - 8$ en $[0, x]$.

7. $f(x) = -x^3 + 5x$ en $[2, x]$.

8. $f(x) = 4x^3 - 3x^2 + 6x + 5$ en $[1, x]$.

9. $f(x) = -2x^3 + \frac{1}{3}x^2 - 4x + 12$ en $[-2, x]$.

BLOQUE 2

VARIACIÓN Y RAZÓN DE CAMBIO EN DIVERSOS CONTEXTOS

Las funciones polinomiales de hasta grado tres suelen utilizarse como modelos de situaciones relacionadas con el estudio de las dimensiones de estructuras geométricas.

SECCIÓN 2.1
BLOQUE 2
EJEMPLOS 1

RAZÓN DE CAMBIO PROMEDIO EN FUNCIONES LINEALES

1. El perímetro de un cuadrado de lado de longitud x se modela por la función

$p(x)=4x$, sobre el intervalo $[0\ ,\ x]$,

por tanto, la razón de cambio promedio del perímetro respecto a la longitud de lado es la función

. $\bar{p}(x)=4$.

2. El perímetro de un círculo de radio de longitud r está descrito por la función

$p(r)=2\pi r$, siempre que $[0\ ,\ r]$,

entonces la razón de cambio del perímetro del círculo respecto a la longitud del radio es la función

. $\bar{p}(r)=2\pi$.

3. La longitud de las doce aristas de un cubo de lado de longitud x se describe por la función

$l(x)=12x$, siempre que $[0\ ,\ x]$,

luego

$\bar{l}(x)=12$.

es la función que describe la razón de cambio promedio de la suma de las longitudes de las aristas respecto a la longitud de una de ellas.

4. La relación de variación directa: si y varía directamente con x (equivalentemente, es directamente proporcional a x), si existe una constante m diferente de cero, tal que

$y=mx$,

en la notación de funciones se escribe

$f(x)=mx$, cuando $[0\ ,\ x]$,

entonces:

$\bar{l}(x)=12$,

describe la razón de cambio promedio de la variable f respecto a la variable x.

SECCIÓN 2.1
BLOQUE 2
EJEMPLOS 2

RAZÓN DE CAMBIO PROMEDIO EN FUNCIONES CUADRÁTICAS

1. El área de un cuadrado con lados de longitud x lo proporciona la función cuadrática $A(x)=x^2$, definida sobre el intervalo $[0\ ,\ x]$, entonces la función que modela la razón de cambio promedio del área del cuadrado respecto a la longitud de sus lados es

$$\overline{A}(x)=x \text{ sobre el intervalo } [0\ ,\ x].$$

2. El área de un círculo de radio de longitud r se modela por la función cuadrática $A(r)=\pi\, r^2$, definida sobre el intervalo $[0\ ,\ r]$, entonces la función

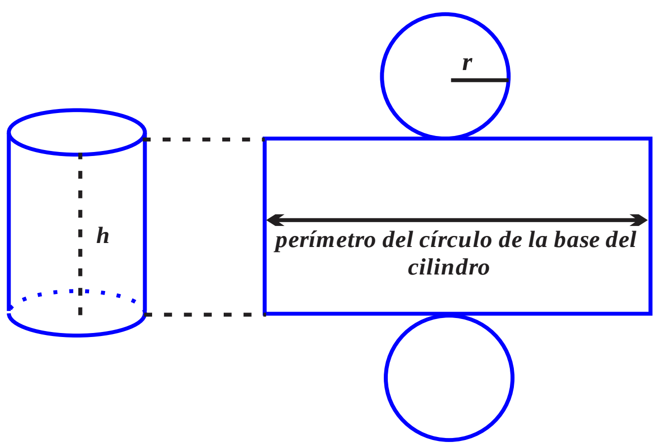
$$.\overline{A}(r)=\pi r\ ,$$

modela la razón de cambio promedio de su área respecto al cambio del radio sobre el intervalo $[0\ ,\ r]$.

3. El área de una superficie cilíndrica de altura fija de longitud h se modela por la función

$$A(r)=2\pi\, h r+2\pi\, h\ r^2 \text{, definida sobre el intervalo } [0\ ,\ r].$$

El primer sumando corresponde al área de la parte cilíndrica y el segundo al área de las superficies circulares.



Entonces, la función que modela la razón de cambio promedio del área del círculo respecto al cambio en el radio es la función

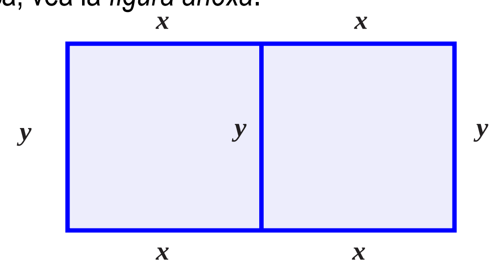
$$\overline{A}(r)=2\pi h r+2\pi h \text{, sobre el intervalo } [0\ ,\ r].$$

4. El área de una superficie esférica de radio de longitud r se calcula con la función $A(r)=4\pi\, r^2$ en $[0\ ,\ r]$. Por tanto, la función que modela la razón de cambio promedio del área de la esfera es respecto al cambio en el radio es la función

$$\overline{A}(x)=4\pi r \text{ , sobre el intervalo } [0\ ,\ r].$$

Otras situaciones que requieren de mayor ingenio en su planteamiento son:

5. Con $300\ metros$ de cerca se quieren limitar dos terrenos rectangulares iguales de manera que compartan un lado de la cerca, vea la *figura anexa*.



El área de la superficie a cercar es $A = 2xy$, la distribución de la cerca es $3y$ en las alturas y $4x$ en las bases, por tanto, $300 = 4x + 3y$, despejando y:

$$y = \frac{300 - 4x}{3},$$

entonces

$$A(x) = 2x\frac{300-4x}{3} = 200x - \frac{8}{3}x^2,$$ siempre que $0 \le x \le 75$.

La función $\overline{A}(x) = -\frac{8}{3}x + 200$ modela la razón de cambio promedio de la superficie a cercar sobre el intervalo $[0\ ,\ x]$, en particular cuando $0 \le x \le 75$.

6. Se desea aislar una región rectangular colocando una malla a su alrededor. La malla mide 250 metros y se utiliza toda. Construyamos el modelo que describe el comportamiento del área a cercar como función de la longitud de la base. Si x representa la longitud del largo e y la longitud del ancho, entonces el área de la región rectangular está dada por la expresión

$$A = x\,y,\quad ecuación\ (1).$$

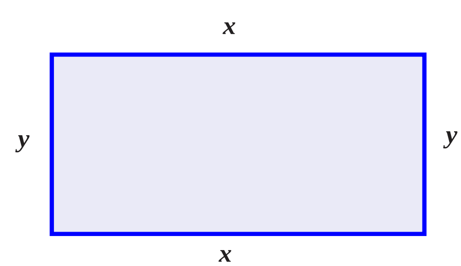
Puesto que la longitud total de la malla es 250 metros, entonces $2x + 2y = 250$, o bien

$$y = 125 - x,\quad ecuación\ (2).$$

Combinando las ecuaciones (1) y (2) obtenemos

$$A(x) = x(125 - x) = 125x - x^2,$$

siempre que $0 \le x \le 125$.



La función $\overline{A}(x) = -x^2 + 125$, tal que $0 \le x \le 125$ modela la razón de cambio promedio de la superficie a cercar.

SECCIÓN 2.1
BLOQUE 2
EJEMPLOS 3

RAZÓN DE CAMBIO PROMEDIO EN FUNCIONES CÚBICAS

Las siguientes situaciones pueden modelarse utilizando funciones polinomiales cúbicas.

1. El volumen de un cubo de lado de longitud x está descrito por la función cúbica

$$V(x) = x^3, \text{ siempre que } x \geq 0,$$

la función que describe su razón de cambio promedio sobre el intervalo

$$[0, x]$$

es

$$\overline{V}(x) = 1\left(x^2 + x \cdot 0 + 0^2\right) + 0(x + 0) + 0 = x^2.$$

2. La función que describe el comportamiento del volumen de un tanque cilíndrico (altura $h \geq 0$ conocida y constante) cuyos extremos están coronados por semiesferas es

$$V(r) = \pi h r^2 + \frac{4}{3}\pi r^3, \text{ siempre que } r \geq 0 \text{ y } h \geq 0.$$

El primer término corresponde al volumen de la parte cilíndrica y el segundo término es el volumen de los casquetes semiesféricos.

La función razón de cambio promedio que tiene asociada es

$$\overline{V}(r) = \frac{4}{3}\pi\left(r^2 + r \cdot 0 + 0^2\right) + 4h(r + 0) + 0 = \frac{4}{3}\pi r^2 + 4hr$$

sobre el intervalo

$$[0, r].$$

3. La función que representa el volumen de un recipiente cilíndrico de superficie total $80\ cm^2$ se construye como sigue:

De

$$A(x) = 2\pi r^2 + 2\pi r h = 80$$

(área de la superficie cilíndrica), entonces

$$h = \frac{40 - \pi r^2}{\pi r} \qquad \textit{ecuación } (1).$$

El volumen del recipiente cilíndrico es

$$V = \pi r^2 h \quad \textit{ecuación } (2),$$

donde r representa el radio y h su altura. La composición de las ecuaciones (1) y (2) es:

$$V(r) = \pi r^2 \frac{40 - \pi r^2}{\pi r} = 40r - \pi r^3, \text{ siempre que } r \geq 0.$$

Por tanto, la función razón de cambio promedio que tiene asociada es:

$$\overline{V}(r) = -\pi\left(r^2 + r \cdot 0 + 0^2\right) + 40(r + 0) + 0 = -\pi r^2 + 40r$$

definida en el intervalo

$$[0\ ,\ r].$$

4. Para construir una caja con una placa rectangular de 10 centímetros de ancho y 16 centímetros de largo. En cada esquina de la placa se recortan cuadrados de longitud de lado x y luego los bordes son doblados perpendicularmente hacia arriba, vea la *figura anexa*. ¿Cómo se comporta el volumen de la caja en términos la longitud de los cortes?

Si x representa la longitud del lado de uno de los cuadrados recortados, entonces:

$$16-2x$$

es la longitud de la base de la caja,

$$10-2x$$

representa el ancho de la base de la caja, x es la longitud de la altura de la caja.

Si

$$V\ (\ x\ )$$

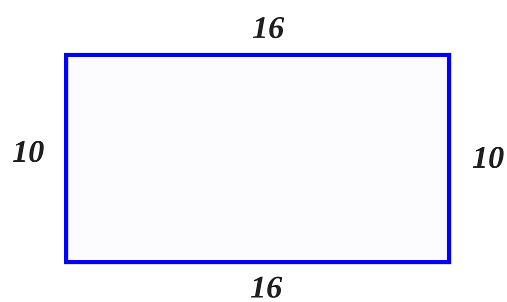
representa el volumen de la caja, entonces

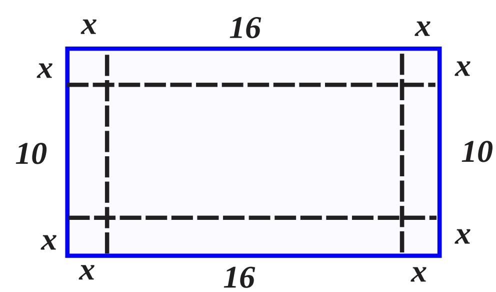
$$V\ (\ x\ )=(\ 16-2x\ )(\ 10-2x\ )(\ x\ ),$$

o bien

$$V\ (\ x\ )=160x-42x^2+4x^3.$$

Puesto que x representa una longitud, necesariamente $x \geq 0$, también $0 \leq x < 5$, en otro caso no existe caja.





La función razón de cambio promedio asociada es

$$\overline{V}\ (\ x\ )=4\left(\ x^2+x\cdot 0+0^2\ \right)-42(\ x+0\ )+160=4x^2-42x+160$$

sobre el intervalo

$$[0\ ,\ x].$$

SECCIÓN 2.1 BLOQUE 2 EJERCICIOS 1	Nombre
	Fecha

1. Una persona necesita 80 gramos diarios de cierta proteína. Si el alimento A tiene 30% de tal proteína y el alimento B tiene 25% de ella, suponiendo que x y y representan las cantidades en gramos de los alimentos A y B respectivamente construye el modelo que describe la cantidad de alimento B en términos del elemento A. ¿Cuál es la función "razón de cambio promedio" asociada?

2. Dos autos parten de la ciudad A con rumbo a la ciudad B, siguiendo la misma ruta. El primero de ellos se desplaza con una velocidad de 80 kilómetros por hora. El segundo de los autos parte una hora después con velocidad de 90 kilómetros por hora. Sean $x(t)$ y $y(t)$ las distancias recorridas por los autos. Construye los modelos que proporcionan la distancias $x(t)$ y $y(t)$ recorridas por cada auto transcurrido un tiempo t. ¿Cuáles son las funciones "razón de cambio promedio" asociadas?

3. En cierta población con 50000 habitantes se disemina un rumor. El rumor se esparce a causa de encuentros fortuitos entre las personas. La rapidez $r(x)$ a la que se disemina el rumor es directamente proporcional al producto del número de personas x que conocen el rumor por las personas que no lo conocen. Construya el modelo que describe tal fenómeno. ¿Cuál es la función "razón de cambio promedio" asociada? Considere el intervalo $[0, x]$.

4. Se va a cercar un campo rectangular que colinda con un edificio y se desea aprovechar la parte posterior de éste como uno de los lados del campo. El otro de los lados tiene longitud de x unidades y se tienen 200 metros de cerca. Construye el modelo que describe el área del terreno en función de su ancho x. ¿Cuál es la función "razón de cambio promedio" asociada en $[0, x]$?

5. Construye el modelo que exprese el área A de un círculo en función de su perímetro p. ¿Cuál es la función "razón de cambio promedio" asociada en $[0, p]$?

6. Construye el modelo que exprese el área A de un triángulo equilátero en función de la longitud x de uno de sus lados. ¿Cuál es la función "razón de cambio promedio" asociada en $[0, x]$?

7. Las dimensiones de un rectángulo son variables, pero su perímetro es constante y mide 4 unidades lineales. Si su base mide x unidades de longitud, determina el modelo que determina el área en función de la longitud de la base. ¿Cuál es la función "razón de cambio promedio" asociada en $[0\ ,\ x]$?

8. Una caja con base y tapa cuadradas tiene una superficie de área 12 unidades cuadradas. Construye el modelo que proporciona el volumen de la caja en función de la longitud de uno de sus lados. ¿Cuál es la función "razón de cambio promedio" asociada sobre el intervalo $[0\ ,\ x]$?

9. Una caja con bases cuadradas de lado x tiene área de 800 metros cuadrados. Construye el modelo que $y(x) = 240 - \frac{6}{5}x$ modela el volumen V de la caja como función de x. ¿Cuál es la función "razón de cambio promedio" asociada en el intervalo $[x_1, x]$?

10. Un terreno tiene forma de un rectángulo con dos semicírculos adosados a dos de sus lados opuestos. Si el perímetro del terreno mide 800 metros, construye el modelo que describe el área A del terreno en función de la longitud x de uno de los lados del rectángulo. ¿Cuál es la función "razón de cambio promedio" asociada en el intervalo $[x_1, x]$?

11. Una ventana tiene forma de rectángulo coronado con un triángulo equilátero. Si el perímetro de la ventana mide 30 unidades, construye el modelo que describe el área de la ventana en función de su ancho x. ¿Cuál es la función "razón de cambio promedio" asociada sobre $[0\ ,\ x]$?

FIN DE SECCIÓN

SECCIÓN 2.2 CAMBIO INSTANTÁNEO, CONCEPTO DE DERIVADA

APRENDIZAJES

4. Reconoce y deduce a la razón de cambio instantánea como el límite de las razones promedio.

5. Utiliza a los procesos infinitos como una forma de obtener la razón de cambio instantánea de una función polinomial y la interpreta como un límite.

6. Identifica a la derivada de una función polinomial en un punto como el límite de las razones de cambio promedio.

7. Interpreta en el contexto de una situación o problema modelado por una función polinomial, la información que proporciona su derivada.

8. Calcula la pendiente de la recta tangente en un punto de la gráfica de una función polinomial, como el límite de las rectas secantes.

9. Calcula la derivada de funciones polinomiales con grado menor o igual a tres, en un punto, usando el límite del cociente de Fermat.

10. Utiliza la función derivada para resolver problemas en diferentes contextos.

TEMÁTICA

Concepto de derivada:

1. Notación.

2. Representación algebraica.

3. Derivada de funciones del tipo: $f(x)=cx^n$.

4. Reglas de derivación para:
- Función constante.
- Función lineal.
- Constante por una función.
- Suma de funciones.
- Producto de funciones.
- Cociente de funciones.
- Funciones del tipo

$$(f(x))^n$$

con $f(x)$ polinomial y n un número racional.

BLOQUE 1

RAZONES DE CAMBIO INSTANTÁNEO EN FUNCIONES POLINOMIALES DE HASTA GRADO TRES

Mediante preguntas específicas se guía al alumno para que establezca la razón de cambio promedio y la razón de cambio instantáneo en situaciones que conducen a modelos de comportamiento descritos por funciones polinomiales de hasta grado tres.

Con la función f (con características específicas) construimos la función

$$\overline{f}(x)=\frac{\Delta f}{\Delta x}=\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1},$$

que denominamos "función razón de cambio promedio asociada a la función f". Si en la función

$$\overline{f}(x)=\frac{\Delta f}{\Delta x}=\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1}$$

las asignaciones a la variable x son "muy próximas" al número x_1 obtenemos el número

$$\lim_{x\to x_1}\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1}$$

cuyo nombre es razón de cambio instantáneo de la función f en el número x_1, se representa:

$$f'(x_1).$$

DEFINICIÓN 2.4

RAZÓN DE CAMBIO PUNTUAL (INSTANTÁNEO)

Sea f una función definida sobre el intervalo I y $x_1 \in I$, entonces:

a. $\Delta x = x - x_1$ representa un cambio (o incremento) en la variable x,

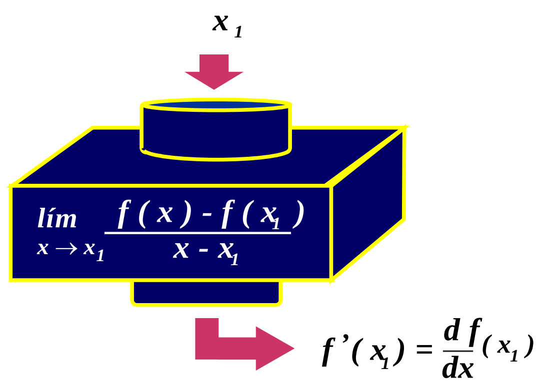
b. $\Delta f = f(x) - f(x_1)$ es el cambio correspondiente en la función f,

c. Si el número $\dfrac{df}{dx}(x_1) = f'(x_1) = \lim\limits_{x\to x_1}\dfrac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1}$ existe,

se conoce como razón de cambio instantáneo de f en el número $x = x_1$.

La figura el proceso de obtención de la "razón de cambio promedio de la función f cuando

$$x = x_1.$$



La razón de cambio instantáneo también puede tratarse como una función.

DEFINICIÓN 2.5

FUNCIÓN RAZÓN DE CAMBIO PUNTUAL

Sea f una función definida sobre el intervalo I y $x_1 \in I$, entonces

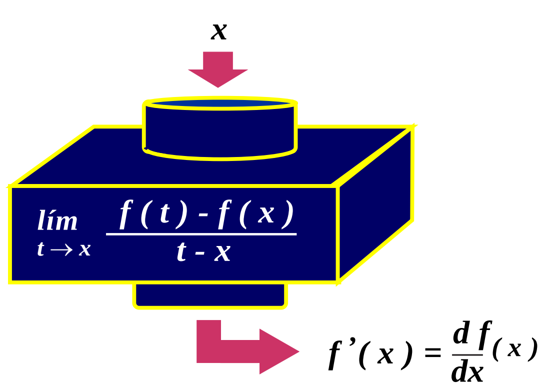
a. $\Delta x = t - x$ representa un cambio (o incremento) en la variable x,

b. $\Delta f = f(t) - f(x)$ el cambio correspondiente en la función f,

c. Si la función

$$\frac{df}{dx} = \lim_{t \to x} \frac{f(t) - f(x)}{t - x}$$

existe, recibe el nombre de "función razón de cambio puntual asociada a f sobre $[x, t]$".



SECCIÓN 2.2
BLOQUE 1
EJEMPLOS 1

RAZÓN DE CAMBIO PUNTUAL EN UN NÚMERO

Obtengamos la función que describe la razón de cambio instantáneo en el número x_1.

1. $f(x) = 8x - 2$.

a. $f(x) = 8x - 2$

b. $f(x_1) = 8x_1 - 2$.

c. $\dfrac{\Delta f}{\Delta x} = \dfrac{8x - 2 - (8x_1 - 2)}{x - x_1} = \dfrac{8(x - x_1)}{x - x_1} = 8$.

iv. $\dfrac{df}{dx}(x_1) = f'(x_1) = \lim\limits_{x \to x_1} 8 = 8$.

2. $f(x) = 3x^2 + 4$.

a. $f(x) = 3x^2 + 4$

b. $f(x_1) = 3x_1^2 + 4$.

c. $\dfrac{\Delta f}{\Delta x} = \dfrac{3x^2 + 4 - (3x_1^2 + 4)}{x - x_1} = \dfrac{3(x^2 - x_1^2)}{x - x_1} = \dfrac{3(x + x_1)(x - x_1)}{x - x_1} = 3(x + x_1)$.

d. $\dfrac{df}{dx}(x_1) = f'(x_1) = \lim\limits_{x \to x_1} 3(x + x_1) = 3 \lim\limits_{x \to x_1}(x + x_1) = 3(2x_1) = 6x_1$.

3. $f(x) = \dfrac{1}{3}x^3 - 5x$.

a. $f(x) = \dfrac{1}{3}x^3 - 5x$

b. $f(x) = \dfrac{1}{3}x_1^3 - 5x_1$.

c. $\dfrac{\Delta f}{\Delta x} = \dfrac{\frac{1}{3}x^3 - 5x - \left(\frac{1}{3}x_1^3 - 5x_1\right)}{x - x_1} = \dfrac{\frac{1}{3}x^3 - 5x - \frac{1}{3}x_1^3 + 5x_1}{x - x_1} = \dfrac{\frac{1}{3}(x^3 - x_1^3) - 5(x - x_1)}{x - x_1}$.

$$= \frac{\frac{1}{3}(x - x_1)(x^2 + xx_1 + x_1^2) - 5(x - x_1)}{x - x_1} = \frac{1}{3}(x^2 + xx_1 + x_1^2) - 5.$$

d. $\dfrac{df}{dx}(x_1) = f'(x_1) = \lim\limits_{x \to x_1}\left[\dfrac{1}{3}(x^2 + xx_1 + x_1^2) - 5\right] = \dfrac{1}{3}(x_1^2 + x_1^2 + x_1^2) - 5 = x_1^2 - 5$.

SECCIÓN 2.2
BLOQUE 1
EJEMPLOS 2

RAZÓN DE CAMBIO PUNTUAL COMO FUNCIÓN

Obtengamos la función "razón de cambio puntual (instantáneo)".

1. $f(x)=14.$

a. $f(x)=14$

b. $f(t)=14.$

c. $\frac{\Delta f}{\Delta x}=\frac{14-14}{t-x}$

$$=\frac{0}{t-x}=0.$$

d. $\frac{df}{dx}(x)=f'(x)$

$$=\lim_{t\to x}(0)=0.$$

2. $f(x)=-12x+9.$

a. $f(x)=-12x+9$

b. $f(t)=-12t+9.$

c. $\frac{\Delta f}{\Delta x}=\frac{-12t+9-(-12x+9)}{t-x}$

$$=\frac{-12(t-x)}{t-x}=-12$$

$$=-12.$$

d. $\frac{df}{dx}(x)=f'(x).$

$$=\lim_{t\to x}(-12)$$

$$=-12.$$

3. $f(x)=\frac{1}{3}x^2+6x+4.$

a. $f(x)=\frac{1}{3}x^2+6x+4$

b. $f(t)=\frac{1}{3}t^2+6t+4.$

c. $\frac{\Delta f}{\Delta x}=\frac{\frac{1}{3}t^2+6t+4-\left(\frac{1}{3}x^2+6x+4\right)}{t-x}$

$$= \frac{\frac{1}{3}\left(t^2 - x^2\right) + 6\left(t - x\right)}{t - x}$$

$$= \frac{\frac{1}{3}\left(t + x\right)\left(t - x\right) + 6\left(t - x\right)}{t - x}$$

$$= \frac{1}{3}\left(t + x\right) + 6.$$

d. $\frac{df}{dx}\left(x\right) = f'\left(x\right).$

$$= \lim_{t \to x}\left[\frac{1}{3}\left(t + x\right) + 6\right]$$

$$= \frac{1}{3}\left(x + x\right) + 6 = \frac{2}{3}x + 6$$

$$= \frac{2}{3}x + 6.$$

4. $f\left(x\right) = x^3 - x^2 + x - 3.$

a. $f\left(x\right) = x^3 - x^2 + x - 3.$

b. $f\left(t\right) = t^3 - t^2 + t - 3.$

c. $\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{t^3 - t^2 + t - 3 - \left(x^3 - x^2 + x - 3\right)}{t - x}$

$$= \frac{\left(t^3 - x^3\right) - \left(t^2 - x^2\right) + t - x}{t - x}$$

$$= \frac{\left(t - x\right)\left(t^2 + xt + x^2\right) - \left(t - x\right)\left(t + x\right) + \left(t - x\right)}{t - x}.$$

$$= t^2 + xt + x^2 - \left(t + x\right) + 1.$$

d. $\frac{df}{dx}\left(x\right) = f'\left(x\right).$

$$= \lim_{t \to x}\left[t^2 + xt + x^2 - \left(t + x\right) + 1\right]$$

$$= 3x^2 - 2x + 1.$$

SECCIÓN 2.2 BLOQUE 1 EJERCICIOS 1

Nombre

Fecha

Aplica la ***definición 2.4*** y obtén la función "razón de de cambio instantáneo".

1. $f(x) = -13$.

2. $f(x) = \frac{2}{13}$.

3. $f(x) = 8x$.

4. $f(x) = -\frac{4}{5}x$.

5. $f(x) = \frac{2}{7}x + 16$.

6. $f(x) = -7x^2 + 2x + 4$.

7. $f(x) = -8x^2 - \frac{3}{5}x - \frac{1}{6}$.

8. $f(x) = 6x^3 - 2x^2 + x - 9$.

9. $f(x) = -\frac{1}{4}x^3 - 3x^2 + 5x - 2$.

SECCIÓN 2.2 BLOQUE 1 EJERCICIOS 2	Nombre Fecha

Aplica la ***definición 2.5*** y obtén la función "razón de de cambio instantáneo" en el número x_1.

1. $f(x) = -32$.

2. $f(x) = \frac{4}{13}$.

3. $f(x) = -5x + 4$.

4. $f(x) = -\frac{3}{8}x - 7$.

5. $f(x) = x^2 + 2x - 1$.

6. $f(x) = -8x^2 + 19x - 8$.

7. $f(x) = x^2 - 4$.

8. $f(x) = 5x^3 + 14x^2 + x + 5$.

9. $f(x) = -4x^3 + 6x^2 - x - 8$.

SECCIÓN 2.2

SECUENCIA DIDÁCTICA 1

RAZÓN DE CAMBIO DE UNA FUNCIÓN DE HASTA GRADO TRES

a. FUNCIÓN RAZÓN DE CAMBIO INSTANTÁNEO ASOCIADA A UNA FUNCIÓN LINEAL

APERTURA

1. ¿Cómo se define una función lineal?

DESARROLLO

2. Calcula el cambio de la variable independiente sobre el intervalo $[x, t]$ del domino de la función lineal $f(x) = Ax + B$.

3. Calcula el cambio de la función lineal $f(x) = Ax + B$ sobre el intervalo $[x, t]$, simplifica.

4. Calcula la razón de cambio promedio de la función lineal $f(x) = Ax + B$ sobre el intervalo $[x, t]$, simplifica.

5. Calcula la función "razón de cambio instantáneo".

Fin del inciso a.

b. FUNCIÓN RAZÓN DE CAMBIO INSTANTÁNEO ASOCIADA A UNA FUNCIÓN CUADRÁTICA

APERTURA

1. ¿Cómo se define una función cuadrática?

DESARROLLO

2. Calcula el cambio de la variable independiente sobre el intervalo $[\,x\,,\,t\,]$ del domino de la función cuadrática $f(x) = Ax^2 + Bx + C$.

3. Calcula el cambio de la función cuadrática $f(x) = Ax^2 + Bx + C$ sobre el intervalo $[\,x\,,\,t\,]$, simplifica y factoriza $(t - x)$.

4. Calcula la razón de cambio promedio de la función cuadrática $f(x) = Ax^2 + Bx + C$ sobre el intervalo $[\,x\,,\,t\,]$, simplifica.

5. Calcula la función "razón de cambio instantáneo" de $f(x) = Ax^2 + Bx + C$.

Fin del inciso b.

c. FUNCIÓN RAZÓN DE CAMBIO INSTANTÁNEO DE UNA FUNCIÓN CÚBICA

APERTURA

1. ¿Cómo se define una función cúbica?

DESARROLLO

2. Calcula el cambio de la variable independiente, sobre el intervalo $[\,x\,,\,t\,]$ del domino, de la función cuadrática $f(x)=Ax^3+Bx^2+Cx+D$.

3. Calcula el cambio de la función cúbica $f(x)=Ax^3+Bx^2+Cx+D$ sobre el intervalo $[\,x\,,\,t\,]$, simplifica y factoriza $(x-x_1)$. Recuerda que $(t^3-x^3)=(t-x)(t^2+xt+x^2)$.

4. Calcula la razón de cambio promedio de la función cúbica $f(x)=Ax^3+Bx^2+Cx+D$ sobre el intervalo $[\,x\,,\,t\,]$, simplifica.

5. Calcula la función "razón de cambio instantáneo" de $f(x)=Ax^3+Bx^2+Cx+D$.

Fin del inciso c.

CIERRE GLOBAL

d.

Completa:

Sea $A \neq 0$.

Si $f(x) = Ax + B$, entonces

Si $f(x) = Ax^2 + Bx + C$, entonces

Si $f(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$, entonces

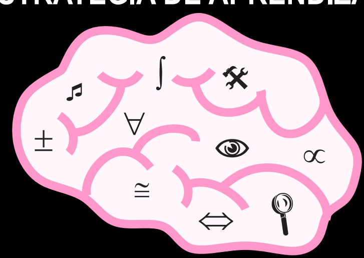
Fin del inciso d.

Fin de actividad

BLOQUE 2

CÁLCULO DE LA FUNCIÓN RAZÓN DE CAMBIO INSTANTÁNEO ASOCIADA A FUNCIONES POLINOMIALES DE HASTA GRADO TRES, INTERPRETACIONES

ESTRATEGIA DE APRENDIZAJE



Se presentan ejemplos que muestran la forma de uso de las propiedades de la derivada de una función polinomial de hasta grado tres en la obtención de funciones derivada. Se presentan ejemplos que muestra sobre la obtención de ecuaciones tangentes y normales a la curva asociada a una función polinomial de hasta grado tres.

En el contexto del cálculo diferencial la función razón de puntual (instantáneo) recibe el nombre de derivada y acepta las interpretaciones:

1. Describe el cambio puntual (instantáneo) de la función (de donde se derivada) respecto a un cambio puntual (instantáneo) de su variable independiente.

2. Describe el comportamiento de la pendiente de la línea recta que es tangente a la curva asociada a la función (de donde se deriva).

3. Proporciona el valor de la pendiente de la línea recta tangente en el punto

$$\left(x_0 \;\; f\left(x_0 \right) \right)$$

de la curva asociada a la función derivable f .

PROPIEDAD 2.1

DERIVADA DE UNA FUNCIÓN POLINOMIAL DE HASTA GRADO 3

a. Si $f(x) = K$, entonces $\frac{df}{dx} = f'(x) = 0$.

b. Si $f(x) = Ax + B$, entonces $\frac{df}{dx}(x) = f'(x) = A$.

c. Si $f(x) = Ax^2 + Bx + C$, entonces $\frac{df}{dx}(x) = f'(x) = 2Ax + B$.

d. Si $f(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$, entonces $\frac{df}{dx}(x) = f'(x) = 3Ax^2 + 2Bx + C$.

SECCIÓN 2.2
BLOQUE 1
EJEMPLOS 1

DERIVADA DE FUNCIONES POLINOMIALES DE HASTA GRADO TRES

1. La función $f(x)=-7$ es lineal (en particular constante), por tanto, $\frac{df}{dx}(x)=f'(x)=0$.

2. La función $f(x)=6x-3$ es lineal, por tanto, $\frac{df}{dx}(x)=f'(x)=6$.

3. $f(x)=-\frac{1}{2}x+4$ es lineal, por tanto, $\frac{df}{dx}(x)=f'(x)=-\frac{1}{2}$.

4. Puesto que $f(x)=5x^2-\frac{3}{4}x+2$ es una función cuadrática, y $\frac{df}{dx}(x)=f'(x)=10x-\frac{3}{4}$.

5. $f(t)=t(2t-1)=2t^2-t$ es una función cuadrática, entonces $\frac{df}{dt}(t)=f'(t)=4t-1$.

6. Puesto que $f(w)=(w-3)(w+5)=w^2+2w-15$ es una función cuadrática, entonces

$$\frac{df}{dw}(w)=f'(w)=2w+2.$$

7. $f(x)=-3x^3+2x^2-8x+6$ es una función cúbica, entonces

$$\frac{df}{dx}(x)=f'(x)=-9x^2+4x-8.$$

8. Si $f(z)=z^2(z+6)+4z$, entonces $f(z)=z^3+6z^2+4z$ y

$$\frac{df}{dz}(z)=f'(z)=3z^2+12z+4.$$

9. Si $f(z)=(z+2)^2(z-1)$, entonces $f(z)=z^3+3z^2-4$ luego

$$\frac{df}{dz}(z)=f'(z)=3z^2+6z.$$

10. Si $g(w)=(w+2)^3$, entonces $g(w)=w^3+6w^2+12w+8$ y

$$\frac{dg}{dw}(w)=g'(w)=3w^2+12w+12.$$

SECCIÓN 2.2 BLOQUE 2 EJERCICIOS 1	Nombre Fecha

Obtén la función derivada que corresponde (indica la propiedad o las propiedades utilizadas).

1. $f(x) = -\frac{13}{15}$.

2. $f(x) = 44$

3. $f(x) = -\frac{2}{9}x + 6$.

4. $f(t) = -23t + 9$.

5. $f(z) = 8 - 14z$

6. $f(t) = \frac{1}{10}t - \frac{1}{5}$.

7. $f(x) = 4x^2 - 8x + 3$.

8. $f(t) = \frac{1}{6}t^2 + 5t + 9$.

9. $f(t) = (t+8)^2$.

10. $f(w) = (3w-1)^2$.

11. $f(x) = -\frac{1}{27}x^3 + 5$.

12. $f(x) = 9x^3 - 4x$.

13. $f(x) = 2x^3 + 5x^2 + 7x - 3$.

14. $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 4x - 9$.

15. $f(z) = z(z-6)^2$.

16. $f(w) = (w+1)^2(w+2)$.

En el plano cartesiano xy, la función derivada f' (asociada a la función f) describe el comportamiento de la pendiente de la línea recta tangente a la curva asociada a la función f en el punto

$$(x\ ,\ y).$$

Cuando $x = x_0$, entonces la línea recta tangente en el punto

$$(x_0\ ,\ y_0)$$

a la curva asociada f tiene pendiente

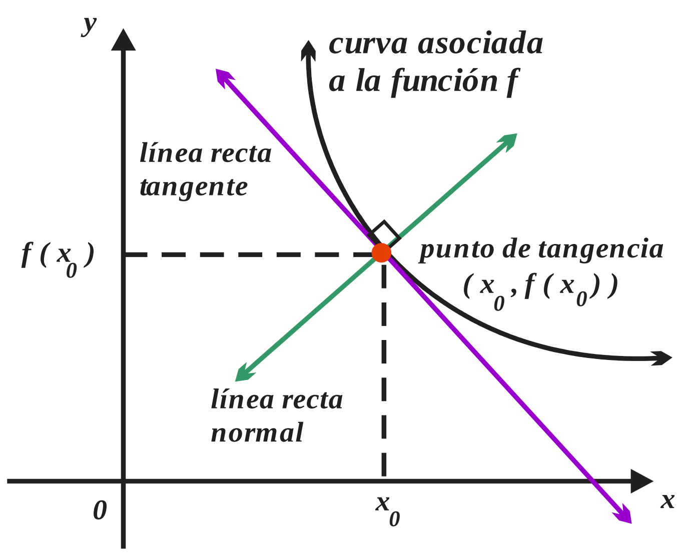
$$m = f'(x_0).$$

De acuerdo "con la forma punto- pendiente" de la línea recta

$$y - y_0 = m(x - x_0),$$

tenemos que la línea recta tangente tiene ecuación

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).$$



Por otra parte, la ecuación de la línea recta normal asociada a la curva de f en el punto de tangencia $(x_0\ ,\ f(x_0))$ tiene ecuación

$$y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0).$$

SECCIÓN 2.2
BLOQUE 2
EJEMPLOS 2

ECUACIÓN DE LA LÍNEA RECTA TANGENTE Y ECUACIÓN DE LA LÍNEA RECTA NORMAL

1. La línea recta tangente y la línea recta normal a la curva asociada a

$$f(x) = x^3 - x^2 + x + 2 \text{ en } T(0, 2)$$

se calculan de la siguiente forma

i. Si $f(x) = x^3 - x^2 + x + 2$,

entonces

$$f'(x) = 3x^2 - 2x + 1,$$

la pendiente de la línea recta tangente es

$$m_T = f'(0) = 3(0)^2 - 2(0) + 1 = 1,$$

ii. Sustituimos

$$T(0, 2) \text{ y } m_T = 1 \text{ en } y - y_0 = m(x - x_0)$$

(forma punto – pendiente) de la línea recta y obtenemos

$$y - 2 = 1(x - 0),$$

escrita en la forma general

$$x - y + 2 = 0.$$

iii. La pendiente m_T de la línea recta normal cumple que $m_T \cdot m_n = -1$; si $m_T = 1$, entonces

$$1 \cdot m_n = -1, \text{ luego } m_n = -1.$$

iv. Con

$$m_n = -1,\ T(0, 2) \text{ y la forma } y - y_0 = m(x - x_0)$$

obtenemos

$$y - 2 = -1(x - 0), \text{ escrita en la forma general } x + y - 2 = 0.$$

2. La línea recta tangente y la línea recta normal asociadas a

$$f(x) = x^2 + 3x - 4 \text{ cuando } x_0 = 2$$

se calculan de la siguiente forma:

i. Determinemos el punto de tangencia $T(2, f(2))$.

Puesto que

$$f(2) = 2^2 + 3(2) - 4 = 6, \text{ entonces } T(2, 6).$$

ii. Si

$$f(x) = x^2 + 3x - 4,$$

entonces

$$f'(x) = 2x + 3$$

y la pendiente de la línea recta tangente es

$$m_T = f'(2) = 2(2) + 3 = 7,$$

iii. Sustituimos

$$m_T = 7 \text{ y } T(2,6)$$

en la forma punto - pendiente de la línea recta

$$(y - y_0 = m(x - x_0)),$$

obtenemos

$$y - 6 = 7(x - 2), \text{ o bien } 7x - y + 8 = 0.$$

iv. La pendiente de la línea recta normal cumple

$$m_T \cdot m_n = -1. \text{ Si } m_T = 7,$$

entonces

$$7m_n = -1 \text{ y así } m_n = -\frac{1}{7}.$$

v. Con $m_n = -\frac{1}{7}$, $T(2,6)$ y la forma $y - y_0 = m(x - x_0)$ obtenemos

$$y - 6 = -\frac{1}{7}(x - 2),$$

luego

$$x + 7y - 44 = 0.$$

SECCIÓN 2.2 BLOQUE 2 EJERCICIOS 2	Nombre Fecha

Obtén la ecuación de la línea recta tangente y de la línea recta normal.

1. $f(x) = -x^2 + 8$ si $T(2, 4)$.

2. $f(x) = x^2 + 2x - 4$ si $T(1, -1)$.

3. $f(x) = x^3 - 5x$, si $T(2, -2)$.

4. $f\left(x \right) = 4x^3 - 2x^2 + 2$, si $T\left(1, 4 \right)$.

5. $f\left(x \right) = -2x^3 - x^2 + x - 2$, si $T\left(0, -2 \right)$.

FIN DE SECCIÓN

2.3 EVALUACIÓN DIAGNÓSTICA

Sugerimos al lector responderla al inicio de la unidad o tema para medir su nivel de conocimientos

TANGENTES

1. En el contexto de la geometría plana, ¿qué es una línea recta tangente?

2. ¿Qué es un punto de tangencia (o punto de contacto)?

3. ¿Cómo se define una línea recta secante?

4. ¿Qué es una razón?

5. Dada una función real de variable real**,** ¿cómo se llama el número x_0 en $f(x_0)$?

6. ¿Cómo se define la pendiente del segmento rectilíneo con extremos en los puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2)?

7. ¿Cómo se interpreta la pendiente de un segmento rectilíneo en el plano cartesiano?

8. ¿Cuál es la posición de los segmentos rectilíneos sin pendiente?

VALOR: Un punto por pregunta (máximo 8 puntos)

PROCESOS ALGEBRAICOS

1. ¿Qué es un binomio?

2. Desarrolla $(x + \Delta x)^n$ si:

a. $n = 2$.

b. $n = 3$.

c. $n=4$.

VALOR: Un punto por pregunta o un punto por inciso (máximo 3 puntos)

3. Simplifica $\dfrac{x^n - x_1^n}{x - x_1}$, si:

a. $n=2$.

b. $n=3$.

c. $n=4$.

d. $n=5$.

VALOR: Dos puntos por inciso (máximo 8 puntos)

4. Calcula y simplifica $\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ para:

a. $f(x)=x$.

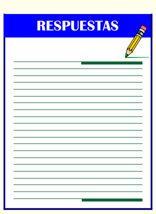
b. $f\left(x\right)=x^2.$

c. $f\left(x\right)=x^3.$

VALOR: Dos puntos por inciso (máximo 6 puntos)

ESCALA DE ACREDITACIÓN DE LA EVALUACIÓN DIAGNÓSTICA (SUFICIENTE Y NO SUFICIENTE)

SUFICIENTE: 15 O MÁS PUNTOS
NO SUFICIENTE: 14 O MENOS PUNTOS



RESPUESTAS A LAS PREGUNTAS DEL EXAMEN DIAGNÓSTICO

TANGENTES

1. Aquella línea recta que interseca (toca) en un punto a una circunferencia (o a una línea curva).
2. Aquel punto que es común a una curva y a una línea recta tangente.
3. Línea recta que interseca a una curva en dos puntos.

4. La comparación de dos cantidades por medio de una división.

5. Preimagen.

6. $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

7. Una medida de la inclinación del segmento rectilíneo.

8. Son verticales.

PROCESOS ALGEBRAICOS

1. Expresión algebraica compuesta por dos términos.

2. a. $(x+\Delta x)^2 = x^2 + 2x(\Delta x) + (\Delta x)^2$. **b.** $(x+\Delta x)^3 = x^3 + 3x^2(\Delta x) + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3$.

c. $(x+\Delta x)^4 = x^4 + 4x^3(\Delta x) + 6x^2(\Delta x)^2 + 4x(\Delta x)^3 + (\Delta x)^4$.

3. a. $x + x_1$. **b.** $x^2 + x \cdot x_1 + x_1^2$. **c.** $x^3 + x^2 \cdot x_1 + x \cdot x_1^2 + x_1^3$. **d.** $x^4 + x^3 \cdot x_1 + x^2 \cdot x_1^2 + x \cdot x_1^3 + x_1^4$.

4. a. 1. **b.** $2x + \Delta x$. **c.** $3x^2 + 3x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2$.

SI NO APROBASTE EL EXAMEN DIAGNÓSTICO, ENTONCES LA REVISIÓN DE LOS SIGUIENTES DOCUMENTOS PUEDE AYUDARTE.

1. Purcell, E. (2007). *Calculo diferencial e integral Novena edición*. México: Pearson - Addison Wesley.

2. Stewart, J. (2012). Límites: una mirada previa al cálculo. *Precálculo Matemáticas para el cálculo sexta edición.* (pp. 839-883). México: Cengage Learning.

3. Thomas, Jr. (2010). *Cálculo una variable Decimosegunda edición*. México: Pearson - Addison Wesley.

FIN DE SECCIÓN

2.4 EVALUACIÓN DE LA UNIDAD 2

PROCESOS INFINITOS Y LA NOCIÓN DE LÍMITE

CONCEPTOS

1. Sean: la variable x definida sobre el intervalo $[\, a \,,\, b \,]$, x_1 y x_2 dos de los valores de x, tales que x_1 es menor que x_2, ¿cómo se define el cambio Δx en la variable?

2. Sean: la variable x definida sobre el intervalo $[\, a \,,\, b \,]$, x_1 y x_2 dos de los valores de x tales que x_1 es menor que x_2, ¿cómo se define el cambio Δf en la función f ?

3. Si el intervalo $[\, a \,,\, b \,]$ forma parte del dominio de la función f , los números x_1 y x_2 pertenecen al intervalo $[\, a \,,\, b \,]$, ¿cómo se define la razón de cambio promedio asociada a f cuándo x toma los valores x_1 y x_2?

4. Si los números x_1 y $x_1 + \Delta x$ pertenecen al intervalo $[\, a \,,\, b \,]$, ¿cómo se define la razón de cambio promedio de f en x_1 cuándo x cambia de x_1 y $x_1 + \Delta x$?

5. Si $\displaystyle lím_{t \to x_0} \frac{f\,(\,t\,) - f\,(\,x_0\,)}{t - x_0}$ existe, entonces se dice:

6. Son los cocientes que define la derivada en el número x_0 .

7. En un contexto geométrico y considerando el plano cartesiano $X - Y$, la derivada en el número x_0 representa:

8. En un contexto de cambios y considerando el plano cartesiano $X - Y$ la función derivada en el número x_0 representa:

9. En $x(t)$, la variable t representa el tiempo y x su desplazamiento, ¿que representa $x'(t)$?

10. En $A(t)$, la variable t representa el tiempo y A el área de una región cuadrada, ¿qué representa $A'(t)$?

11. En la función $V(r)=\frac{4}{3}\pi r^3$, la variable r representa la longitud del radio de una esfera y la variable V el volumen de ella, ¿qué representa $V'(r)$?

DESARROLLOS OPERATIVOS

1. Calcula la razón de cambio promedio:

a. $f(x)=5x-2$, si $x_1=-2$ y $x_2=2$.

b. $f(x)=\frac{1}{2}x^2-x+6$ sobre el intervalo $[2, x]$.

2. Calcula la función que describe la razón de cambio promedio:

a. $f(x)=1-4x$ sobre el intervalo $[2, x]$.

b. $f(x)=4x^2-6$ sobre el intervalo $[-1, x]$.

3. Calcula la pendiente del segmento rectilíneo de la función sobre el intervalo indicado.

a. $f(x)=\frac{1}{6}x^3-6$ sobre el intervalo $[0, 3]$.

b. $f(x)=-3x^2+8$ sobre el intervalo $[-1, 2]$.

4. Calcula la derivada de la función en el número indicado.

a. $f(x)=3x^2-10$, si $x_0=-1$.

b. $f(x)=x^3-2x^2+1$, si $x_0=-\frac{1}{2}$.

5. Calcula la función derivada asociada a:

a. $f(x) = -\frac{4}{3}x^2 - 8x$.

b. $g(t) = -(t-3)^2$.

c. $V(r) = r^2 + \pi\frac{r^2}{h}$.

d. $V(r) = \frac{1}{3}\pi r^2 + \pi r^2$.

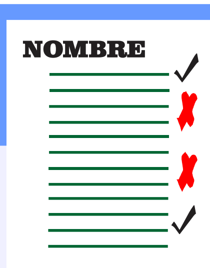
PARA PENSAR

6. En una región rectangular la longitud de la base (x) es el doble que la longitud de la altura. Construye la función que modela la razón de cambio promedio del área respecto a la longitud de la base.

7. Una caja tiene forma de prisma cuadrangular, el ancho mide x unidades, el largo mide 2 unidades más que el ancho y la altura mide cuatro unidades más que el largo. Construye la función que modela la razón de cambio promedio del volumen de la caja respecto a la longitud de la base.

8. Obtén la ecuación de la línea recta tangente (forma general) a la curva asociada a $f(x) = -x^2 + 4x - 4$ en el punto $T(1, -1)$.

9. Obtén la ecuación de la línea recta tangente (forma general) a la curva asociada a $f(x) = x^3 + 6x - 5$ en el punto $N(1, 2)$.



RESPUESTAS A LA EVALUACIÓN DE LA UNIDAD 2

EL CONCEPTO DE DERIVADA, VARIACIÓN Y RAZÓN DE CAMBIO

CONCEPTOS

1. $\Delta x = x_2 - x_1$.

2. $\Delta f = f(x_2) - f(x_1)$.

3. $\overline{f}(x) = \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$.

4. $\overline{f}(x) = \dfrac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$.

5. La función $f(x)$ en derivable en el número x_0.

6. $\underset{t \to x_0}{\text{lím}} \dfrac{f(t) - f(x_0)}{t - x_0}$ y $\underset{\Delta x \to 0}{\text{lím}} \dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$.

7. La pendiente de la (línea recta o segmento de ella) tangente en el punto $(x_0, f(x_0))$.

8. La razón de cambio instantáneo de la función f cuando $x = x_0$.

9. La velocidad.

10. La rapidez con que cambia el área del cuadrado al cambiar la longitud de su base.

11. La rapidez con que cambia el volumen de la esfera al cambiar la longitud de su radio.

DESARROLLOS OPERATIVOS

1. a. $\overline{f}(x) = 5$. **b.** $\overline{f}(x) = \dfrac{1}{2}x - 2$. **2. a.** $\overline{f}(x) = -4$. **b.** $\overline{f}(x) = 4x - 4$.

3. a. $m = \dfrac{3}{2}$. **b.** $m = -3$. **4. a.** $f'(-1) = -6$. **b.** $f'\left(-\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{11}{4}$.

5. a. $f'(x) = -\dfrac{8}{3}x - 8$. **b.** $g'(x) = -2t + 6$. **c.** $V'(r) = 2r + 2\dfrac{\pi r}{h}$. **d.** $V'(r) = \dfrac{2}{3}\pi r + 2r$.

PARA PENSAR

6. $\overline{A}(x) = \dfrac{x}{2}, \; x \geq 0$.

7. $\overline{A}(x) = x^2 + 6x + 8, \; x \geq 0$.

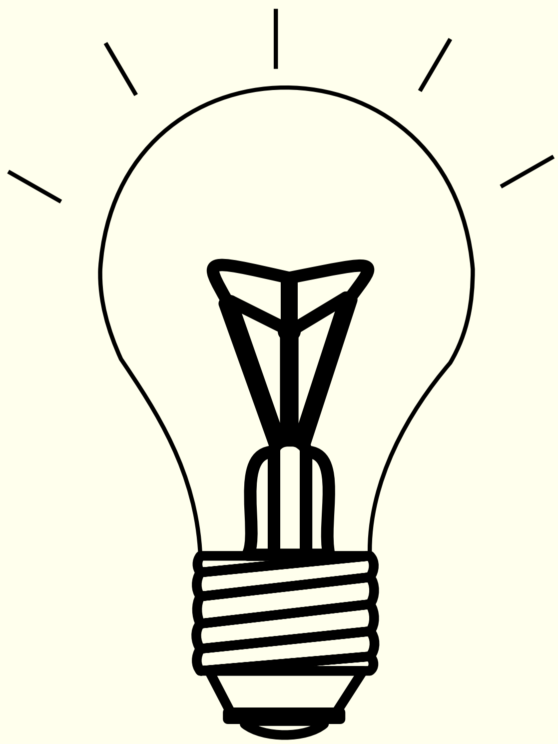
8. $2x + y - 3 = 0$.

9. $x + 9y - 19 = 0$.

FIN DE SECCIÓN

SOLUCIONES DE EJERCICIOS Y ACTIVIDADES

2.5 EL CONCEPTO DE DERIVADA, VARIACIÓN Y RAZÓN DE CAMBIO



SECCIÓN 2.1

BLOQUE 1

SECCIÓN 2.1 BLOQUE 1 EJERCICIOS 1

1. $\overline{f}\left(x \right)=3$.

2. $\overline{f}\left(x \right)=5$.

3. $\overline{f}\left(x \right)=2x+\frac{13}{3}$.

4. $\overline{f}\left(x \right)=\frac{1}{2}x-3$.

5. $\overline{f}\left(x \right)=x^2-6x+17$.

6. $\overline{f}\left(x \right)=.\frac{1}{3}x^2-\frac{4}{3}$.

SECCIÓN 2.1
SECUENCIA DIDÁCTICA 1
RAZÓN DE CAMBIO DE UNA FUNCIÓN LINEAL

1. Es aquella regla de correspondencia $f\left(x \right)=Ax+B$, su dominio son todos los números reales.

2. $\Delta x=x-x_1$.

3. $\Delta f=f\left(x \right)-f\left(x_1 \right)=Ax+B-\left(Ax_1+B \right)=Ax-Ax_1$.

4. $\overline{f}\left(x \right)=\dfrac{Ax-Ax_1}{x-x_1}=\dfrac{A\left(x-x_1 \right)}{x-x_1}=A$.

5. Si $f\left(x \right)=Ax+B$, entonces $\overline{f}\left(x \right)=A$.

Fin de actividad

SECCIÓN 2.1
SECUENCIA DIDÁCTICA 2
RAZÓN DE CAMBIO DE UNA FUNCIÓN CUADRÁTICA

1. Como la función que tiene regla de correspondencia $f\left(x \right)=Ax^2+Bx+C$, siempre que $A\neq 0$ y su dominio son todos los números reales.

2. $\Delta x=x-x_1$.

$$\Delta f = Ax^2 + Bx + C - \left(Ax_1^2 + Bx_1 + C \right)$$
$$= Ax^2 + Bx - Ax_1^2 - Bx_1$$

3. $$= A\left(x^2 - x_1^2 \right) + B\left(x - x_1 \right) .$$
$$= A\left(x - x_1 \right)\left(x + x_1 \right) + B\left(x - x_1 \right)$$
$$= \left(x - x_1 \right)\left(A\left(x + x_1 \right) + B \right)$$

4. $$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{\left(x - x_1 \right)\left(A\left(x + x_1 \right) + B \right)}{x - x_1} = A\left(x + x_1 \right) + B .$$

5. Si $f\left(x \right) = Ax^2 + Bx + C$, entonces $\overline{f}\left(x \right) = A\left(x + x_1 \right) + B$.

Fin de actividad

SECCIÓN 2.1
SECUENCIA DIDÁCTICA 3
RAZÓN DE CAMBIO DE UNA FUNCIÓN CÚBICA

1. Es la función con regla de correspondencia $f\left(x \right) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$, siempre que $A \neq 0$, su dominio son todos los números reales.

2. $\Delta x = x - x_1$.

$$\Delta f = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D - \left(Ax_1^3 + Bx_1^2 + Cx_1 + D \right)$$
$$= Ax^3 + Bx^2 + Cx - Ax_1^3 - Bx_1^2 - Cx_1$$

3. $$= A\left(x^3 - x_1^3 \right) + B\left(x^2 - x_1^2 \right) + C\left(x - x_1 \right) .$$
$$= A\left(x - x_1 \right)\left(x^2 + xx_1 + x_1^2 \right) + B\left(x - x_1 \right)\left(x + x_1 \right) + C\left(x - x_1 \right)$$
$$= \left(x - x_1 \right)\left(A\left(x^2 + xx_1 + x_1^2 \right) + B\left(x + x_1 \right) + C \right)$$

4.
$$\overline{f}\left(x \right) = \frac{\left(x - x_1 \right)\left(A\left(x^2 + xx_1 + x_1^2 \right) + B\left(x + x_1 \right) + C \right)}{x - x_1} = A\left(x^2 + xx_1 + x_1^2 \right) + B\left(x + x_1 \right) + C$$

5. Si $f\left(x \right) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$, entonces
$\overline{f}\left(x \right) = A\left(x^2 + xx_1 + x_1^2 \right) + B\left(x + x_1 \right) + C$.

Fin de actividad

SECCIÓN 2.1 BLOQUE 1 EJERCICIOS 2

1. $\overline{f}\left(x \right) = 0$.
2. $\overline{f}\left(x \right) = 8$.
3. $\overline{f}\left(x \right) = -5$.
4. $\overline{f}\left(x \right) = -4x - 6$.

5. $\overline{f}(x) = -\frac{3}{2}(x+1)+5$.
6. $\overline{f}(x) = -3x^2$.
7. $\overline{f}(x) = -x^2 - 2x + 1$.
8. $\overline{f}(x) = 4x^2 + x + 7$.
9. $\overline{f}(x) = -2\left(x^2 - 2x + 4\right) + \frac{1}{3}(x-2) - 4$.

BLOQUE 2

SECCIÓN 2.1 BLOQUE 2 EJERCICIOS 1

1. $y(x) = 240 - \frac{6}{5}y$ y $\overline{f}(y) = -\frac{6}{5}$ respectivamente.
2. $x(t) = 80t + 80$ y $y(t) = 90t$, $\overline{x}(t) = 80$ y $\overline{y}(t) = 90$, respectivamente.
3. $r(x) = 50000\,kx - kx^2$ y $\overline{r}(x) = -kx + 50000k$, respectivamente.
4. $A(x) = x(200-2x)$ y $\overline{A}(x) = -2x + 200$ respectivamente.
5. $A(p) = \frac{1}{4\pi}p^2$ y $\frac{\Delta A}{\Delta p} = \frac{1}{4\pi}x$.
6. $A(x) = \frac{\sqrt{3}}{4}x^2$ y $\overline{A}(x) = \frac{\sqrt{3}}{4}x$.
7. $A(x) = -x^2 + 4x$ y $\overline{A}(x) = -x + 4$.
8. $V(x) = 3x - \frac{1}{2}x^3$ y $\overline{V}(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 3$.
9. $V(x) = 200x - \frac{1}{2}x^3$ y $\overline{V}(x) = -\frac{1}{2}\left(x^2 + xx_1 + x_1^2\right) + 200$ respectivamente.
10. $A(x) = 400x - \frac{\pi}{4}x^3$ y $\overline{A}(x) = -\frac{\pi}{4}\left(x^2 + xx_1 + x_1^2\right) + 400$.
11. $A(x) = 15x - \frac{\left(-6+\sqrt{3}\right)}{4}x^3$ y $\overline{f}(x) = -\frac{\left(-6+\sqrt{3}\right)}{4}x^2 + 15$.

SECCIÓN 2.2

BLOQUE 1

SECCIÓN 2.2 BLOQUE 1 EJERCICIOS 1

i. $\frac{df}{dx}(x_1) = f'(x_1) = 0$.

ii. $\frac{df}{dx}(x_1) = f'(x_1) = 0$.

iii. $\frac{df}{dx}(x_1) = f'(x_1) = 8$.

iv. $\frac{df}{dx}(x_1) = f'(x_1) = -\frac{4}{5}$.

v. $\frac{df}{dx}(x_1) = f'(x_1) = \frac{2}{7}$.

vi. $\frac{df}{dx}(x_1) = f'(x_1) = -14x_1 + 2$.

vii. $\frac{df}{dx}(x_1) = f'(x_1) = -16x_1 - \frac{3}{5}$.

viii. $\frac{df}{dx}(x_1) = f'(x_1) = 18x_1^2 - 4x_1 + 1$.

ix. $\frac{df}{dx}(x_1) = f'(x_1) = -\frac{3}{4}x_1^2 - 6x_1 + 5$.

SECCIÓN 2.2 BLOQUE 1 EJERCICIOS 2

i. $\frac{df}{dx}(x) = f'(x) = 0$.

ii. $\frac{df}{dx}(x) = f'(x) = 0$.

iii. $\frac{df}{dx}(x) = f'(x) = -5$.

iv. $\frac{df}{dx}(x) = f'(x) = -\frac{3}{8}$.

v. $\frac{df}{dx}(x) = f'(x) = 2x + 2$.

vi. $\frac{df}{dx}(x) = f'(x) = -16x + 19$.

vii. $\frac{df}{dx}(x) = f'(x) = 2x$.

viii. $\frac{df}{dx}(x) = f'(x) = 15x^2 + 28x + 1$.

ix. $\frac{df}{dx}(x) = f'(x) = -12x^2 + 12x - 1$.

SECCIÓN 2.2

SECUENCIA DIDÁCTICA 1

RAZÓN DE CAMBIO DE UNA FUNCIÓN DE HASTA GRADO TRES

a.

1. Es la función con regla de correspondencia $f(x) = Ax + B$, su dominio son todos los números reales.

2. $\Delta x = t - x$.

3. $\Delta f = f(t) - f(x) = At + B - (Ax + B) = At - Ax$.

4. $\overline{f}(x) = \dfrac{At - Ax}{t - x} = \dfrac{A(t-x)}{t-x} = A$.

5. $\dfrac{df}{dx}(x) = f'(x) = \lim\limits_{t \to x}(A) = A$.

b.

1. Como la función lineal tiene regla de correspondencia $f(x) = Ax^2 + Bx + C$ (siempre que $A \neq 0$) y su dominio son todos los números reales.

2. $\Delta x = t - x$.

$$\Delta f = At^2 + Bt + C - \left(Ax^2 + Bx + C\right)$$
$$= At^2 + Bt - Ax^2 - Bx$$

3.
$$= A\left(t^2 - x^2\right) + B(t - x) \quad .$$
$$= A(t-x)(t+x) + B(t-x)$$
$$= (t-x)(A(t+x) + B)$$

4. $\overline{f}(x) = \dfrac{(t-x)(A(t+x)+B)}{t-x} = A(t+x) + B$.

5. $\dfrac{df}{dx}(x) = f'(x) = \lim\limits_{t \to x}(A(t+x)+B) = A(x+x) + B = 2Ax + B$.

c.

1. Es la función con regla de correspondencia $f(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$ (siempre que $A \neq 0$), su dominio son todos los números reales.

2. $\Delta x = t - x$.

$$\Delta f = At^3 + Bt^2 + Ct + D - \left(Ax^3 + Bx^2 + Cx + D\right)$$
$$= At^3 + Bt^2 + Ct - Ax^3 - Bx^2 - Cx$$

3.
$$= A\left(t^3 - x^3\right) + B\left(t^2 - x^2\right) + C(t-x) \quad .$$
$$= A(t-x)\left(t^2 + xt + x^2\right) + B(t-x)(t+x) + C(t-x)$$
$$= (t-x)\left(A\left(t^2 + tx + x^2\right) + B(t+x) + C\right)$$

4. $\overline{f}(x) = \dfrac{(t-x)\left(A\left(t^2+tx+x^2\right) + B(t+x) + C\right)}{t-x} = A\left(t^2 + tx + x^2\right) + B(t+x) + C$.

5.

$$\frac{df}{dx}(x)=f'(x)=\lim_{t\to x}\left[A\left(t^2+tx+x^2\right)+B(t+x)+C\right]=A\left(x^2+x^2+x^2\right)+B(x+x)+C$$

.

$$\frac{df}{dx}(x)=f'(x)=3Ax^2+2Bx+C.$$

d.

1. Si $f(x)=Ax+B$, entonces $\frac{df}{dx}(x)=f'(x)=\lim_{t\to x}(A)=A$.

Si $f(x)=Ax^2+Bx+C$, entonces $\frac{df}{dx}(x)=f'(x)=2Ax+B$.

Si $f(x)=Ax^3+Bx^2+Cx+D$, entonces $\frac{df}{dx}(x)=f'(x)=3Ax^2+2Bx+C$.

Fin de actividad

BLOQUE 2

SECCIÓN 2.2 BLOQUE 2 EJERCICIOS 1

1. $\frac{df}{dx}(x)=f'(x)=0$, por el inciso **a.** de la *propiedad 2.1*.

2. $\frac{df}{dx}(x)=f'(x)=0$, por el inciso **a.** de la *propiedad 2.1*.

3. $\frac{df}{dx}(x)=f'(x)=-\frac{2}{9}$, por el inciso **a.** de la *propiedad 2.1*.

4. $\frac{df}{dt}(t)=f'(t)=-23$, por el inciso **a.** de la *propiedad 2.1*.

5. $\frac{df}{dz}(z)=f'(z)=-14$, por el inciso **a.** de la *propiedad 2.1*.

6. $\frac{df}{dt}(t)=f'(t)=-23$, por el inciso **a.** de la *propiedad 2.1*.

7. $\frac{df}{dx}(x)=f'(x)=8x-8$, por el inciso **b.** de la *propiedad 2.1*.

8. $\frac{df}{dt}(t)=f'(t)=\frac{1}{3}t+5$, por el inciso **b.** de la *propiedad 2.1*.

9. $\frac{df}{dt}(t)=f'(t)=2t+16$, por el inciso **b.** de la *propiedad 2.1*.

10. $\frac{df}{dw}(w)=f'(w)=18w-6$, por el inciso **b.** de la *propiedad 2.1*.

11. $\frac{df}{dx}(x) = f'(x) = -\frac{1}{9}x^2$, por el inciso **c.** de la *propiedad 2.1*.

12. $\frac{df}{dx}(x) = f'(x) = 27x^2 - 4$, por el inciso **c.** de la *propiedad 2.1*.

13. $\frac{df}{dx}(x) = f'(x) = 6x^2 + 10x + 7$, por el inciso **c.** de la *propiedad 2.1*.

14. $\frac{df}{dx}(x) = f'(x) = -x^2 - 6x + 4$, por el inciso **c.** de la *propiedad 2.1*.

15. $\frac{df}{dz}(z) = f'(z) = 3z^2 - 24z + 36$, por el inciso **c.** de la *propiedad 2.1*.

16. $\frac{df}{dw}(w) = f'(w) = 3w^2 + 8w + 5$, por el inciso **c.** de la *propiedad 2.1*.

SECCIÓN 2.2 BLOQUE 2 EJERCICIOS 2

1. $f(x) = -4x + 12$ y $f(x) = \frac{1}{4}x + \frac{7}{2}$.

2. $f(x) = 7x - 16$ y $f(x) = -\frac{1}{7}x - \frac{12}{7}$.

3. $f(x) = 7x - 16$ y $f(x) = -\frac{1}{7}x - \frac{12}{7}$.

4. $f(x) = 8x - 4$ y $f(x) = -\frac{1}{8}x + \frac{33}{8}$.

5. $f(x) = x - 2$ y $f(x) = -x - 2$.

FIN DE SECCIÓN

3

DERIVADA DE FUNCIONES ALGEBRAICAS

PROPÓSITOS

Al finalizar la unidad:
el alumno usará el concepto de derivada a través de su representación algebraica, para identificar patrones de comportamiento y obtendrá las reglas de derivación; utilizará estas reglas para obtener la derivada de una función de manera eficaz y la reconocerá como otra función. Además aplicará las reglas de derivación en diferentes contextos.

CONTENIDO

UNIDAD 3

PRESENTACIÓN

La Unidad 3. “DERIVADA DE FUNCIONES ALGEBRAICAS” atiende el propósito:

Al finalizar la unidad el alumno: Usará el concepto de derivada a través de su representación algebraica para identificar patrones de comportamiento y obtendrá las reglas de derivación; utilizará estas reglas para obtener la derivada de una función de manera eficaz y la reconocerá como otra función. Además, aplicará las reglas de derivación en diferentes contextos.

Clasificamos los aprendizajes y la temática propuestos en dos secciones de títulos:

3.1 Derivación de funciones algebraicas.
Esta sección incluye:
Cuatro bloques.
Dos secuencias didácticas.
Siete bloques de ejemplos resueltos.
Seis bloques de ejercicios propuestos.

3.2. Problemas de aplicación.
Tres bloques.
Una secuencia didáctica.
Tres bloques de ejemplos resueltos.
Tres bloques de ejercicios propuestos.

Además, el lector observará en el desarrollo da cada sección:
1. Título
2. La estrategia de aprendizaje para su desarrollo.
3. Breve introducción sobre la importancia de la temática.
4. Los elementos teóricos básicos de los contenidos temáticos y aprendizajes que señala el programa de estudios correspondiente.
5. Definiciones básicas (y formales) sobre los conceptos relevantes.
6. Propiedades (teoremas inherentes a la temática de la disciplina).
La unidad también incluye:
La sección de evaluación diagnóstica, con:

i. Un examen de evaluación diagnóstica, de considerarlo pertinente el docente, el estudiante deberá realizarla; incluye escala de acreditación.
ii. Las respuestas a las preguntas del examen diagnóstico y una bibliografía parte de las sugerencias y apoyo para aquellos alumnos que no lograron aprobar el examen.

La sección de evaluación de la unidad, con:

i. La evaluación de la unidad (en la taxonomía de: conceptos, desarrollos operativos y problemas que requieren un mayor grado de pensamiento).
ii. Las respuestas a la evaluación propuesta.

La sección de soluciones, con:

i. Las soluciones de las secuencias didácticas propuestas.
ii. Las soluciones de las secciones de ejercicios propuestos.

SECCIÓN 3.1 DERIVACIÓN DE FUNCIONES ALGEBRAICAS

APRENDIZAJES

1. Identifica el patrón de comportamiento de derivadas de funciones del tipo: $f(x)=x^n$ obtenidas utilizando la definición y determina su regla de derivación.

2. Obtiene la derivada de una función polinomial de 1°, 2° y 3° grados usando la definición en su representación:

$$\lim_{t\to x}\frac{f(t)-f(x)}{t-x}$$

3. Identifica geométricamente la relación de la representación de la derivada:

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

con la representación anterior.

4. Obtiene derivadas utilizando los dos límites anteriores.

5. Explica la relación existente entre la derivada de una función lineal y la pendiente de la recta; identifica dicha relación en el caso de la función constante.

6. Identifica patrones de comportamiento de las derivadas en operaciones con funciones: suma, producto, cociente y de la forma $[f(x)]^n$ para obtener las reglas de derivación correspondientes.

7. Obtiene la derivada de funciones algebraicas usando las reglas de derivación y la regla de la cadena.

TEMÁTICA

1. Derivada de funciones del tipo $f(x)=x^n$.

2. Reglas de derivación para:
- Función constante.
- Función lineal.
- Constante por una función.
- Suma de funciones.
- Producto de funciones.
- Cociente de funciones.
- Funciones del tipo $[f(x)]^n$ con $f(x)$ polinomial y n un número racional.

BLOQUE 1

DERIVADA DE FUNCIONES POLINOMIALES

Con un número adecuado de preguntas específicas guiamos al estudiante, para que utilizando el cociente de Newton y un proceso inductivo establezca una conjetura respecto a la función derivada asociada

$$f(x) = x^n,$$

es decir,

$$f'(x) = nx^{n-1}.$$

Si f sea una función derivable, entonces es posible aplicarle cociente de Fermat

$$\lim_{t \to x} \frac{f(t) - f(x)}{t - x},$$

o el cociente de Newton

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x},$$

ambas aplicaciones genera una nueva función cuya regla de correspondencia se representa simbólicamente

$$f'(x).$$

Entre la gama de funciones derivables las más comunes son las funciones “potencia”, mismas que trataremos en la presente sección.

SECCIÓN 3.1
SECUENCIA DIDÁCTICA 1
FUNCIÓN DERIVADA ASOCIADA A LA FUNCIÓN POTENCIA

INICIO

1. Proporciona la definición la “función derivada” en términos del cociente de Fermat.

2. Proporciona la definición la “función derivada” en términos del cociente de Newton.

DESARROLLO

FUNCIÓN DERIVADA ASOCIADA A $f(x)=x^n$, SI n ES UN NÚMERO ENTERO POSITIVO

3. Sea $f(x)=x$, obtén:

i. $f(t)$

ii. $f(t)-f(x)$

iii. $\dfrac{f(t)-f(x)}{t-x}$

iv. $f'(x)=\lim\limits_{t\to x}\dfrac{f(t)-f(x)}{t-x}$

4. Sea $f(x)=x^2$, obtén:

i. $f(t)$

ii. $f(t)-f(x)$

iii. $\dfrac{f(t)-f(x)}{t-x}$

iv. $f'(x)=\lim\limits_{t\to x}\dfrac{f(t)-f(x)}{t-x}$

5. Sea $f(x)=x^3$, obtén:

i. $f(t)$

ii. $f(t)-f(x)$

iii. $\dfrac{f(t)-f(x)}{t-x}$, simplifica (recuerda que $t^3-x^3=(t-x)(t^2+tx-x^2)$).

iv. $f'(x)=\lim\limits_{t\to x}\dfrac{f(t)-f(x)}{t-x}$

6. Completa la tabla:

FUNCIÓN	**FUNCIÓN DERIVADA**
$f(x)=x$	
$f(x)=x^2$	
$f(x)=x^3$	

CIERRE

7. En la tabla del ***inciso 6.*** observa el patrón de comportamiento de la función derivada y establece una conjetura respecto a la derivada de la función $f(x)=x^n$.

Fin de actividad

SECCIÓN 3.1
BLOQUE 1
EJEMPLOS 1

Ahora utilizamos la definición de derivada en términos del cociente de Newton.

1. Si $f(x)=3x-2$, entonces

i. $f(x+\Delta x)=3(x+\Delta x)-2$

ii. $f(x+\Delta x)-f(x)=3(x+\Delta x)-2-(3x-2)=3\Delta x$

iii. $\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\dfrac{3\Delta x}{\Delta x}=3$

iv. $f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}3=3.$

2. Si $f(x)=4x^2+5x-6$, entonces

i. $f(x+\Delta x)=4(x+\Delta x)^2+5(x+\Delta x)-6.$

ii.

$f(x+\Delta x)-f(x)=4(x+\Delta x)^2+5(x+\Delta x)-6-\left(4x^2+5x-6\right)=8\Delta x+4\Delta^2x+5\Delta x.$

iii. $\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\dfrac{8\Delta x+4\Delta^2x+5\Delta x}{\Delta x}=8x+4\Delta x+5.$

iv. $f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}(8x+4\Delta x+5)=8x+5.$

3. Si $f(x)=2x^3-7x^2-2x-1$, entonces:

i. $f(x+\Delta x)=2(x+\Delta x)^3-7(x+\Delta x)^2-2(x+\Delta x)-1$

ii.

$$f(x+\Delta x)-f(x)=2(x+\Delta x)^3-7(x+\Delta x)^2-2(x+\Delta x)-1-\left(2x^3-7x^2-2x-1\right)$$
$$=2x^3+6x^2\Delta x+6x\Delta^2x+2\Delta^3x-7x^2-14x\Delta x-7\Delta^2x-2x-2\Delta x-2x^3+7x^2+2x$$
$$=6x^2\Delta x+6x\Delta^2x+2\Delta^3x-14x\Delta x-7\Delta^2x-2\Delta x.$$

iii. $\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\dfrac{6x^2\Delta x+6x\Delta^2x+2\Delta^3x-14x\Delta x-7\Delta^2x-2\Delta x}{\Delta x}.$

$$=6x^2+6x\Delta x+2\Delta^2x-14x-7\Delta x-2.$$

iv. $f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\left(6x^2+6x\Delta x+2\Delta^2x-14x-7\Delta x-2\right)=6x^2-14x-2.$

SECCIÓN 3.1 BLOQUE 1 EJERCICIOS 1	Nombre Fecha

Aplica el cociente de Newton y obtén la función derivada.

1. Si $f(x) = -8x$ calcula:

i. $f(x+\Delta x)$

ii. $f(x+\Delta x) - f(x)$

iii. $\dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$

iv. $f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$

2. Si $f(x) = -4x + 1$ calcula:

i. $f(x+\Delta x)$

ii. $f(x+\Delta x) - f(x)$

iii. $\dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$

iv. $f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$

3. Si $f(x) = 5x^2 - 3x$ calcula:

i. $f\left(x+\Delta x\right)$

ii. $f\left(x+\Delta x\right)-f\left(x\right)$

iii. $\dfrac{f\left(x+\Delta x\right)-f\left(x\right)}{\Delta x}$

iv. $f'\left(x\right)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f\left(x+\Delta x\right)-f\left(x\right)}{\Delta x}$

4. Si $f\left(x\right)=3x^2-x-1$ calcula:

i. $f\left(x+\Delta x\right)$

ii. $f\left(x+\Delta x\right)-f\left(x\right)$

iii. $\dfrac{f\left(x+\Delta x\right)-f\left(x\right)}{\Delta x}$

iv. $f'\left(x\right)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f\left(x+\Delta x\right)-f\left(x\right)}{\Delta x}$

5. Si $f(x) = -3x^3 + 5x^2 - 7x + 2$ calcula:

i. $f(x + \Delta x)$

ii. $f(x + \Delta x) - f(x)$

iii. $\dfrac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$

iv. $f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$

6. Si $f(x) = x^3 - x^2 - x + 1$ calcula:

i. $f(x + \Delta x)$

ii. $f(x + \Delta x) - f(x)$

iii. $\dfrac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$

iv. $f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$

7. Si $f(x)=\frac{1}{8}x^3+\frac{1}{2}x^2$ calcula:

i. $f(x+\Delta x)$

ii. $f(x+\Delta x)-f(x)$

iii. $\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$

iv. $f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$

8. Si $f(x)=4x^3+8x-6$ calcula:

i. $f(x+\Delta x)$

ii. $f(x+\Delta x)-f(x)$

iii. $\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$

iv. $f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$

SECCIÓN 3.1
SECUENCIA DIDÁCTICA 2
FUNCIÓN DERIVADA ASOCIADA A UNA FUNCIÓN POLINOMIAL

INICIO

1. ¿Cuál es la definición "función derivada" en términos del cociente de Fermat?

2. Proporciona la definición la "función derivada" en términos del cociente de Newton.

DESARROLLO

FUNCIÓN DERIVADA ASOCIADA A $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$.

3. Sea $f(x) = a_0 + a_1 x$, obtén y simplifica:

i. $f(x + \Delta x)$

ii. $f(x + \Delta x) - f(x)$

iii. $\dfrac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$

iv. $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$

4. Sea $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$, obtén y simplifica:

i. $f(x+\Delta x)$

ii. $f(x+\Delta x) - f(x)$

iii. $\dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$

iv. $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$

5. Sea $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$, obtén y simplifica:

i. $f(x+\Delta x)$

ii. $f(x+\Delta x) - f(x)$

iii. $\dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$

iv. $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$

6. Completa la tabla:

FUNCIÓN	FUNCIÓN DERIVADA
$f(x)=a_0+a_1x$	
$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2$	
$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3$	

CIERRE

7. En la tabla del ***inciso 6.*** observa el patrón de comportamiento de la función derivada y establece una conjetura respecto a la derivada de la función

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots+a_nx^n.$$

Fin de actividad

DERIVADA DE LA FUNCIÓN $f(x) = x^n$.

Si n es un número entero positivo, entonces $f(x) = x^n$ se llama “función potencia” (o potencial) y por derivada la función

$$f'(x) = nx^{n-1}.$$

La ***propiedad 3.1*** lo formaliza.

PROPIEDAD 3.1

Si $f(x) = x^n$ y n es un número entero positivo, entonces $f'(x) = nx^{n-1}$.

SECCIÓN 3.1
BLOQUE 1
EJEMPLOS 2

Utilizando la ***propiedad 3.1***.

1. Si $f(x) = x^7$, entonces

$$f'(x) = 7x^{7-1} = 7x^6.$$

2. $f(x) = x^{43}$, entonces

$$f'(x) = 43x^{43-1} = 43x^{42}.$$

3. $f(x) = x^{62}$, entonces

$$f'(x) = 62x^{62-1} = 62x^{61}.$$

4. $f(x) = x^{1077}$, entonces

$$f'(x) = 1077x^{1077-1} = 1077x^{1076}.$$

5. $f(x) = x^{p+8}$, entonces

$$f'(x) = (p+8)x^{p+8-1} = (p+8)x^{p+7}.$$

SECCIÓN 3.1 BLOQUE 1 EJERCICIOS 2	Nombre Fecha

Utiliza la ***propiedad 3.1.*** y obtén la función derivada asociada a cada función potencia.

1. $f(x)=x^7$, $f'(x)=$

2. $f(x)=x^{43}$, $f'(x)=$

3. $f(x)=x^{62}$, $f'(x)=$

4. $f(x)=x^{177}$, $f'(x)=$

5. $f(x)=x^{1037}$, $f'(x)=$

DERIVADA DE LA FUNCIÓN $f(x)=x^n$.

Dependiendo del número que tenga asignado n es el nombre que recibe la función $f(x)=x^n$, por ejemplo, si n es un número entero negativo $f(x)=x^n$ es una función racional, si n es un número racional (no entero), entonces $f(x)=x^n$ es una función algebraica, etcétera. Para obtener la función derivada asociada a $f(x)=x^n$ en donde n es un número racional (positivo o negativo), se utiliza la ***propiedad 3.2*** .

PROPIEDAD 3.2

Si $f(x)=x^n$ y n es un número racional, entonces $f'(x)=nx^{n-1}$.

Al aplicar la ***propiedad 3.2***. es necesario que la función a derivar se encuentre escrita en la forma

$$f(x)=x^n.$$

AYUDA AL LECTOR

Recuerda:

Si $x \neq 0$, entonces $x^{-n}=\dfrac{1}{x^n}$ y $x^n=\dfrac{1}{x^{-n}}$.

Si $m,\ n$ son números entero positivos y $x \geq 0$, entonces $x^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{x}$.

SECCIÓN 3.1
BLOQUE 1
EJEMPLOS 3

Derivemos algunas funciones con regla de correspondencia de la forma $f(x)=x^n$ y n es un número racional.

1. Si $f(x)=x^{-4}$, entonces $f'(x)=-4x^{-4-1}=-4x^{-5}=-\frac{4}{x^5}$.

2. La función racional $f(x)=\frac{1}{x^6}$, es equivalente a $f(x)=x^{-6}$, por tanto, la función derivada que tiene asociada es $f'(x)=-6x^{-6-1}=-6x^{-7}=-\frac{6}{x^7}$.

3. Para derivar $f(x)=\sqrt[3]{x}$, primero la rescribimos en términos de una potencia fraccionaria, entonces $f(x)=x^{\frac{1}{3}}$ y la función derivada asociada es

$$f'(x)=\frac{1}{3}x^{\frac{1}{3}-1}=\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}=\frac{1}{3x^{\frac{2}{3}}}=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}.$$

4. Si $f(x)=x^{-\frac{1}{4}}$, entonces $f'(x)=-\frac{1}{4}x^{-\frac{1}{4}-1}=-\frac{1}{4}x^{-\frac{5}{4}}=-\frac{1}{4x^{\frac{5}{4}}}=-\frac{1}{4\sqrt[4]{x^5}}$.

5. La función $f(x)=\sqrt[7]{x^3}$ es equivalente a $f(x)=x^{\frac{3}{7}}$, por tanto, su función derivada es

$$f'(x)=\frac{3}{7}x^{\frac{3}{7}-1}=\frac{3}{7}x^{-\frac{4}{7}}=\frac{3}{7x^{\frac{4}{7}}}=\frac{3}{7\sqrt[7]{x^4}}.$$

6. La función $f(x)=\frac{1}{\sqrt[8]{x}}$ puede rescribirse como $f(x)=\frac{1}{x^{\frac{1}{8}}}=x^{-\frac{1}{8}}$. Por tanto, su derivada es

$$f'(x)=-\frac{1}{8}x^{-\frac{1}{8}-1}=-\frac{1}{8}x^{-\frac{9}{8}}=-\frac{1}{8x^{\frac{9}{8}}}=-\frac{1}{8\sqrt[8]{x^9}}.$$

SECCIÓN 3.1 BLOQUE 1 EJERCICIOS 3	Nombre Fecha

Obtén la función derivada y rescríbela de manera que no incluya potencias fraccionarias.

1. $f(x) = x^{-9}$.

2. $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$.

3. $f(x) = \sqrt[6]{x}$.

4. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^5}}$

5. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[5]{x}}$

6. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[5]{x^2}}$

BLOQUE 2

PROPIEDADES OPERATIVAS DE LA DERIVADA

Proponemos funciones en las que se aplicamos la propiedad de linealidad (aditividad y homogeneidad) de la derivada en la obtención de la función derivada asociada a combinaciones de funciones cuya regla de correspondencia de la forma

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$$

al utilizar las propiedades de las potencias.

LAS PROPIEDADES DE HOMOGENEIDAD Y ADITIVIDAD DE LA DERIVADA

Gran diversidad de funciones pueden interpretarse como la combinación de otras funciones; por ejemplo, ciertas funciones se interpretan como el producto de una función y un número real, otras como la suma algebraica de funciones y/o como una combinación de ambos casos.

En la ***propiedad 3.3***, las funciones involucradas se interpretan como la combinación de funciones conocidas.

PROPIEDAD 3.3

HOMOGENEIDAD Y ADITIVIDAD

Sean f y g funciones derivables y C un número real distinto de cero.

a. Si

$$f = Cg,$$

entonces

$$f' = Cg' \text{ (propiedad de homogeneidad).}$$

b. Si f y g son funciones derivables, entonces

$$(f + g)$$

es derivable y

$$(f + g)' = f' + g' \text{ (propiedad de aditividad).}$$

Los incisos de la ***propiedad 3.3*** se simplifican en una sola propiedad llamada linealidad, es decir,

$$(f + Cg)' = f' + Cg'.$$

SECCIÓN 3.1
BLOQUE 2
EJEMPLOS 1

Derivemos algunas funciones con regla de correspondencia de la forma $f(x)=x^n$ y n es un número racional.

1. Si $f(x)=x^4+3x^2$, entonces $f'(x)=\left(x^4\right)'+3\left(x^2\right)'$

$$=4x^3+6x.$$

2. Si $f(x)=2\sqrt{x}+\frac{1}{4}x^8$, entonces $f'(x)=2\left(\sqrt{x}\right)'-\frac{1}{4}\left(x^8\right)'$

$$=2\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{1}{4}(8)x^7=\frac{1}{\sqrt{x}}-2x^7.$$

3. La función $f(x)=\frac{3}{x}-\frac{5}{\sqrt[4]{x}}-8x^{-3}$ puede rescribirse como $f(x)=3x^{-1}-5x^{-\frac{1}{4}}-8x^{-3}$,

por tanto, $f'(x)=\left(3x^{-1}\right)'-\left(5x^{-\frac{1}{4}}\right)'-\left(8x^{-3}\right)'=3\left(x^{-1}\right)'-5\left(x^{-\frac{1}{4}}\right)'-8\left(x^{-3}\right)'$

$$=3\left(-x^{-2}\right)-5\left(-\frac{1}{4}x^{-\frac{5}{4}}\right)-8\left(-3x^{-4}\right)$$

$$=-\frac{3}{x^2}+\frac{5}{4\sqrt[4]{x^5}}+\frac{24}{x^4}.$$

4. La función racional $f(x)=\frac{1}{x^6}$, es equivalente a $f(x)=x^{-6}$, por tanto, la función derivada que tiene asociada es

$$f'(x)=-6x^{-6-1}=-6x^{-7}=-\frac{6}{x^7}$$

5. Para derivar $f(x)=\sqrt[3]{x}$, la rescribimos como potencia fraccionaria, $f(x)=x^{\frac{1}{3}}$,

por tanto, la función derivada asociada es $f'(x)=\frac{1}{3}x^{\frac{1}{3}-1}=\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}=\frac{1}{3x^{\frac{2}{3}}}=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$.

SECCIÓN 3.1 BLOQUE 2 EJERCICIOS 1	Nombre Fecha

Obtén la función derivada y rescríbela de manera que no incluya potencias fraccionarias.

1. $f(x)=4-\frac{1}{6}x^{2}-8x^{3}$.

2. $f(x)=\frac{3}{2}-4x^{-2}-\frac{1}{4}x^{3}$.

3. $f(x)=6\sqrt{x}-\frac{3}{\sqrt[3]{x}}-\frac{1}{4}x^{-2}$.

4. $f(z)=\frac{2}{\sqrt{z}}+8\sqrt[3]{z}+\frac{5}{2}z^{-2}$.

5. $f(w)=-\dfrac{5}{\sqrt{w^3}}-5\sqrt[3]{w^2}+\dfrac{7}{2}w^{-2}-2w^{-4}.$

6. $g(y)=\dfrac{4}{\sqrt{y^4}}-10\sqrt[3]{y^4}+\dfrac{5}{y^{-6}}-8y^{-4}+4.$

7. $g(r)=7+\dfrac{4}{\sqrt{r^{-2}}}-8\sqrt[3]{r^2}+\dfrac{5}{r^3}-\dfrac{2}{5}r^{-4}+2r.$

8. $f(r)=-2\sqrt[3]{r^5}-\dfrac{8}{\sqrt[3]{r^5}}+\dfrac{2}{5r^{\frac{2}{3}}}.$

BLOQUE 3

DERIVADA DE UNA COMBINACIÓN DE FUNCIONES

Se proponen funciones que pueden interpretarse como productos y/o divisiones de otras funciones derivables, se obtienen la función derivada (ya sea de los factores o de las funciones denominador y numerador) y se sustituyen las partes correspondientes en la regla de derivación. El proceso antes descrito tiene la finalidad de servir como modelo que el alumno analice y posteriormente lo utilice para obtener la derivada de funciones que puedan interpretarse como productos y/o divisiones de funciones derivables.

DERIVADAS DE PRODUCTOSY DIVISIÓN DE FUNCIONES

Otras funciones (derivables) pueden interpretarse, ya sea como el producto o la división de dos funciones derivables. La aplicación de la definición de función derivada (en forma del cociente de Newton o del cociente de Fermat) a un producto de funciones derivables o a una división de funciones derivables conduce a la propiedad 4.

PROPIEDAD 3.4

DERIVADAS DE PRODUCTOS Y DIVISIÓNES

Sean f y g son funciones derivables en un mismo dominio:

a. Si $F = f \cdot g$, entonces $F = f \cdot g$ es derivable y $F' = f \cdot g' + g \cdot f'$.

b. Si $g \neq 0$ y $F = \frac{f}{g}$, entonces $F = \frac{f}{g}$ es derivable y $F' = \frac{g \cdot f' - f \cdot g'}{g^2}$.

SECCIÓN 3.1 BLOQUE 3 EJEMPLOS 1

Obtén la función derivada y rescríbela de manera que no incluya potencias fraccionarias.

1. $F(x) = (x^3 - x)(4x^2 + 3x - 2)$.

Sean:

$$f(x) = (x^3 - x) \text{ y } g(x) = (4x^2 + 3x - 2),$$

entonces

$$f'(x)=3x^2-1 \text{ y } g'(x)=8x+3,$$

luego

$$F'(x)=\left(x^3-x\right)\left(8x+3\right)+\left(4x^2+3x-2\right)\left(3x^2-1\right).$$

2. $F(x)=\left(\frac{\sqrt{x}}{2}+\frac{1}{4}x\right)\left(x^4-2x^2\right).$

Sean:

$$f(x)=\frac{\sqrt{x}}{2}+\frac{1}{4}x \text{ y } g(x)=x^4-2x^2,$$

entonces

$$f'(x)=\frac{1}{4\sqrt{x}}+\frac{1}{4} \text{ y } g'(x)=4x^3-4x,$$

luego

$$F'(x)=\left(\frac{\sqrt{x}}{2}+\frac{1}{4}x\right)\left(4x^3-4x\right)+\left(x^4-2x^2\right)\left(\frac{1}{4\sqrt{x}}+\frac{1}{4}\right).$$

3. $F(x)=\left(1-2x+6\sqrt{x}\right)\left(x^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{4}x\right).$

Sean:

$$f(x)=1-2x+6\sqrt{x} \text{ y } g(x)=x^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{4}x,$$

entonces

$$f'(x)=-2+\frac{3}{\sqrt{x}} \text{ y } g'(x)=\frac{3}{2}\sqrt{x}-\frac{1}{4},$$

luego

$$F'(x)=\left(1-2x+6\sqrt{x}\right)\left(\frac{3}{2}\sqrt{x}-\frac{1}{4}\right)+\left(x^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{4}x\right)\left(-2+\frac{3}{\sqrt{x}}\right).$$

4. $F(x)=\frac{10}{x^2+2x+1}.$

Sean:

$$f(x)=10 \text{ y } g(x)=x^2+2x+1,$$

entonces

$$f'(x)=0 \text{ y } g'(x)=2x+2,$$

luego

$$F'(x)=\frac{\left(x^2+2x+1\right)(0)-10(2x+2)}{\left(x^2+2x+1\right)^2}=\frac{-20x-20}{\left(x^2+2x+1\right)^2}.$$

5. $F(x)=\dfrac{5x+3}{x^4-1}$.

Sean:

$$f(x)=5x+3 \text{ y } g(x)=x^4-1,$$

entonces

$$f'(x)=5 \text{ y } g'(x)=4x^3,$$

luego

$$F'(x)=\frac{\left(x^4-1\right)(5)-(5x+3)4x^3}{\left(x^4-1\right)^2}=-\frac{15x^4+12x^3+5}{\left(x^4-1\right)^2}.$$

6. $F(x)=\dfrac{6\sqrt[3]{x}}{2\sqrt{x}+x-1}$.

Sean:

$$f(x)=6\sqrt[3]{x} \text{ y } g(x)=2\sqrt{x}+x-1,$$

entonces

$$f'(x)=\frac{2}{\sqrt[3]{x^2}} \text{ y } g'(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}+1,$$

luego

$$F'(x)=\frac{\left(2\sqrt{x}+x-1\right)\left(\dfrac{2}{\sqrt[3]{x^2}}\right)-\left(6\sqrt[3]{x}\right)\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}+1\right)}{\left(2\sqrt{x}+x-1\right)^2}.$$

7. $F(x)=\dfrac{x+\sqrt{x}}{1-x-x^2}$.

Sean

$$f(x)=x+\sqrt{x} \text{ y } g(x)=1-x-x^2,$$

entonces

$$f'(x)=1+\frac{1}{2\sqrt{x}} \text{ y } g'(x)=-1-2x,$$

$$F'(x)=\frac{\left(1-x-x^2\right)\left(1+\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\right)+\left(x+\sqrt{x}\right)(1+2x)}{\left(1-x-x^2\right)^2}.$$

8. Si $F(x)=\dfrac{3x^2+6x-2}{x^5-4x^3-5x+1}$, calcula $F'(0)$.

Sean

$$f(x)=3x^2+6x-2 \text{ y } g(x)=x^5-4x^3-5x+1,$$

entonces

$$f'(x)=6x+6 \text{ y } g'(x)=5x^4-12x^2-5,$$

$$F'(x)=\frac{\left(x^5-4x^3-5x+1\right)(6x+6)-\left(3x^2+6x-2\right)\left(5x^4-12x^2-5\right)}{\left(x^5-4x^3-5x+1\right)^2}$$

y

$$F'(0)=\frac{(1)(6)-(-2)(-5)}{(1)^2}=-4.$$

9. Si $F(x)=\dfrac{8x}{4\sqrt{x}+3\sqrt[3]{x}}$, calcula $F'(1)$.

Sean

$$f(x)=8x \text{ y } g(x)=4\sqrt{x}+3\sqrt[3]{x},$$

entonces

$$f'(x)=8 \text{ y } g'(x)=\frac{2}{\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}},$$

$$F'(x)=\frac{\left(4\sqrt{x}+3\sqrt[3]{x}\right)(8)-(8x)\left(\dfrac{2}{\sqrt{x}}+\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\right)}{\left(4\sqrt{x}+3\sqrt[3]{x}\right)^2}$$

y

$$F'(1)=\frac{(4+3)(8)+(8)(2+1)}{(4+3)^2}=\frac{80}{49}.$$

SECCIÓN 3.1 BLOQUE 3 EJERCICIOS 1	Nombre Fecha

1. Obtén la función derivada.

a. $F(x)=x^2\left(6x^5-8x^3+6\right)$.

b. $F(x)=\left(2x^3-5x^2+3x\right)\left(2x^2-4x^3-3\right)$.

c. $F(x)=\left(\frac{1}{x}-7x^2+3x-5\right)\left(x^3+2x^2+2\right)$.

d. $G(z)=\left(z^{-2}+z^{2}\right)\left(z^{-3}+2z^{-2}+1\right)$.

e. $G(z)=\left(\sqrt{z}+\sqrt[3]{z^{2}}\right)(z+1)$.

f. $H(y)=\left(\frac{1}{y}-\frac{1}{y^{3}}\right)\left(y^{3}+y+1\right)$.

2. Obtén la función derivada.

a. $F(x) = \dfrac{2}{x^2+1}$.

b. $F(w) = \dfrac{6}{4\sqrt{w}+w+1}$.

c. $H(y) = \dfrac{y}{y^2+9}$.

d. $G(m) = \dfrac{4m^2+2m-1}{m+3}$.

e. $H(y) = \dfrac{y^2 - y + 11}{y^4 - y + 6}$.

f. $L(y) = \dfrac{y^2 + 3y - 2}{y^2 + 4y - 4}$.

g. $M(x) = \dfrac{x^{-2} + x^{-1} + 4}{x^2 + 2x^{-1} - 3}$.

h. $F(x)=\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}+1}$.

i. $F(x)=\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}+x}$.

j. $F(x)=\dfrac{4x+1}{\sqrt{x}+1}$.

3. Obtén la función derivada y evalúala donde se indica.

a. $v(t)=\left(t^4-t^3-2t\right)\left(2-t-t^2\right)$, $v'(0)$.

b. $a(t)=\left(-4t^3+6t\right)\left(8-6t^2\right)$, $a'(1)$.

c. $f(t)=\dfrac{t^3+3t}{8-t^2}$, $f'(1)$.

d. $g(x)=\dfrac{2\sqrt{x}}{x^2+9}$, $g'(1)$.

e. $r(s)=\dfrac{s^2+s}{s^2+2s+1}$, $r'(1)$.

BLOQUE 4

LA REGLA DE LA CADENA

1. Definimos la composición de dos funciones identificando a las funciones componentes como "función interna" y "función externa".
2. Proponemos funciones que pueden interpretarse como una composición de dos funciones derivables; identificadas las funciones componentes obtenemos sus funciones derivadas. Posteriormente evaluamos la derivada de la función externa en la función interna y el resultado obtenido es multiplicado por la derivada de la función interna. Este proceso sirve como modelo para que el alumno utilice la regla de la cadena para derivar composiciones de funciones.

La regla de la cadena es una propiedad de gran importancia por su aplicación en la obtención de la derivada de una función. Este resultado permite calcular la derivada de la composición de funciones. Antes de establecer la regla de la cadena es necesario recordar la operación entre funciones llamada composición.

COMPOSICIÓN DE FUNCIONES

Sean dos funciones: f y g, de modo que el dominio de la segunda esté incluido en el recorrido o codominio de la primera, se define una nueva función que asocia a cada elemento del dominio de $g(x)$ el valor

$$f(g(x)),$$

tal operación se llama composición de funciones

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) \text{ (se lee } g \text{ seguida de } f\text{).}$$

Para derivar una composición de funciones es necesario identificar las funciones que la generan, para tal efecto, a la función que inicialmente se aplica a x la llamaremos "función interna" (en este caso la función g) y a la que aplicamos posteriormente será la "función exterior" (la función f).

SECCIÓN 3.1
BLOQUE 4
EJEMPLOS 1

Identifica las funciones involucradas si se interpreta la función F como una composición de funciones.

1. Si $F(x)=\sqrt{\frac{1}{4}x^4+5x^3}$, sean: $g(x)=\frac{1}{4}x^4+5x^3$ y $f(x)=\sqrt{x}$ las funciones interna y la función externa respectivamente,

$$F(x)=\overbrace{\sqrt{\underbrace{\frac{1}{4}x^4+5x^3}_{\text{función interna}}}}^{\text{función externa}}.$$

2. En $F(x)=\left(8x^3-6x^2+6\right)^8$, sean $g(x)=8x^3-6x^2+6$ y $f(x)=x^8$ las funciones interna y externa respectivamente,

$$F(x)=\overbrace{\left(\underbrace{8x^3-6x^2+6}_{\text{función interna}}\right)^8}^{\text{función externa}}.$$

3. En $F(x)=\left(\frac{x+3}{2x-6}\right)^6$, sean: $g(x)=\frac{x+3}{2x-6}$ y $f(x)=x^6$ las funciones interna y externa respectivamente,

$$F(x)=\overbrace{\left(\frac{x+3}{\underbrace{2x-6}_{\text{función interna}}}\right)^6}^{\text{función externa}}.$$

4. En $F(x)=12-\left(x^2+-8x+24\right)^5$, sean: $g(x)=x^2+8x+24$ la función interna y $f(x)=12-x^5$ la función externa,

$$F(x)=\overbrace{12-\left(\underbrace{x^2+8x+24}_{\text{función interna}}\right)^5}^{\text{función externa}}.$$

PROPIEDAD 3.5

PROPIEDAD 5 (REGLA DE LA CADENA)

Sean f y g dos funcione, que g es derivable en x y f es derivable en $g(x)$, entonces

$$F'(x)=(f\circ g)'(x)=f'(g(x))g'(x).$$

SECCIÓN 3.1 BLOQUE 4 EJEMPLOS 2

1. En $F(x)=\left(4-8x^2\right)^3$, si: $f(x)=x^3$ y $g(x)=4-8x^2$, entonces

$$f'(x)=3x^2 \text{ y } g'(x)=-16x.$$

También

$$f'(g(x))=3\left(4-8x^2\right)^2 \text{ y } f'(g(x))g'(x)=3\left(4-8x^2\right)^2(-16x)$$

Finalmente $F'(x)=f'(g(x))g'(x)=-48x\left(4-8x^2\right)^2$.

2. Para obtener la función derivada de $F(x)=\sqrt[3]{6x^3+2x^2-5x+1}$, sean:

$$f(x)=\sqrt[3]{x} \text{ y } g(x)=6x^3+2x^2-5x+1,$$

entonces

$$f'(x)=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} \text{ y } g'(x)=18x^2+4x-5, \text{ además}$$

$$f'(g(x))=\frac{1}{3\sqrt[3]{\left(6x^3+2x^2-5x+1\right)^2}},$$

$$f'(g(x))g'(x)=\frac{1}{3\sqrt[3]{\left(6x^3+2x^2-5x+1\right)^2}}\left(18x^2+4x-5\right),$$

$$F'(x)=f'(g(x))g'(x)=\frac{18x^2+4x-5}{3\sqrt[3]{\left(6x^3+2x^2-5x+1\right)^2}}.$$

3. Si $F(x)=\sqrt[4]{\left(1+5x-6x^2\right)^5}$, entonces $F(x)=\left(1+5x-6x^2\right)^{\frac{5}{4}}$. Sean:

$$f(x)=x^{\frac{5}{4}} \text{ y } g(x)=1+5x-6x^2,$$

por tanto,

$$f'(x)=\frac{5}{4}x^{\frac{1}{4}}=\frac{5}{4}\sqrt[4]{x} \text{ y } g'(x)=5-12x,$$

$$f'(g(x))=\frac{5}{4}\sqrt[4]{(1+5x-6x^2)} \text{ y } f'(g(x))g'(x)=\frac{5}{4}\sqrt[4]{(1+5x-6x^2)}(5-12x)$$

$$F'(x)=f'(g(x))g'(x)=\frac{5}{4}\sqrt[4]{(1+5x-6x^2)}(5-12x).$$

4. Derivemos la función $L(x)=\left(\frac{1}{x}+4x\right)^4\left(2\sqrt{x}+\frac{1}{5}x^5\right)^6$.

Tratamos a $L(x)=\left(2\sqrt{x}+\frac{1}{5}x^5\right)^6\left(\frac{1}{x}+4x\right)^4$ como un producto de funciones con factores:

$$L_1(x)=\left(2\sqrt{x}+\frac{1}{5}x^5\right)^6 \text{ y } L_2(x)=\left(\frac{1}{x}+4x\right)^4.$$

Para derivar las dos funciones anteriores (factores) utilizamos la regla de la cadena

En $L_1(x)=\left(2\sqrt{x}+\frac{1}{5}x^5\right)^6$, sean $f(x)=x^6$ y $g(x)=2\sqrt{x}+\frac{1}{5}x^5$, entonces

$$f'(x)=6x^5 \text{ y } g'(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}+x^4\text{, así } f'(g(x))=6\left(2\sqrt{x}+\frac{1}{5}x^5\right)^5 \text{ y}$$

$$L_1'(x)=f'(g(x))g'(x)=6\left(2\sqrt{x}+\frac{1}{5}x^5\right)^5\left(\frac{1}{\sqrt{x}}+x^4\right).$$

Para $L_2(x)=\left(\frac{1}{x}+4x\right)^4$, sean $f_2(x)=x^4$ y $g_2(x)=\frac{1}{x}+4x$,

entonces

$$f_2'(x)=4x^3,\ g_2'(x)=-\frac{1}{x^2}+4 \text{ y } f_2'(g_2(x))=4\left(\frac{1}{x}+4x\right)^3\text{, finalmente}$$

$$L_2'(x)=f'(g(x))g'(x)=4\left(\frac{1}{x}+4x\right)^3\left(-\frac{1}{x^2}+4\right).$$

Por último, aplicando la regla de derivación de un producto de funciones,

$$L'(x)=\left(2\sqrt{x}+\frac{1}{5}x^5\right)^6 4\left(\frac{1}{x}+4x\right)^3\left(-\frac{1}{x^2}+4\right)+\left(\frac{1}{x}+4x\right)^4 6\left(2\sqrt{x}+\frac{1}{5}x^5\right)^5\left(\frac{1}{\sqrt{x}}+x^4\right)$$

o bien

$$L'(x)=4\left(2\sqrt{x}+\frac{1}{5}x^5\right)^6\left(\frac{1}{x}+4x\right)^3\left(-\frac{1}{x^2}+4\right)+6\left(\frac{1}{x}+4x\right)^4\left(2\sqrt{x}+\frac{1}{5}x^5\right)^5\left(\frac{1}{\sqrt{x}}+x^4\right)$$

5. Derivemos la función $R(x)=\frac{\sqrt{5+\sqrt{x}}}{4x^3-6x}$.

$R(x)=\frac{\sqrt{5+\sqrt{x}}}{4x^3-6x}$ puede tratarse como una división con dividendo $M(x)=\sqrt{5+\sqrt{x}}$ y divisor $N(x)=4x^3-6x$.

Para derivar $M(x)=\sqrt{5+\sqrt{x}}$, sean

$$f(x)=\sqrt{x} \text{ y } g(x)=5+\sqrt{x},$$

entonces

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}} \text{ y } g'(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}.$$

$$f'(g(x))=\frac{1}{2\sqrt{5+\sqrt{x}}} \text{ y } M'(x)=f'(g(x))g'(x)=\frac{1}{2\sqrt{5+\sqrt{x}}}\frac{1}{\sqrt{x}}.$$

También $N'(x)=12x^2-6$, por último, aplicando la regla para derivar una división obtenemos

$$N'(x)=\frac{\left(4x^3-6x\right)\left(\dfrac{1}{2\sqrt{5\sqrt{x}+x}}\right)-\left(\sqrt{5+\sqrt{x}}\right)\left(12x^2-6\right)}{\left(4x^3-6x\right)^2}.$$

SECCIÓN 3.1 BLOQUE 4 EJERCICIOS 1	Nombre Fecha

1. Identifica las funciones componentes, derívelas y obtenga la derivada de la función.

a. $F(x)=\left(\frac{1}{3}x^3-2x+7\right)^3$.

$f(x)=$ $g(x)=$

$f'(x)=$ $g'(x)=$

$f'(g(x))=$ $F'(x)=f'(g(x))g'(x)=$

b. $F(x)=\left(\sqrt{x}-x-4\right)^4$.

$f(x)=$ $g(x)=$

$f'(x)=$ $g'(x)=$

$f'(g(x))=$ $F'(x)=f'(g(x))g'(x)=$

c. $G(x)=\left(\frac{1}{x^2}-3x^5+4\right)^4$.

$f(x)=$ $g(x)=$

$f'(x)=$ $g'(x)=$

$f'(g(x))=$ $G'(x)=f'(g(x))g'(x)=$

d. $G(y)=\left(3\sqrt[3]{y}-4y^{-1}-11\right)^{-2}$.

$f(y)=$ $g(y)=$

$f'(y)=$ $g'(y)=$

$f'(g(y))=$ $G'(y)=f'(g(y))g'(y)=$

e. $H(t)=\sqrt{\frac{3}{t^2}-4t+5}$.

$f(t)=$ $g(t)=$

$f'(t)=$ $g'(t)=$

$f'(g(t))=$ $H'(t)=f'(g(t))g'(t)=$

f. $H(t)=\sqrt{8t-\sqrt{5t}}$.

$f(t)=$ $g(t)=$

$f'(t)=$ $g'(t)=$

$f'(g(t))=$ $H'(t)=f'(g(t))g'(t)=$

2. Obtén la función derivada.

a. $H(t)=\left(t^2+6\right)^2\left(t^2-4\right)^2$.

b. $v(t)=\left(t^2+6\right)^3\left(t^2-\sqrt{t}\right)^2.$

c. $v(t)=\sqrt{\dfrac{t^2+2}{t^3-1}}.$

d. $a(t)=\dfrac{(t-10)^2}{(t+10)^4}.$

e. $v(t)=\dfrac{(t+1)^2}{\sqrt{t+8}}$.

f. $v(t)=\dfrac{1}{\sqrt[5]{t^2+t+4}}$.

g. $v(x)=\dfrac{(x-1)^2}{(1-x^2)^2-x}$.

h. $F(x)=\sqrt{\dfrac{x}{(4-x^2)^4+1}}$.

i. $F(x)=\left(\sqrt{x}+4\right)^{-1}\left(\sqrt{x^2+2}\right)$.

FIN DE SECCIÓN

SECCIÓN 3.2 PROBLEMAS DE APLICACIÓN

APRENDIZAJES

8. Identifica a la derivada como una función que proporciona la pendiente de la recta tangente en cualquier punto de la gráfica de la función original.

9. Identifica a la derivada de una función que proporciona la razón de cambio instantáneo.

10. Utiliza la función derivada para resolver problemas en diferentes contextos.

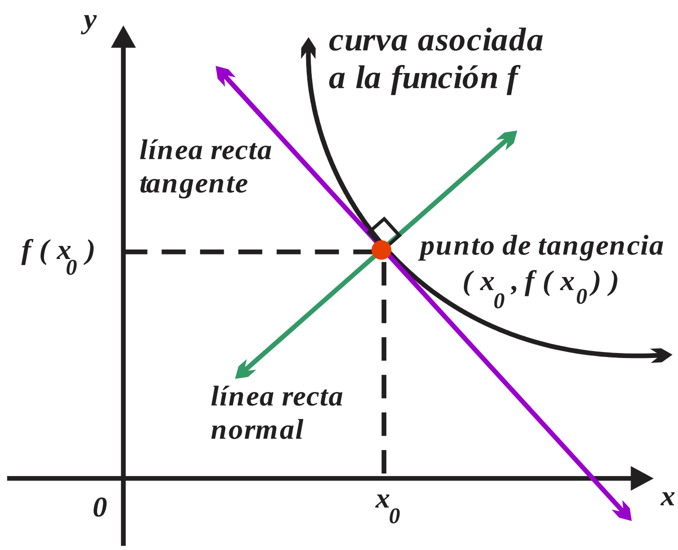
TEMÁTICA

3. Problemas de aplicación de cambio instantáneo, por ejemplo: cálculo de tangentes, cálculo de velocidades, cálculo de tasa marginal.

BLOQUE 1

LÍNEA RECTA TANGENTE Y LÍNEA RECTA NORMAL

Utilizando preguntas pertinentes como guía se induce al estudiante para que, utilice el significado geométrico de la derivada y obtenga la ecuación de la línea recta que es tangente a la curva asociada a una función derivable.



SECCIÓN 3.2

SECUENCIA DIDÁCTICA 1

LÍNEA RECTA TANGENTE Y LÍNEA RECTA NORMAL

INICIO

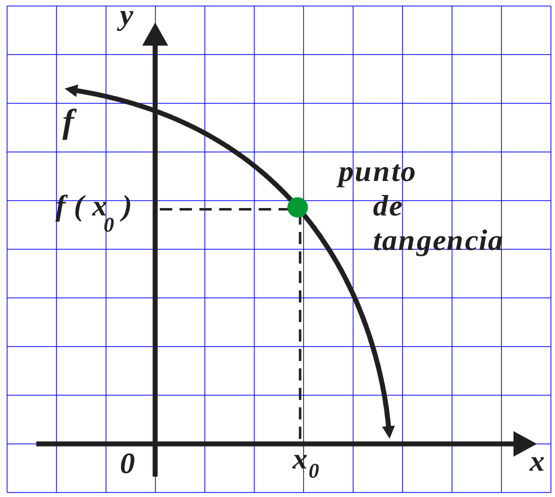
a. Sea f una función derivable sobre un intervalo específico, ¿cuál es el significado geométrico de la función derivada que tiene asociada?

b. Escribe la forma punto pendiente de la línea recta que contiene al punto $p_t\left(x_0\ ,\ f\left(x_0\right)\right)$ y tiene pendiente $m = f'\left(x_0\right)$.

DESARROLLO

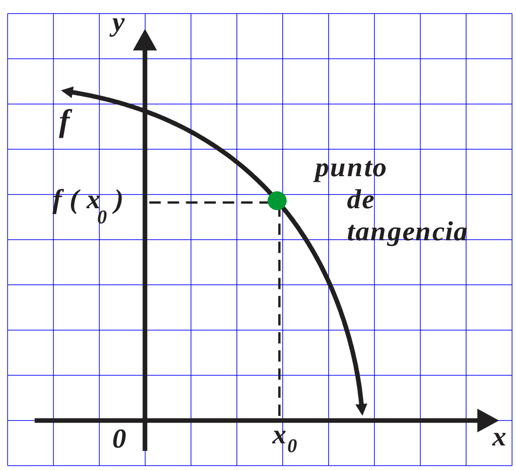
c. Determina la ecuación de la línea recta que es tangente a la curva asociada a la función f en el punto de tangencia $p_t\left(x_0\ ,\ f\left(x_0\right)\right)$ y pendiente $m = f'\left(x_0\right)$.

d. Traza la línea recta tangente de pendiente $m = f'(x_0)$ y tangente en el punto $p_t(x_0, f(x_0))$ a la curva asociada a la función f.



e. ¿Qué nombre recibe y que condición satisface la línea recta perpendicular a una línea recta tangente a una curva?

f. Traza la línea recta normal de: pendiente $m = f'(x_0)$ y punto de tangencia $p_t(x_0, f(x_0))$ a la curva asociada a la función f.



g. Determina la ecuación de la línea recta perpendicular a: la línea recta tangente a f en $p_t\,(\,x_0\;,\;f\,(\,x_0\,)\,)$ con pendiente $m = f'(\,x_0\,)$.

CIERRE

h. COMPLETA

i. La ecuación de la línea recta tangente a la curva asociada a la función f (derivable) en el punto de tangencia $p_t\,(\,x_0\;,\;f\,(\,x_0\,)\,)$ y pendiente $m = f'(\,x_0\,)$ es:

ii. La ecuación de la línea recta normal a la curva asociada a la función f en el punto de tangencia $p_t\,(\,x_0\;,\;f\,(\,x_0\,)\,)$ y pendiente $m = f'(\,x_0\,)$ es:

Fin de actividad

PROPIEDAD 3.6

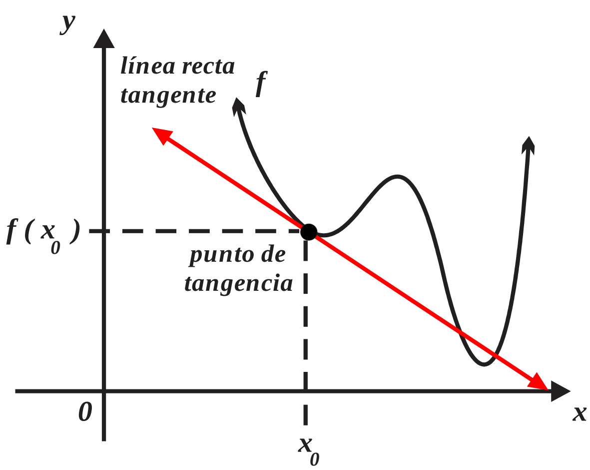
Si f es una función derivable sobre el intervalo que contiene al número x_0, entonces:

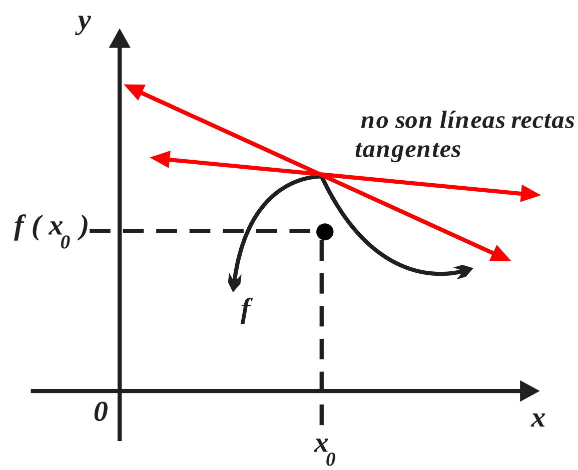
a. La línea recta tangente a la curva asociada a f en $(x_0, f(x_0))$ (punto de contacto o tangencia), pendiente $m_T = f'(x_0)$ y ecuación $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$.

b. La línea recta normal a la curva asociada a f en el punto $(x_0, f(x_0))$ (punto de contacto o tangencia), pendiente $m_T = f'(x_0)$ $m_n = -\dfrac{1}{f'(x_0)}$ $f'(x_0)$ y ecuación

$$y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0), \text{ siempre que } f'(x_0) \neq 0.$$

También se define a una línea **recta tangente** como aquella que corta a la curva asociada a una función en un único punto, puesto que es una definición muy intuitiva, estrictamente hablando se trata de una **definición incompleta y por tanto, es errónea**. La ***propiedad 3.6*** es local (está definida con base a un intervalo).





SECCIÓN 3.2
BLOQUE 1
EJEMPLOS 1

CONSTRUCCIÓN DE LA ECUACIÓN DE LA RECTA TANGENTE Y ECUACIÓN DE LA RECTA NORMAL

a. El cálculo de la ecuación de la línea recta tangente, en el punto $p_T(1, f(1))$, a la curva asociada a la función $f(x) = x^2 + 1$ requiere:

i. Obtener explícitamente el punto $p_T(1,\ f(1))$. Puesto que $f(1)=(1)^2+1=2$, el punto de tangencia es $p_T(1,2)$.

ii. Obtener la función que describe el comportamiento de la pendiente de la línea recta tangente, es decir, la función derivada. Puesto que

$$f'(x)=2x, \text{ entonces } m_T=f'(1)=2(1)=2.$$

iii. Utilizar la forma punto - pendiente de la línea recta, es decir, la ecuación

$$y-y_0=m(x-x_0)),$$

por tanto,

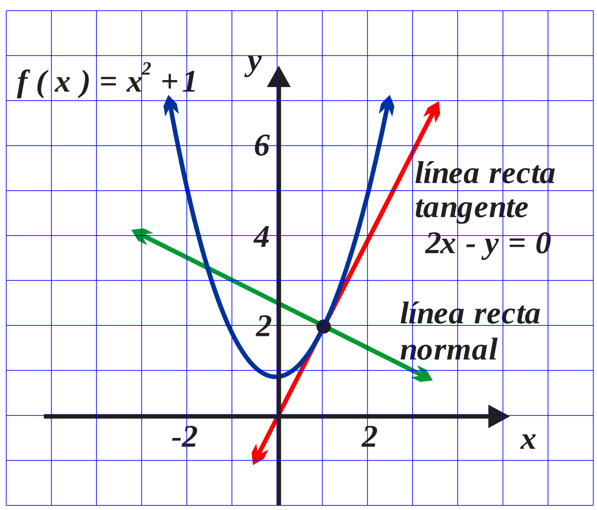
$$y-2=2(x-1) \text{ o en la forma general } 2x-y=0.$$

iv. La línea recta normal y la línea recta tangente contienen un punto en común (el punto de tangencia) y el producto de sus pendientes es menos uno, es decir, $m_T\cdot m_n=-1$. Luego

$$2\cdot m_n=-1, \text{ de donde } m_n=-\frac{1}{2}.$$

La línea recta normal tiene pendiente $m_n=-\frac{1}{2}$ y contiene al punto $p_T(1,2)$, por tanto, su ecuación es

$$y-2=-\frac{1}{2}(x-1), \text{ escrita en la forma general } x+2y-5=0.$$



b. Obtengamos la ecuación de: la recta tangente y de la recta normal a la curva de

$$f(x)=2\sqrt{2-x}, \text{ si } x_0=-2.$$

i. Para obtener la ordenada del punto de tangencia evaluamos en $x_0=-2$, por tanto,

$$y_0=2\sqrt{2-(-2)}=4,$$

y el punto de tangencia es

$$p_T(-2\ ,\ 4).$$

ii. La derivada de $f(x)=2\sqrt{2-x}$ es la función

$$f'(x)=\frac{-1}{\sqrt{2-x}},$$

entonces

$$m_T=f'(-2)=\frac{-1}{\sqrt{2-(-2)}}=-\frac{1}{2}.$$

iii. Si sustituimos

$$m_T=-\frac{1}{2},\ x_0=-2 \text{ y } y_0=4$$

en la forma punto pendiente de la línea recta obtenemos

$$y-4=-\frac{1}{2}(x-(-2)),$$

o bien

$$x+2y-6=0.$$

iv. La línea recta normal y la línea recta tangente son perpendiculares, se intersecan en el punto $p_T(-2\ ,\ 4)$ y el producto de sus pendientes es menos uno, es decir,

$$m_T\cdot m_n=-1.$$

Luego

$$\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot m_n=-1,$$

es decir,

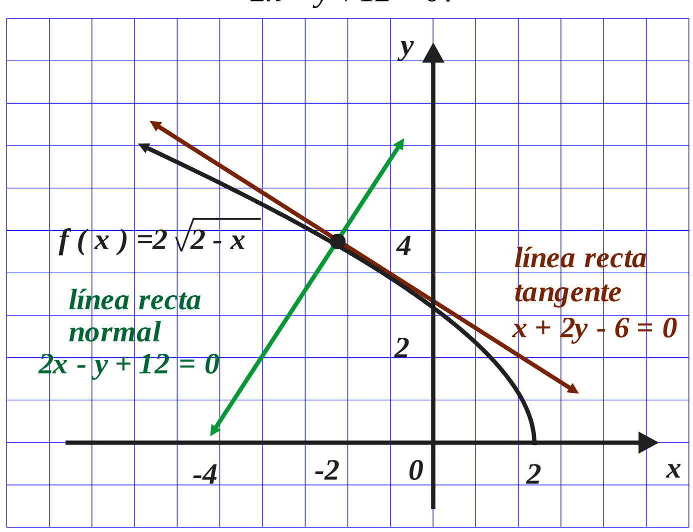
$$m_n=2.$$

La línea recta normal tiene pendiente $m_n=2$ y contiene al punto $p_T(-2\ ,\ 4)$, por tanto, su ecuación es

$$y-4=2(x-(-2)),$$

escrita en la forma general

$$2x-y+12=0.$$



SECCIÓN 3.2 BLOQUE 1 EJERCICIOS 1	Nombre Fecha

1. Deriva y calcula la pendiente de la línea recta tangente en el número indicado.

i. $f(x) = x + \frac{4}{x}$, $x = -2$.

ii. $f(x) = \frac{1}{1+2x}$, $x = 2$.

iii. $s(t) = \frac{t^2 - 1}{t^2 + 1}$, $t = 3$.

iv. $y(t) = (t+3)^4$, $t = -2$.

2. Determina todos los valores de la variable independiente tales que la curva asociada a f tiene líneas rectas tangentes de pendiente cero.

i. $f(x)=\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{2}x^2$.

ii. $f(x)=\frac{2}{1+x^2}$.

iii. $g(t)=\frac{t}{t^2+1}$.

iv. $y(t)=\sqrt{t^2+2t+3}$.

3. Obtén la ecuación de: la línea recta tangente y la ecuación de la línea recta normal a la curva asociada a $f(x)=x^4-3x^3+5$ en el punto de abscisa $x_0=1$.

4. Obtén la ecuación de: la línea recta tangente y de línea recta normal a $f(x) = 2x^3 + 5x^2 + 3x - 1$ en el punto de abscisa $x_0 = -1$.

5. Construye la ecuación de: la línea recta tangente y de la línea recta normal a la curva asociada a $f(x) = -2x^4 - 3x^3 + 5x$ en el punto de abscisa $x_0 = -2$.

6. Calcula la ecuación de la línea recta tangente y la ecuación de la línea recta normal a la curva de la función $f(x)=\frac{4}{\sqrt{x^2+9}}$ en el punto de abscisa $x_0=4$.

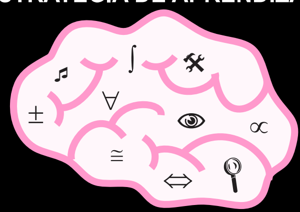
7. Obtén la ecuación de la línea recta tangente y la ecuación de la línea recta normal a la curva asociada a $f(x) = x\sqrt{x^2+7}$ en el punto de abscisa $x_0 = 3$.

8. Determina la ecuación de la línea recta tangente a la curva asociada $f(x) = x^2 - 3x + 4$ paralela a la línea recta de ecuación $3x - y - 2 = 0$.

BLOQUE 2

MOVIMIENTO

ESTRATEGIA DE APRENDIZAJE



Se guía al estudiante para que interpretando la derivada asociada a una función como razón de cambio instantánea, modele y analice situaciones de variaciones de cambio interrelacionadas.

TÉRMINOS PERTINENTES

Función derivada: Describe el cambio de la pendiente de la línea recta tangente en la curva asociada a la función, o bien, función que describe el cambio instantáneo de una cantidad variable (función) en términos de la variable independiente.

Pendiente de la línea recta tangente: Número que se obtiene al derivar una función y evaluarla en la abscisa de un punto.

Rapidez: Cambio instantáneo de una cantidad variable en un instante. La relación existente entre el desarrollo de una acción, proceso o fenómeno físico y el tiempo transcurrido se conoce como rapidez.

Velocidad: Cambio instantáneo de posición de un objeto.

Aceleración: Cambio instantáneo en la velocidad con respecto al tiempo. La derivada de la función que describe la velocidad de un objeto.

SECCIÓN 3.2
BLOQUE 2
EJEMPLOS 1

EJEMPLO 1. ALTURA DE UNA PELOTA

La altura de una pelota respecto al suelo al tiempo t (en segundos) es $y(t) = -4t^2 + 10t + 25$ metros.

i. Entonces la función que describe la velocidad instantánea de la pelota es

$$v(t) = y'(t) = -8t + 10 \;\; m \cdot s^{-1}.$$

ii. La velocidad instantánea a los 2 segundos es $v(2) = -8(2) + 10 = -6 \;\; m \cdot s^{-1}$.

iii. Su velocidad instantánea es cero cuando $-8t + 10 = 0$, es decir, a los $t = \frac{5}{4}$ segundos.

iv. Su aceleración instantánea está regida por la función $a(t) = v'(t) = -8 \;\; m \cdot s^{-1}$.

SECCIÓN 3.2 BLOQUE 2 EJERCICIOS 1	Nombre Fecha

1. MOVIMIENTO DE UN OBJETO

En un tiempo t la posición de un objeto moviéndose a lo largo del eje s es $s(t) = t^3 - 6t^2 + 9t$ metros, determina:

i. La función que describe su velocidad instantánea.

ii. La función que describe su aceleración instantánea.

2. MOVIMIENTO DE UNA PARTÍCULA

Una partícula se mueve a largo del eje X de acuerdo con la función $X(t) = 2t^3 + 5t^2 + 2$, en donde t representa el tiempo medido en segundos y X en metros.

Determina la función velocidad y la función aceleración en cualquier instante t.

3. La función que describe el movimiento rectilíneo de una partícula es $X(t) = t^3 - 27t + 1$.

i. ¿En qué momento la velocidad en nula?

ii. Calcula la aceleración en el instante en que la velocidad es nula.

4. Determina la rapidez, a los $t=10$ segundos, de un móvil que se mueve de acuerdo con la función posición $x(t)=9.8t^2+15$ en donde x está medida en metros y t en segundos.

5. Un móvil se mueve de acuerdo con la función posición $x(t)=t^3+48t$ metros. Obtén:

i. La función que describe su rapidez instantánea en un tiempo t.

ii. Su rapidez instantánea a los $t=5$ segundos.

iii. ¿En qué tiempo el móvil tiene una rapidez instantánea de $64\ m\,s^{-1}$?

6. Calcula la aceleración, a los $t=10$ segundos, de un móvil, cuya rapidez está descrita por la función $r(t)=10t^4+10$, con $t>0$ (suponiendo que r está dada en metros por segundo, y t en segundos).

7. La rapidez de un móvil está descrita por la función $r(t)=t^4-200t$, $t>0$ metros por segundo, determina:

i. El cambio instantáneo en la aceleración a los $t=5$ segundos es:

ii. El instante en que el móvil tiene un cambio de rapidez de $56\ m\,s^{-2}$.

8. Una ciudad está afectada por una epidemia generada por cierto virus. Las autoridades sanitarias estiman que t días después del inicio de la epidemia, el número de personas infectadas por el virus se modela por la función $p(t)=\left(40t^2-2t^3\right)^2$.

i. Determina el modelo que describe la expansión del número de infectados.

ii. Calcula la rapidez a la que se expande el virus a los 2 días.

9. El costo C de pedido y entrega de las partes electrónicas utilizadas en la elaboración de cierto producto es $C(x)=200\left(\frac{200}{x}-\frac{x}{x+30}\right)^2$ pesos, x representa el número de unidades solicitadas.

i. Determina el modelo que describe la rapidez de cambio del costo de pedido en término del número de unidades solicitadas.

ii. Calcula la rapidez de cambio del costo de pedido cuando se solicitan diez unidades.

BLOQUE 3

RAZONES DE CAMBIO RELACIONADAS

Presentando situaciones que el alumno analiza y toma como base en la modelación de funciones que relacionan a las variables involucradas con el tiempo.

Existen situaciones en las que una variable es función de otra variable, que a la vez está definida como una función de una segunda variable. Supongamos que $y = f(x)$ lo que significa que la variable y depende (funcionalmente) de la variable x pero también $x = x(t)$, es decir, la variable x depende (es función) de la variable t (por ejemplo t puede representar al tiempo). En tal caso tenemos el modelo

$$y = f(x(t))$$

y la variación instantánea de y respecto a t, esto es

$$y'(t) = f'(x(t))x'(t).$$

SECCIÓN 3.2
BLOQUE 3
EJEMPLOS 1

1. Un globo con forma cúbica se está inflando de manera que su volumen V crece de acuerdo al crecimiento de la longitud de sus aristas, es decir,

$$V = V(x),$$

que a su vez está variando con el transcurso del tiempo, es decir,

$$x = x(t),$$

como consecuencia $V(t) = V(x(t))$, el cambio instantáneo del volumen es la función

$$V'(t) = \frac{d}{dt}V(x(t)) = V'(x(t))x'(t).$$

2. El área de una región rectangular $A = xy$ depende de las variables x y y. Si x y y cambian con el tiempo, entonces el cambio instantáneo del área es la función

$$A'(t)=\frac{d}{dt}A(t)=x(t)\frac{d}{dt}y(t)+y(t)\frac{d}{dt}x(t).$$

3. El volumen de un cubo con longitud de lado x está dado por $V=x^3$, si x cambia con el tiempo, entonces

$$V=[x(t)]^3$$

y

$$V'(t)=\frac{d}{dt}V(x)=3[x(t)]^2\frac{dx(t)}{dt}.$$

4. El volumen de cilindro circular recto de longitud de radio de la base r y altura h está dado por $V=\pi r^2 h$. Si tanto r y h son funciones del tiempo, entonces

$$V=\pi[r(t)]^2[h(t)]$$

y

$$\frac{d}{dt}V(t)=\pi\left[[r(t)]^2\frac{d}{dt}[h(t)]+2[h(t)][r(t)]\frac{d}{dt}[r(t)]\right].$$

5. El volumen de una esfera está dado por $V=\frac{4}{3}\pi r^3$, si r es función del tiempo, entonces

$$V=\frac{4}{3}\pi[r(t)]^3$$

y

$$V'(t)=\frac{d}{dt}V(t)=4\pi[r(t)]^2\frac{d}{dt}[r(t)].$$

6. El volumen de un cono en el que el radio de la base es r y la altura es altura h está dado por

$$V=\frac{\pi}{3}r^2h\ .$$

Si tanto r como h son dependen del tiempo, entonces $V(t)=\frac{\pi}{3}[r(t)]^2[h(t)]$ consecuentemente

$$V'(t)=\frac{d}{dt}V(t)=\frac{\pi}{3}\left[[r(t)]^2\frac{d}{dt}[h(t)]+2[r(t)][h(t)]\frac{d}{dt}[r(t)]\right].$$

SECCIÓN 3.2 BLOQUE 3 EJERCICIOS 1	Nombre Fecha

1. El líquido que emana de una manguera se propaga humedeciendo circularmente su alrededor. El radio cambia a razón de 2 centímetros por segundo. Determinemos la razón de humedecimiento alrededor de la boca de esta en función del tiempo, sea r el radio del círculo que genera el líquido, entonces el área de la región circular es $A=\pi r^2$, el radio cambia al transcurrir el tiempo, es decir, $r=r(t)$, consecuentemente $A(t)=\pi r^2(t)$.

a. Traza una figura que ilustre tal situación.

b. La rapidez (instantánea) de cambio de la región circular en función del radio (de acuerdo con la regla de la cadena) es:

c. La rapidez de cambio del área de la región circular cuando el radio mide 10 centímetros es:

2. Se infla un globo esférico introduciéndole gas a razón constante de 25 centímetros cúbicos por segundo. Para determinar la rapidez de cambio del radio del globo, recordemos que el volumen de una esfera en función de la longitud de su radio se calcula con $V(r)=\frac{4}{3}\pi r^3$. Si el crecimiento del radio depende del tiempo, entonces $r=r(t)$, por tanto, al componer las funciones anteriores obtenemos

$$V(t)=\frac{4}{3}\pi r^3(t).$$

a. Traza una figura que ilustre tal situación.

b. La rapidez instantánea del cambio del volumen en el tiempo t es:

c. La rapidez de cambio del radio en el tiempo t es:

d. Si se introduce gas a razón de 25 centímetros cúbicos por segundo, el radio cambia a una rapidez:

e. Cuando se introduce gas al globo a razón de 25 centímetros cúbicos por segundo, y el radio mide 5 centímetros, entonces el radio está cambiando con rapidez:

4. Se derrite una esfera de parafina y su radio se contrae de 30 a 20 centímetros, con una rapidez constante en 50 minutos.

a. Dibuja una figura que ilustre tal situación.

b. Calcula la rapidez de cambio del radio de la esfera.

c. El volumen de la esfera y su radio se relacionan con la función $V = \frac{4}{3}\pi r^3$, determina la función que describe el cambio instantáneo del volumen en función del tiempo.

d. Calcula la rapidez de cambio del volumen de la esfera cuando esta tiene un radio de 25 centímetros.

5. La longitud de las aristas x de un cubo aumentan con el tiempo a razón constante de 4 centímetros por segundo.

a. Traza una figura que ilustre tal situación.

b. Determina la rapidez de cambio del volumen del cubo cuando las aristas miden x centímetros.

c. Si las aristas miden x centímetros, determina la rapidez de cambio del volumen del cubo.

d. Si $\frac{d\,x}{dt} = 4\ cms^3 s^{-1}$, determina la rapidez con que cambia el volumen del cubo.

e. Calcula la rapidez con que está cambia el volumen del cubo cuando las aristas miden $x = 6\ cms$.

6. Se descarga cemento sobre una superficie plana formándose un montículo cónico (cono circular) con altura del doble del radio de la base.

a. Traza una figura que ilustre tal situación.

b. Escribe la función que describe el volumen del montículo en función del radio de la base del cono.

c. Si la longitud del radio depende del tiempo $r = r(t)$, entonces la función que describe el volumen en función del tiempo es:

d. Calcula la rapidez de cambio del volumen en función del tiempo.

e. Calcula la rapidez de cambio del radio en función del cambio instantáneo del volumen y del tiempo.

f. Si el radio del montículo está cambiando a rapidez constante de 2 centímetros por segundo, ¿cómo está cambiando el volumen?

g. Si el volumen del montículo cambia con rapidez constante de 10 centímetros cúbicos por segundo, ¿a qué rapidez cambia el radio?

7. Un almacén cónico (cono circular recto) invertido tiene altura $H = 20$ metros y radio de base $r = 5$ metros. Al almacén entra brea a rapidez constante. Cuando la superficie de la brea alcanza la altura de 4 metros, el nivel sube a razón de $0.1\, m \cdot min^{-1}$.

a. Traza una figura que muestre tal situación.

b. Traza una figura que muestre: una sección longitudinal del cono y las dimensiones correspondientes.

c. Establece la relación de proporcionalidad: radio r es a la altura h como:

d. Sustituye los datos conocidos en la relación que obtuviste en el inciso anterior y despeja r.

e. Rescribe el volumen del cono ($V = \frac{\pi}{3} r^2 h$) como función de la altura.

f. Supón que la altura de la capa de brea, y en consecuencia su volumen, depende del tiempo y obtén la rapidez de cambio instantáneo del volumen del cono.

g. Considera que cuando la brea alcanza una altura de $h = 4$ metros, su superficie sube a razón de $0.1\, m \cdot min^{-1}$ y determina que tan rápido cambia el volumen.

8. Se vierte un líquido en un tanque cilíndrico (cilindro circular recto) con longitud de altura cuatro veces la longitud del radio.

a. Traza una figura que muestre tal situación.

b. La función que describe el volumen del líquido en el tanque $(V = \pi r^2 h)$, en términos de su altura en el tanque es:

c. La función que describe el volumen del líquido en el tanque $(V = \pi r^2 h)$, en función del tiempo es:

d. La rapidez de cambio del volumen en función del tiempo es:

e. La rapidez de cambio de la altura del líquido es:

f. Cuando la altura del líquido alcanza $h = 2$ metros y introduce a este agua a razón constante de 0.005 metros cúbicos por segundo (5 litros por segundo), es decir , $\frac{d}{dt}V(t) = 0.005\ m^3 \cdot s^{-1}$, ¿qué tan rápido cambia la altura del líquido?

FIN DE SECCIÓN

3.3 EVALUACIÓN DIAGNÓSTICA

Sugerimos al lector responderla al inicio de la unidad o tema para medir su nivel de conocimientos

1. La transformación que se aplica a una función para obtener su función derivada es:

2. La función potencia de grado n se define como:

3. La función derivada asociada a la función polinomial de grado n tiene grado:

4. El producto de las funciones f y g (con dominio común) se representa por

5. La función recíproca de la función f es:

6. Si $f(x)=3x-2$ y $g(x)=x^2-x$, entonces $(f\cdot g)(1)=$

7. Si $f(x)=3x-2$ y $g(x)=x^2-x$, entonces $\left(\frac{f}{g}\right)(2)=$

8. El inverso aditivo de $f'(x)\cdot f(x+\Delta x)$ es:

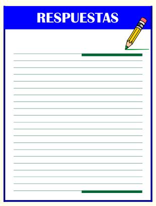
9. Si $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=L$ y $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=M$, entonces $\lim\limits_{x\to x_0}(f\cdot g)(x)=$

10 Evalúa la función $g(x)=x^2+2$ en $x=2$.

11. Si evalúas $f(x)=\frac{1}{x+4}$ en $g(x)=x^2+2$, obtienes:

ESCALA DE ACREDITACIÓN DE LA EVALUACIÓN DIAGNÓSTICA (SUFICIENTE Y NO SUFICIENTE)

SUFICIENTE: 7 O MÁS PUNTOS
NO SUFICIENTE: 6 O MENOS PUNTOS



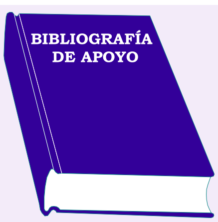
RESPUESTAS A LAS PREGUNTAS DEL EXAMEN DIAGNÓSTICO

1. $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ o $\lim\limits_{t \to x} \dfrac{f(t)-f(x)}{t-x}$. **2.** $f(x)=x^n$, donde $n \in IN$ y $x \in IR$.

3. $n-1$. **4.** $(f \cdot g)(x)$. **5.** $\dfrac{1}{f(x)}$, siempre que $f(x) \neq 0$. **6.** $(f \cdot g)(1)=0$.

7. $\left(\dfrac{f}{g}\right)(2)=2$. **8.** $-f'(x) \cdot f(x+\Delta x)$. **9.** $\lim\limits_{x \to x_0} (f \cdot g)(x)=L \cdot M$. **10.** Si $g(2)=6$.

11. $g(f(x))=\left(\dfrac{1}{x+4}\right)^2+2$.



SI NO APROBASTE EL EXAMEN DIAGNÓSTICO, ENTONCES LA REVISIÓN DE LOS SIGUIENTES DOCUMENTOS PUEDE AYUDARTE.

1. Purcell, E. (2007). *Calculo diferencial e integral Novena edición*. México: Pearson - Addison Wesley.

2. Stewart, J. E. (2012). Funciones. *Precálculo Matemáticas para el cálculo, Sexta edición.* México: Cengage Learning.

FIN DE SECCIÓN

3.4 EVALUACIÓN DE LA UNIDAD 2

PROCESOS INFINITOS Y LA NOCIÓN DE LÍMITE

CONCEPTOS

1. La función derivada asociada a una razón de funciones derivable es:

2. La función derivada asociada a la función $f(x) = x^n$ es la función con regla de correspondencia:

3. La propiedad de linealidad de la derivada de una función afirma: si $f(x)$, $g(x)$ son derivables y $c \in IR$, entonces: $[\, c \cdot f + g \,]'(x) =$

4. Al aplicar la regla de la cadena para derivar una función que puede interpretarse como la composición de las funciones $f \circ g$ es necesario multiplicar por la derivada de:

5. Si en $f(x)$, la variable x depende del tiempo t, entonces $\dfrac{df}{dt} =$

VALOR: Un punto por inciso (máximo 5 puntos)

DESARROLLOS OPERATIVOS (1)

1. Si $f(x)=\frac{8}{x}$ calcula:

i. $f(x+\Delta x)$.

ii. $f(x+\Delta x)-f(x)$.

iii. $\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$.

iv. $f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$.

2. Si $f(x)=x^{-2}$ calcula:

i. $f(x+\Delta x)$.

ii. $f(x+\Delta x)-f(x)$.

iii. $\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$.

iv. $f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$.

3. Calcula la función derivada asociada a $f(x)=\sqrt{x}$:

VALOR: Un punto por inciso (máximo 3 puntos)

DESARROLLOS OPERATIVOS (2)

1. Si las funciones f, g y h son derivables sobre un mismo intervalo de números reales, entonces $[\, f+g+h\,]'(x)$.

2. Si las funciones f, g y h son derivables sobre un mismo intervalo de números reales, entonces $[\, f\cdot g+h\,]'(x)= f(x)\cdot g'(x)+g(x)\cdot f'(x)++h'(x)$.

3. Si las funciones f y g son derivables sobre un mismo intervalo de números reales y f, g no se anulan, entonces $\left[\dfrac{1}{f\cdot g}\right]'(x)$.

4. Si las funciones f, g y h son derivables y están "bien definidas", entonces $\left[\dfrac{1}{f\circ g}\right]'(x)=-\dfrac{[\, f'(g(x))g'(x)\,]}{[\, f(x)\cdot g(x)\,]^2}$

5. Si las funciones f, g y h son derivables y están "bien definidas", entonces $[\, f\circ(g\circ h)\,]'(x)$

VALOR: Dos puntos por inciso (máximo 10 puntos)

DESARROLLOS OPERATIVOS (3)

1. Si $f(x)=(4-x^2)\left(4-\dfrac{1}{x+1}\right)$, entonces $f'(0)$.

2. Si $f(x)=\dfrac{7+\sqrt{x-1}}{\sqrt{x^2+8}}$, entonces $f'(0)=$.

3. Si $v(t)=\sqrt{9\left(\dfrac{1}{t}+t\right)(t^2+6t)}$, entonces $v'(1)=$.

4. Si $a(x)=\left(\dfrac{2}{x^2-2\sqrt[3]{x}}\right)^2$, entonces $a'(1)=$.

VALOR: Dos puntos por inciso (máximo 8 puntos)

PARA PENSAR

1. Determina la ecuación de la línea recta tangente a la parábola asociada a la función $f(x)=x^2+x$ que paralela a la línea recta de ecuación $3x+y-2=0$ (forma general).

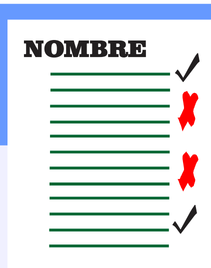
2. Determina las ecuaciones de las líneas rectas que contienen al punto $(2,-3)$ y son tangentes a la curva asociada a la función $f(x)=x^2+x$ (forma general).

3. Dos motociclistas M_1 y M_2 parten del mismo punto P (ambos con velocidad constante). M_1 viaja al oriente con velocidad $V_1 = 25\dfrac{Kms.}{h}$ y M_1 viaja al norte con velocidad $V_2 = 60\dfrac{Kms.}{h}$. ¿Con qué razón aumenta la distancia que los separa en el tiempo $t = 2$ horas?

4. La longitud del radio de una circunferencia aumenta a razón de 1 centímetro por segundo ¿Cuál será la razón de cambio del área de la circunferencia cuando su radio sea igual a 5 centímetros?

5. Hacia un depósito cilíndrico de base circular de 5 metros de radio, fluye agua a razón de 25 litros (decímetros cúbicos) por segundo. Calcula la rapidez a la que sube la superficie del agua.

VALOR: tres puntos por problema (máximo 12 puntos)



RESPUESTAS A LA EVALUACIÓN DE LA UNIDAD 3

DERIVADAS DE FUNCIONES ALGEBRAICAS

CONCEPTOS

1. Una función.

2. $f\left(x\right)=nx^{n-1}$.

3. $\left[\,f\cdot g+h\,\right]'\left(x\right)=c\cdot f'\left(x\right)+g'\left(x\right)$

4. "la función g".

5. $\dfrac{df}{dt}=f'\left(x\left(t\right)\right)\dfrac{dx}{dt}$.

DESARROLLOS OPERATIVOS (1)

1. Si $f\left(x\right)=\dfrac{8}{x}$ calcula:

i. $\dfrac{8}{x+\Delta x}$.

ii. $\dfrac{8}{x+\Delta x}-\dfrac{8}{x}$.

iii. $\dfrac{\dfrac{8}{x+\Delta x}-\dfrac{8}{x}}{\Delta x}=-\dfrac{8}{x^2+x\cdot\Delta x}$.

iv. $f'\left(x\right)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\dfrac{8}{x+\Delta x}-\dfrac{8}{x}}{\Delta x}=-\dfrac{8}{x^2}$.

2. Si $f\left(x\right)=x^{-2}$ calcula:

i. $\dfrac{1}{\left(x+\Delta x\right)^2}$.

ii. $\dfrac{1}{\left(x+\Delta x\right)^2}-\dfrac{1}{x^2}$.

iii. $\dfrac{\dfrac{1}{(x+\Delta x)^2}-\dfrac{1}{x^2}}{\Delta x}$.

iv. $f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\dfrac{1}{(x+\Delta x)^2}-\dfrac{1}{x^2}}{\Delta x}=-\dfrac{2}{x^3}$.

3. $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

DESARROLLOS OPERATIVOS (2)

1. $[f+g+h]'(x)=f'(x)+g'(x)+h'(x)$.

2. $[f\cdot g+h]'(x)=f(x)\cdot g'(x)+g(x)\cdot f'(x)+h'(x)$.

3. $\left[\dfrac{1}{f\cdot g}\right]'(x)=-\dfrac{f(x)\cdot g'(x)+g(x)\cdot f'(x)}{[f(x)\cdot g(x)]^2}$.

4. $\left[\dfrac{1}{f\circ g}\right]'(x)=-\dfrac{[f'(g(x))g'(x)]}{[f(x)\cdot g(x)]^2}$.

5. $[f\circ(g\circ h)]'(x)=f'((g\circ h)(x))\cdot g'(h(x))\cdot h'(x)$.

DESARROLLOS OPERATIVOS (3)

1. $f'(0)=4$.

2. $f'(0)=\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$.

3. $v'(1)=\dfrac{24}{\sqrt{14}}$.

4. $a'(1)=\dfrac{32}{3}$.

PARA PENSAR

1. $3x+y-4=0$.

2. $x+y+1=0$ y $11x-y-25=0$.

3. $V_2=65\dfrac{Kms.}{h}$.

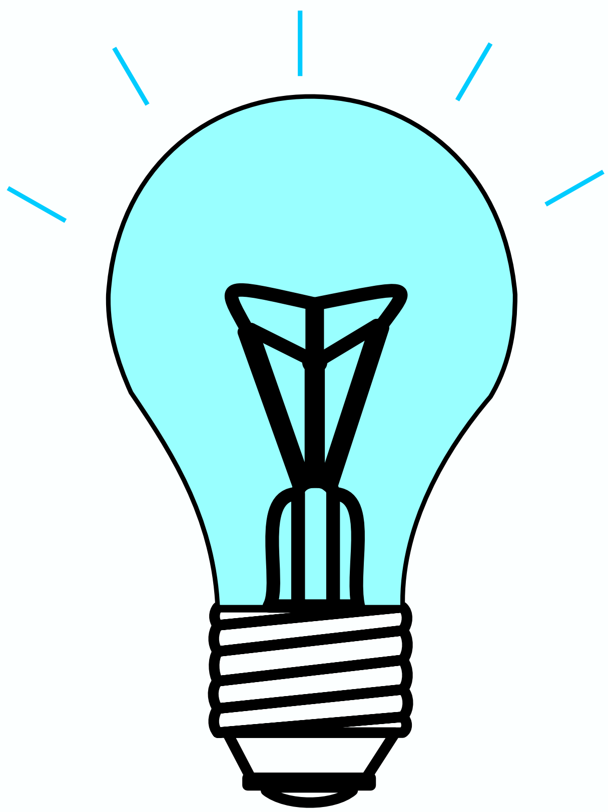
4. $A'(5) = 10\pi \dfrac{cms^2}{s}$.

5. $h'(t) = \dfrac{1}{100\pi} \dfrac{dm}{s}$.

FIN DE SECCIÓN

SOLUCIONES DE EJERCICIOS Y ACTIVIDADES

3.5 DERIVADAS DE FUNCIONES ALGEBRAICAS



SECCIÓN 3.1

BLOQUE 1

SECCIÓN 3.1
SECUENCIA DIDÁCTICA 1
FUNCIÓN DERIVADA ASOCIADA A LA FUNCIÓN POTENCIA

INICIO

1. Sea $f : I \to IR$, si $\lim\limits_{t \to x} \dfrac{f(t) - f(x)}{t - x}$ existe para toda $t \in I$, entonces f es derivable en I y su función derivada se denota por f'.

2. Sea $f : I \to IR$, si $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ existe para toda $t \in I$, entonces f es derivable en I y su función derivada se denota por f'.

DESARROLLO

3. i. t. **ii.** $t - x$. **iii.** $\dfrac{t-x}{t-x} = 1$. **iv.** 1.

4. i. t^2. **ii.** $t^2 - x^2$. **iii.** $\dfrac{(t-x)(t+x)}{(t-x)}$. **iv.** $2x$.

5. i. t^3. **ii.** $t^3 - x^3$. **iii.** $\dfrac{(t-x)(t^2 + tx - x^2)}{t-x}$. **iv.** $3x^2$.

6. Completa la tabla:

FUNCIÓN	FUNCIÓN DERIVADA
$f(x) = x$	$f'(x) = 1$
$f(x) = x^2$	$f'(x) = 2x$
$f(x) = x^3$	$f'(x) = 3x^2$

CIERRE

7. $f'(x) = nx^{n-1}$.

Fin de actividad

SECCIÓN 3.1 BLOQUE 1 EJERCICIOS 1

a. $f'(x) = -8$. **b.** $f'(x) = -4$. **c.** $f'(x) = 10x - 3$. **d.** $f'(x) = 6x - 1$.

e. $f'(x) = -9x^2 + 10x - 7$. **f.** $f'(x) = 3x^2 - 2x - 1$. **g.** $f'(x) = \dfrac{3}{8}x^2 + x$.

h. $f'(x) = 12x^2 + 8$.

SECCIÓN 3.1
SECUENCIA DIDÁCTICA 2
FUNCIÓN DERIVADA ASOCIADA A UNA FUNCIÓN POLINOMIAL

INICIO

1. Sea $f: I \to IR$, si $\lim\limits_{t\to x} \frac{f(t)-f(x)}{t-x}$ existe para toda $t \in I$, entonces f es derivable en I y su función derivada se denota por f'.

2. Sea $f: I \to IR$, si $\lim\limits_{t\to x} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ existe para toda $t \in I$, entonces f es derivable en I y su función derivada se denota por f'.

DESARROLLO

3.

i. $a_0 + a_1(x+\Delta x)$.

ii. $a_0 + a_1(x+\Delta x) - (a_0 + a_1 x) = a_0 + a_1 x + a_1 x\Delta x - a_0 - a_1 x$.

iii. a_1.

iv. a_1.

4.

i. $a_0 + a_1(x+\Delta x) + a_2(x+\Delta x)^2$

ii. $a_1\Delta x + 2a_2 x\Delta x + a_2\Delta^2 x$.

iii. $a_1 + 2a_2 x + a_2\Delta x$.

iv. $a_1 + 2a_2 x$.

5.

i. $a_0 + a_1(x+\Delta x) + a_2(x+\Delta x)^2 + a_3(x+\Delta x)^3$.

ii. $a_1\Delta x + 2a_2 x\Delta x + a_2\Delta^2 x + 3a_3 x^2\Delta x + 3a_3 x\Delta^2 x + a_3\Delta^3 x$

iii. $a_1 + 2a_2 x + a_2\Delta x + 3a_3 x^2 + 3a_3 x\Delta x + a_3\Delta^2 x$.

iv. $a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2$.

6.

FUNCIÓN	FUNCIÓN DERIVADA
$f(x) = a_0 + a_1 x$	$f'(x) = a_1$
$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$	$f'(x) = a_1 + 2a_2 x$
$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$	$f'(x) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2$

CIERRE

7. $f'(x) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \cdots + na_n x^{n-1}$.

Fin de actividad

SECCIÓN 3.1 BLOQUE 1 EJERCICIOS 2

1. $f'(x)=7x^{6}$. **2.** $f'(x)=43x^{42}$. **3.** $f'(x)=62x^{61}$.

4. $f'(x)=177x^{176}$. **5.** $f'(x)=1037x^{1036}$.

SECCIÓN 3.1 BLOQUE 1 EJERCICIOS 3

1. $f'(x)=-\dfrac{9}{x^{10}}$. **2.** $f'(x)=-\dfrac{2}{x^{3}}$. **3.** $f'(x)=\dfrac{1}{6\sqrt[6]{x^{5}}}$.

4. $f'(x)=-\dfrac{5}{3\sqrt[5]{x^{8}}}$. **5.** $f'(x)=-\dfrac{1}{5\sqrt[5]{x^{6}}}$. **6.** $f'(x)=-\dfrac{2}{5\sqrt[5]{x^{7}}}$.

BLOQUE 2

SECCIÓN 3.1 BLOQUE 1 EJERCICIOS 2

1. $f'(x)=-\dfrac{1}{3}x-24x^{2}$. **2.** $f'(x)=\dfrac{8}{x^{3}}-\dfrac{3}{4}x^{2}$.

3. $f'(x)=\dfrac{3}{\sqrt{x}}+\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^{4}}}+\dfrac{1}{2x^{3}}$. **4.** $f'(z)=-\dfrac{1}{\sqrt{z^{3}}}+\dfrac{8}{3\sqrt[3]{z^{2}}}-\dfrac{5}{z^{3}}$.

5. $f'(w)=-\dfrac{15}{2\sqrt{w^{5}}}+\dfrac{10}{3\sqrt[3]{w}}-\dfrac{7}{w^{3}}+\dfrac{8}{w^{5}}$. **6.** $g'(y)=-\dfrac{8}{y^{3}}-\dfrac{40\sqrt[3]{y}}{3}+30y^{5}+\dfrac{32}{y^{5}}$.

7. $g'(r)=6-\dfrac{16}{3\sqrt[3]{r}}-\dfrac{15}{r^{4}}+\dfrac{8}{5r^{5}}$. **8.** $f'(r)=-\dfrac{10}{3\sqrt[8]{x^{3}}}+\dfrac{40}{3\sqrt[3]{r^{8}}}-\dfrac{4}{15\sqrt[3]{r^{8}}}$.

BLOQUE 3

SECCIÓN 3.1 BLOQUE 3 EJERCICIOS 1

1.

a. $F'(x)=42x^{6}-40x^{4}+12x$. **b.** $F'(x)=-48x^{5}+120x^{4}-88x^{3}+30x-9$.

c. $F'(x)=-84x^{5}-5x^{4}+28x^{3}{}'-9x^{2}-26x-\dfrac{2}{x^{2}}$. **d.** $G'(z)=2z-\dfrac{5}{z^{6}}-\dfrac{8}{z^{5}}-\dfrac{2}{z^{3}}-\dfrac{1}{z^{2}}$.

e. $G'(z)=\dfrac{3\sqrt{z}}{2}+\dfrac{5\sqrt[3]{z^{2}}}{3}-\dfrac{1}{2\sqrt{z}}+\dfrac{2}{3\sqrt[3]{z}}$. **f.** $H'(y)=2y-\dfrac{1}{y^{2}}+\dfrac{2}{y^{3}}+\dfrac{3}{y^{4}}$.

2. a. $F'(x)=-\dfrac{4x}{\left(x^{2}+1\right)^{2}}$. **b.** $F'(w)=-\dfrac{\dfrac{12}{\sqrt{w}}+6}{\left(4\sqrt{w}+w+1\right)^{2}}$.

c. $H'(y)=-\dfrac{y^2-9}{(y^2+9)^2}$.

d. $G'(m)=\dfrac{4m^2+24m+7}{(m+3)^2}$.

e. $H'(y)=\dfrac{-2y^5+3y^4-44y^3-y^2+12y+5}{(y^4-y+6)^2}$.

f. $L'(y)=\dfrac{y^2-4y-4}{(y^2+4y-4)^2}$.

g. $M'(x)=-\dfrac{8x^4+11x^3+15x^2+4x-2}{x^2(x-1)^3(x+2)^2}$.

h. $F'(x)=\dfrac{\sqrt{x}+3\sqrt[6]{x}+2}{6\sqrt[3]{x^2}\left(\sqrt[3]{x}+1\right)^2}$.

i. $F'(x)=-\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}\left(\sqrt[3]{x}+1\right)^2}$.

j. $F'(x)=-\dfrac{4x+8\sqrt{x}+1}{2\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+2\right)^2}$.

3.

a. $v'(t)=-6t^5+12t^3+4t-4$, $v'(0)=-4$. **b.** $a'(t)=120t^4-204t^2+48$ $a'(1)=-36$.

c. $f'(t)=\dfrac{-t^4+27t^2+24}{(8-t^2)^2}$, $f'(1)=\dfrac{50}{49}$.

d. $g'(x)=\dfrac{9-3x^2}{\sqrt{x}(x^2+9)^2}$ $g'(1)=\dfrac{3}{50}$. **e.** $r'(s)=\dfrac{1}{(s+1)^2}$, $r'(1)=\dfrac{1}{4}$.

BLOQUE 4

SECCIÓN 3.1 BLOQUE 4 EJERCICIOS 1

1. a. $f(x)=x^3$, $g(x)=\dfrac{1}{3}x^3-2x+7$ y $f'(x)=3x^2$, $g'(x)=x^2-2$

$$F'(x)=3\left(\frac{1}{3}x^3-2x+7\right)^2\left(x^2-2\right).$$

b. $f(x)=x^4$, $g(x)=\sqrt{x}-x-4$, $f'(x)=4x^3$, $g'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}-1$

$$F'(x)=4\left(\frac{1}{3}x^3-2x+7\right)^3\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}-1\right).$$

c. $f(x)=x^4$, $g(x)=\dfrac{1}{x^2}-3x^5+4$, $f'(x)=4x^3$, $g'(x)=-\dfrac{2}{x^3}-15x^4$

$$G'(x)=4\left(\frac{1}{x^2}-3x^5+4\right)^3\left(-\frac{2}{x^3}-15x^4\right).$$

d. $f(y)=y^{-2}$, $g(y)=3\sqrt[3]{y}-4y^{-1}-11$, $f'(y)=\dfrac{1}{\sqrt[3]{y^2}}$, $g(y)=3\sqrt[3]{y}+4y^{-2}$ y

$$G'(y) = -2\frac{\dfrac{1}{\sqrt[3]{y^2}} + \dfrac{4}{y^2}}{\left(3\sqrt[3]{y} - 4y^{-1} - 11\right)^3}.$$

e. $f(t) = \sqrt{t}$, $g(t) = \dfrac{3}{t^2} - 4t + 5$, $f'(t) = \dfrac{1}{2\sqrt{t}}$, $g(t) = -\dfrac{6}{t^3} - 4$

$$H'(t) = -\frac{\dfrac{3}{t^3} + 2}{\sqrt{\dfrac{3}{t^2} - 4t + 5}}.$$

f. $f(t) = \sqrt{t}$, $g(t) = 8t - \sqrt{5t}$, $f'(t) = \dfrac{1}{2\sqrt{t}}$, $g'(t) = 8 - \dfrac{1}{2\sqrt{5t}}$ y $H'(t) = \dfrac{8 - \dfrac{5}{2\sqrt{5t}}}{2\sqrt{8t - \sqrt{5t}}}$.

2.

a. $H'(t) = 8t^7 + 24t^5 - 176t^3 + 192t$.

b. $v'(t) = 6t\left(t^2 + 6\right)^2\left(t^2 + \sqrt{t}\right)^2 + \left(4t^3 - \sqrt{t^3} + 1 - 4\sqrt{t^3}\right)\left(t^2 + 6\right)^3$.

c. $v'(t) = -\dfrac{t^4 + 6t^2 + 2t}{\left(t^3 + 1\right)^2\sqrt{\dfrac{t^2 + 2}{t^3 - 1}}}$.

d. $a'(t) = \dfrac{2(t - 10)(-t + 30)}{(t + 10)^5}$.

e. $v(t) = \dfrac{3t^2 + 34t + 31}{2(t + 8)\sqrt{t + 8}}$.

f. $v'(t) = -\dfrac{2t + 1}{5\left(\sqrt[5]{t^2 + t + 4}\right)^6}$.

g. $v'(x) = \dfrac{-2x^5 + 6x^4 - 4x^3 + 5x^2 + 6x - 1}{\left(\left(1 - x^2\right)^2 - x\right)^2}$.

h. $F'(x) = \dfrac{\left(4 - x^2\right)^4 + 1 + 8x^2\left(4 - x^2\right)^3}{\left(\left(4 - x^2\right)^4 + 1\right)^2\sqrt{\dfrac{x}{\left(4 - x^2\right)^4 + 1}}}$.

i. $F'(x) = \dfrac{x^2 + 8\sqrt{x^3} - 2}{2\sqrt{x}\left(\sqrt{x} + 4\right)^2\sqrt{x^2 + 2}}$.

SECCIÓN 3.2

BLOQUE 1

SECCIÓN 3.2
SECUENCIA DIDÁCTICA 1
LÍNEA RECTA TANGENTE Y LÍNEA RECTA NORMAL

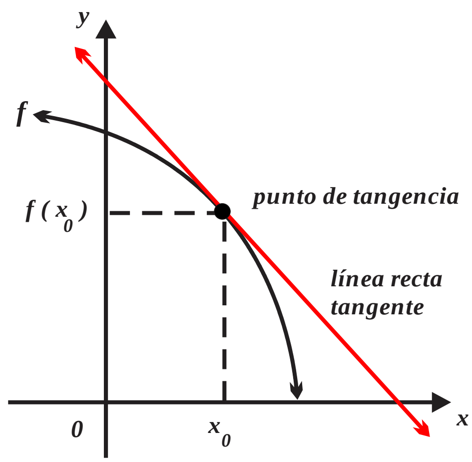
ECUACIONES DE LÍNEAS RECTAS NORMALES Y LÍNEAS RECTAS TANGENTES A CURVAS

a. Es la función que describe o proporciona el valor de la pendiente de la línea recta tangente a la curva asociada a f.

b. $y - y_0 = m(x - x_0)$.

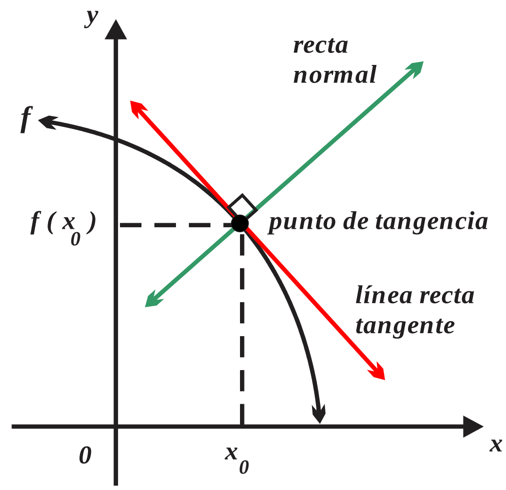
c. $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$.

d.



e. Línea recta normal y la pendiente de la línea recta normal es $m_n = -\dfrac{1}{f'(x_0)}$.

f.



g. $y - f(x_0) = -\dfrac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$.

h.

i. $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$.

ii. $y - f(x_0) = -\dfrac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$.

Fin de actividad

SECCIÓN 3.2 BLOQUE 1 EJERCICIOS 1

1. i. $m_t = 0$. **ii.** $m_t = -\dfrac{2}{25}$. **iii.** $m_t = \dfrac{3}{25}$. **iv.** $m_t = 1$.

2. i. $x = 0$, $x = 1$ y $x = -1$. **ii.** $x = 0$. **iii.** $t = 1$ y $t = -1$. **iv.** $t = -1$.

3. Tangente $5x - y - 8 = 0$, normal $x + 5y - 16 = 0$.

4. Tangente $x + y + 2 = 0$, normal $x - y = 0$.

5. Tangente $33x - y + 48 = 0$, normal $x + 33y + 596 = 0$.

6. Tangente, $16x+125y-164=0$, normal $625x-80y-2436=0$.
7. Tangente $25x-4y-27=0$, normal $4x+25y-312=0$.
8. Tangente $3x-y-5=0$.

BLOQUE 2

SECCIÓN 3.1 BLOQUE 2 EJERCICIOS 1

1. MOVIMIENTO DE UN OBJETO

i. $v(t)=s'(t)=3t^2-12t+9$. **ii.** $a(t)=v'(t)=6t-12$.

2. $v(t)=X'(t)=6t^2+10t\ m\cdot s^{-1}$ y $a(t)=v'(t)=12t+10\ m\cdot s^{-2}$.

3. i. $t=3$. **ii.** 18.

4. $r(10)=19.6(10)=196\ m s^{-1}$.

5. i. $r(t)=3t^2+48$. **ii.** $r(5)=(3)(5)^2+48=123\,m s^{-1}$. **iii.** $t=\sqrt{16/3}$.

6. $a(t)=40t^3$, cuando $t=10$ segundos, $a(10)=40(10)^3=40{,}000\ m\cdot s^{-2}$.

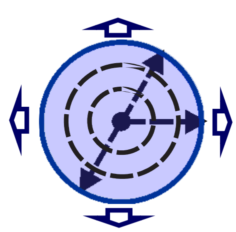
7. $a'(t)=12t^2$ con $t>0$. **i.** $a'(5)=(12)(5)^2=300\ m\cdot s^{-2}$.
ii. $t=\sqrt[3]{64}=4$. En el instante $t=4$ el móvil tiene el cambio de rapidez de $56\,m s^{-2}$.

8. i. $p'(t)=2(40t^2-2t^3)(80t-6t^2)$. **ii.** $41888\ infectados\cdot día^{-1}$.

9. i. $C'(x)=-\dfrac{200}{x^2}+\dfrac{6000}{(x+30)^2}$. **ii.** $3.75\dfrac{pesos}{unidad}$.

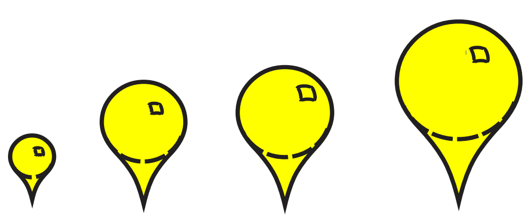
SECCIÓN 3.2 BLOQUE 3 EJERCICIOS 1

1.
a.



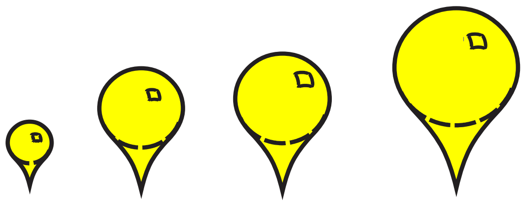
b. $A'(r)=2\pi r[r'(r)]=2\pi r[2]=4\pi r$. $cms\cdot s^{-1}$
c. $A'(r)=4\pi[10]\approx 125.664\ cms^2\cdot s^{-1}$.

2. a.



b. $V'(t)=4\pi r^2(t)r'(t)$.
c. $r'(t)=\dfrac{V'(t)}{4\pi r^2(t)}$.
d. $r'(t)=\dfrac{25}{4\pi r^2(t)}$.
e. $r'(t)=\dfrac{25}{4\pi(5)^2}=\dfrac{1}{4\pi}\ cms^3\cdot s^{-1}$.

3. i.

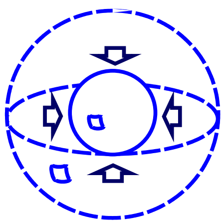


ii. $\frac{d}{dt}V(t)=4\pi[r(t)]^2\frac{d}{dt}[r(t)]$.

iii. $\frac{d}{dt}[r(t)]=\frac{\frac{d}{dt}V(t)}{4\pi[r(t)]^2\frac{d}{dt}[r(t)]}$.

iv. $\frac{d}{dt}[r(t)]=\frac{600}{4\pi(900)}=\frac{1}{6\pi}$ $cms^3\cdot min^{-1}$.

4. a.

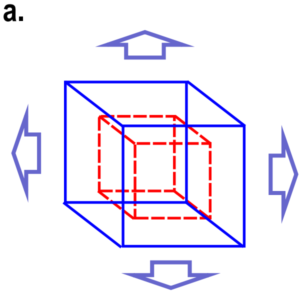


b. $\frac{dr}{dt}=\frac{30-20}{50}=0.2\ cms\cdot min^{-1}$.

c. $\frac{d}{dt}V(t)=4\pi r^2\frac{dr(t)}{dt}$.

d. $\frac{d}{dt}V(25)=4\pi(25)^2(0.2)=500\pi\ cms^3\cdot min^{-1}$.

5. a.

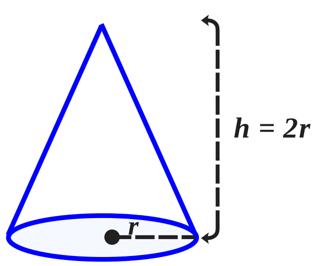


b. $\frac{d}{dt}V(t)=3x^2(t)\frac{dx}{dt}$.

c. $\frac{d}{dt}V(t)=3x^2(t)\frac{dx}{dt}$. **iv.** $\frac{d}{dt}V(t)=12x^2$.

d. $\frac{dV(t)}{dt}=12(6)^2=432\ cms^3\cdot s^{-1}$.

6. a.



b. $V(r)=\frac{1}{3}\pi r^2(2r)=\frac{2}{3}\pi r^3$.

c. $V(t)=\frac{2}{3}\pi r^3(t)$.

d. $V'(t)=\left[\frac{2}{3}\pi r^3(t)\right]'=2\pi r^2(t)r'(t)$.

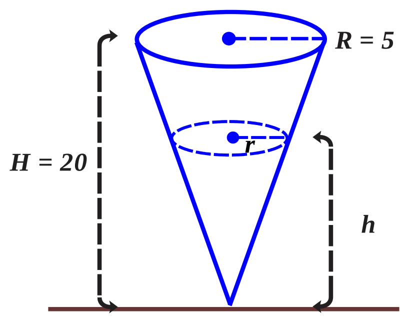
e. $r'(t)=\frac{V'(t)}{2\pi r^2(t)}$.

f. $V'(t)=\left[\frac{2}{3}\pi r^3(t)\right]'=4\pi r^2(t)$.

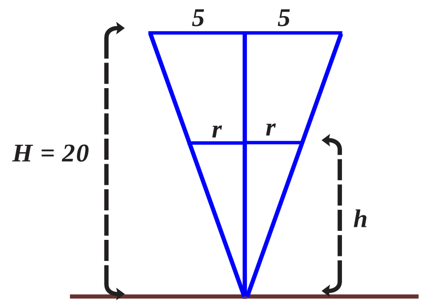
g. $r'(t)=\frac{5}{\pi r^2}$.

7.

a.



b.



c. $\dfrac{r}{h}=\dfrac{R}{H}$.

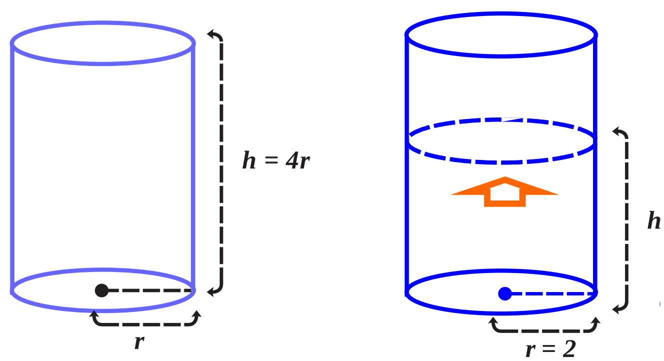
d. $\dfrac{r}{h}=\dfrac{5}{20}$ y $r=\dfrac{1}{4}$.

e. $V\left(h\right)=\dfrac{\pi}{3}\left(\dfrac{1}{4}h\right)^{2}h=\dfrac{\pi}{48}h^{3}$.

f. $\dfrac{d}{dt}V\left(t\right)=\dfrac{\pi}{48}\left[3h^{2}\dfrac{dh}{dt}\right]=\dfrac{\pi h^{2}}{16}\dfrac{dh\left(t\right)}{dt}$.

g. $\dfrac{dV}{dt}=\dfrac{\pi 4^{2}}{16}\left(0.1\right)=\left(0.1\right)\pi,\ m^{3}\cdot min^{-1}$.

8. a.



b. $V\left(h\right)=\pi\left(\dfrac{h}{4}\right)^{2}h=\pi\dfrac{h^{3}}{16}$.

c. $V\left(t\right)=\dfrac{\pi}{16}h^{3}\left(t\right)$.

d. $V'\left(t\right)=\left[\dfrac{\pi}{16}h^{3}\left(t\right)\right]'=\dfrac{3\pi}{16}h^{2}\left(t\right)h'\left(t\right)$.

e. $h'\left(t\right)=\dfrac{16}{3\pi h^{2}\left(t\right)}V'\left(t\right)$.

f. $\dfrac{d}{dt}h\left(t\right)=\dfrac{0.005}{4\pi}=\dfrac{0.00125}{\pi}\ m\cdot s^{-1}$.

FIN DE SECCIÓN

4

COMPORTAMIENTO GRÁFICO Y PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN

PROPÓSITOS

Al finalizar la unidad:
el alumno contrastará la gráfica de una función y sus primeras dos derivadas para obtener información sobre el comportamiento de la función; utilizará dicha información para resolver problemas de optimización

CONTENIDO

UNIDAD 4

PRESENTACIÓN

La Unidad 4. "COMPORTAMIENTO GRÁFICO Y PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN", atiende el propósito:

Al finalizar la unidad el alumno: Usará el concepto de derivada a través de su representación algebraica para identificar patrones de comportamiento y obtendrá las reglas de derivación; utilizará estas reglas para obtener la derivada de una función de manera eficaz y la reconocerá como otra función. Además, aplicará las reglas de derivación en diferentes contextos.

Clasificamos los aprendizajes y la temática propuestos en dos secciones de títulos:

4.1 La derivada en el análisis de funciones.
Esta sección incluye:
Cuatro bloques.
Dos secuencias didácticas.
Siete bloques de ejemplos resueltos.
Seis bloques de ejercicios propuestos.

4.2. Problemas de optimización.
Una secuencia didáctica.
Tres bloques de ejemplos resueltos.
Tres bloques de ejercicios propuestos.

Además, el lector observará en el desarrollo da cada sección:
1. Título
2. La estrategia de aprendizaje para su desarrollo.
3. Breve introducción sobre la importancia de la temática.
4. Los elementos teóricos básicos de los contenidos temáticos y aprendizajes que señala el programa de estudios correspondiente.
5. Definiciones básicas (y formales) sobre los conceptos relevantes
6. Propiedades (teoremas inherentes a la temática de la disciplina).

La unidad también incluye:

La sección de evaluación diagnóstica, con:

i. Un examen de evaluación diagnóstica (que si docente lo considera adecuado el estudiante debe responder), con escala de acreditación.
ii. Las respuestas a las preguntas del examen diagnóstico y una bibliografía que como sugerencia y apoyo para aquellos alumnos que no lograron aprobar el examen.

La sección de evaluación de la unidad, con:

i. La evaluación de la unidad (en la taxonomía de: conceptos, desarrollos operativos y problemas que requieren un mayor grado de pensamiento).
ii. Las respuestas a la evaluación propuesta.

La sección de soluciones, con:

i. Las soluciones de las secuencias didácticas propuestas.
ii. Las soluciones de las secciones de ejercicios propuestos.

SECCIÓN 4.1 LA DERIVADA EN EL ANÁLISIS DE FUNCIONES

APRENDIZAJES

1. Interpreta en forma gráfica y algebraica los intervalos en donde una función es creciente o constante.

2. Esboza la gráfica de la derivada de una función dada la gráfica de la misma.

3. Deduce a través de un análisis gráfico, las relaciones existentes entre la gráfica de una función y sus dos primeras derivadas: signo de la primera derivada asociado con crecimiento o decrecimiento de la función, derivada nula con puntos críticos, signo de la segunda derivada, con concavidad y segunda derivada nula con un posible cambio de concavidad o punto de inflexión.

4. Calcula los puntos críticos de una función y los clasifica en máximos, mínimos o puntos de inflexión.

5. Analiza el tipo de concavidad de la función a partir del signo de la segunda derivada.

6. Esboza la gráfica de una función utilizando la información que proporcionan su primera y segunda derivada.

7. Infiere que los criterios de la primera y segunda derivada, sintetizan el análisis realizado entre las gráficas de f, f' y f''.

TEMÁTICA

1. Situaciones que propician el análisis de las relaciones entre la gráfica de una función y sus derivadas.

2. Comportamiento gráfico de una función.

3. Puntos de inflexión.

4. Gráfica de $f'(x)$ y $f''(x)$ a partir de $f(x)$ y viceversa.

BLOQUE 1

MONOTONÍA Y LA DERIVADA

Con un cuestionario guiamos al alumno: en la deducción de la propiedad referente a la determinación del tipo de monotonía por intervalos de una función derivable.
Con ejemplos característicos mostramos al alumno el uso del algoritmo correspondiente a la identificación de los intervalos de crecimiento o decrecimiento de una función.

La función derivada

$$f\,'$$

proporciona información sobre el comportamiento de la curva asociada a la función

$$f$$

de donde se derivó, en particular, sobre los intervalos en los que la curva asociada a la función

$$f$$

crece, los intervalos donde decrece y sobre los números de su dominio en los que la curva señalada alcanza sus valores extremos. ´Las funciones

$$f\,' \text{ y } f\,''$$

proporcionan información sobre el "bosquejo" (forma aproximada de la curva asociada a una función f) de la curva asociada a la función

$$f\,.$$

SECCIÓN 4.1

SECUENCIA DIDÁCTICA 1

LA DERIVADA EN LA MONONOTONÍA DE UNA FUNCIÓN

INICIO

1. Investiga y escribe las definiciones de:

i. Función creciente sobre un intervalo abierto I .

ii. Función decreciente sobre un intervalo I .

2. Traza los gráficos correspondientes a una:

i. Función creciente sobre un intervalo abierto (a, b).

ii. Función decreciente sobre un intervalo (a, b).

DESARROLLO

1. (DIRECTA) Carácter monótono de las funciones derivables.

i. ¿Qué signos tienen las pendientes de las rectas tangentes correspondientes a la curva asociada a una función creciente y derivable sobre el intervalo (a, b)? Traza una figura que muestre tu respuesta.

ii. ¿Qué signos tienen las pendientes de las rectas tangentes correspondientes a la curva asociada a una función decreciente y derivable en sobre el intervalo (a, b)? Traza una figura que muestre tu respuesta.

iii. Establece una conjetura que relacione el carácter de creciente o decreciente de una función con el signo de su función derivada.

2. (RECÍPROCA) El criterio de monotonía de una función derivable y creciente.

a. Sean: f una función derivable en el intervalo (a, b), $x_1 < x < x_2$ números de (a, b).

i. Si la función f es derivable en (a, b) y $f'(x) > 0$, ¿qué signo tiene la razón $\lim\limits_{x \to x_1} \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1}$? Escribe tu respuesta en términos de la relación de orden.

ii. Lo anterior implica que el signo del cociente $\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1}$ es (utiliza la relación de orden en tu respuesta):

iii. Puesto que $\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1}$ es positivo y también lo es $x - x_1$, entonces el signo de $f(x) - f(x_1)$ (utiliza la relación de orden en tu respuesta) es:

iv. Como consecuencia de los incisos **i.** y **ii.**, se ha comprobado:

si $f'(x) > 0$ y si $x - x_1 > 0$, entonces

v. Por tanto, si $f'(x) > 0$ y $x - x_1 > 0$, entonces $f(x) - f(x_1) > 0$ lo cual significa f es

sobre el intervalo (a, b).

b. El criterio de monotonía de una función derivable y decreciente.
Sean: f una función derivable en el intervalo (a, b), $x_1 < x < x_2$ números de (a, b).

i. Si la función f es derivable en (a, b) y $f'(x) < 0$, ¿qué signo tiene la razón $\lim\limits_{x \to x_1} \dfrac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1}$? Escribe tu respuesta en términos de la relación de orden.

ii. Lo anterior implica que el signo del cociente $\dfrac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1}$ es (utiliza la relación de orden en tu respuesta):

iii. Puesto que $\dfrac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1}$ es negativo y $x - x_1$ es positivo, entonces el signo de $f(x) - f(x_1)$ (utiliza la relación de orden en tu respuesta) es:

iv. Como consecuencia de los incisos **i.** y **ii.** se ha comprobado:

si $f'(x) < 0$ y si $x - x_1 > 0$, entonces

v. Por tanto, si $f'(x) < 0$ y $x - x_1 > 0$, entonces $f(x) - f(x_1) < 0$ lo cual significa que $f(x)$ es:

sobre el intervalo (a, b).

CIERRE

Completa:

i. Si f es una función derivable en el intervalo (a, b) y $f'(x) > 0$, entonces:

ii. Completa:

Si f es una función derivable en el intervalo (a, b) y $f'(x) < 0$, entonces:

Fin de actividad

La ***figura 4.1*** muestra la relación existente entre la curva asociada a la función f y el signo de la pendiente de la tangente (es decir de su función derivada f'). Sobre los "intervalos rojos" la parte de la curva (en color rojo) decrece y la derivada es negativa, sobre los "intervalos azules" la curva (en color azul) crece y la derivada es positiva. En los puntos negros cambia el carácter de la función (de creciente a decreciente o viceversa).

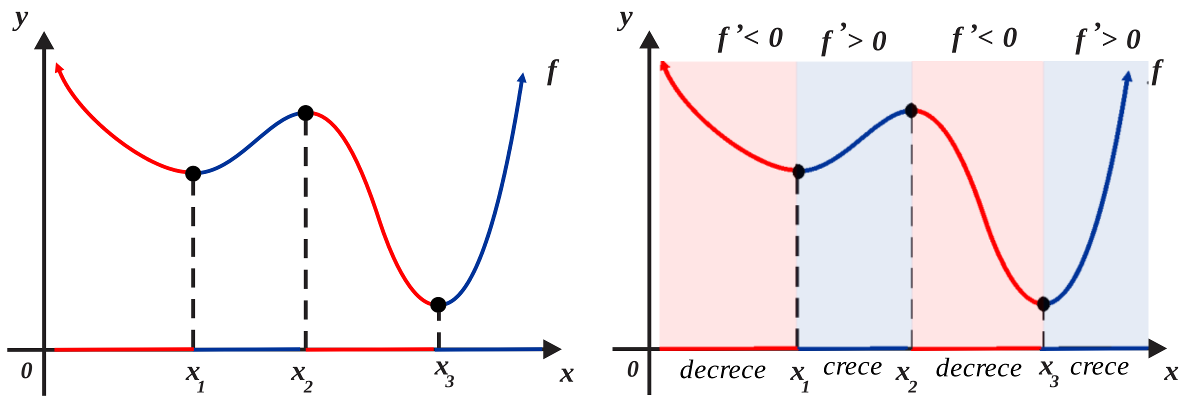


FIGURA 4.1

DEFINICIÓN 4.1

MONOTONÍA

Sea f una función derivable sobre el intervalo abierto $I=(a\,,\,b)$, entonces:

a. f es creciente sobre el intervalo I, sí y sólo si $f'>0$, para todo x en $I=(a\,,\,b)$.

b. f es decreciente sobre el intervalo I, sí y sólo si $f'<0$, para todo x en $I=(a\,,\,b)$.

Parte de la importancia de la ***propiedad 4.1*** consiste en que proporciona (y a la vez justifica) el algoritmo a seguir para determinar los intervalos en los que una función (derivable) es creciente y los intervalos donde lo es.

ESTRATEGIA 4.1

INTERVALOS DE CRECIMIENTO Y DECRECIMIENTO DE UNA FUNCIÓN f DERIVABLE

Obtén la función derivada e iguálela a cero, sus soluciones son las abscisas de los puntos en que cambia su carácter de monotonía (creciente a decreciente o decreciente a creciente).

ii. Sobre la línea recta real marca las soluciones obtenidas y genera los intervalos en que estas soluciones dividen a la línea recta real.

iii. Selecciona un número (de prueba) en cada uno de los intervalos.

iv. Determina el signo de la función derivada en cada intervalo (evaluándola en el punto de prueba seleccionado).

SECCIÓN 4.1
BLOQUE 1
EJEMPLOS 1

Determinemos el carácter monótono (intervalos donde crece e intervalos donde decrece) de la función

1. La función $f(x) = -x^2 - 4x + 8$ tiene como dominio al conjunto de todos los números reales. Por otra parte

$$f'(x) = -2x - 4.$$

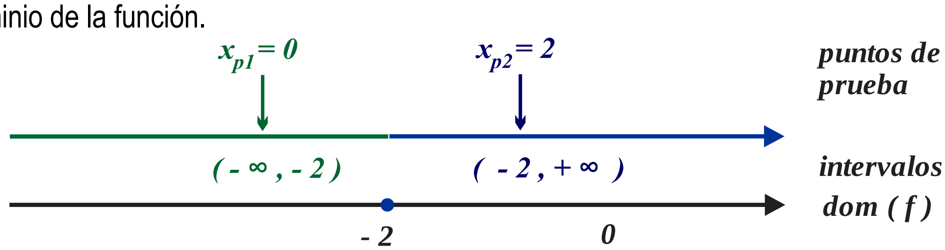
Si $f'(x) = 0$, entonces $-2x - 4 = 0$, de donde obtenemos

$$x = -2.$$

número que divide y a la vez genera los intervalos

$$I_1(-\infty, -2) \text{ y } I_2(-2, +\infty),$$

en el dominio de la función.



En cada intervalo seleccionamos un número x_{pi} al que denominamos número de prueba, por ejemplo,

$$-3 \text{ en } I_1(-\infty, -2) \text{ y } 0 \text{ en } I_3(-2, +\infty).$$

Utilizando los números de prueba determinamos el signo de $f'(x)$ en cada intervalo, luego

$$f'(-3) = -2(-3) - 4 = 2 \text{, signo positivo.}$$

$$f'(0) = -2(0) - 4 = -4 \text{, signo negativo.}$$

La información obtenida se encuentra sistematizada en la tabla

Intervalo	Número de prueba x_{pi}	Signo de $f'(x_p)$	Carácter de f
$I_1(-\infty, -2)$	$x_{p1} = -3$	$f'(0) = 3$, positivo.	creciente
$I_2(-2, +\infty)$	$x_{p2} = 2$	$f'(2) = -1$, negativo.	decreciente

2. La función $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x$ tiene como dominio al conjunto de todos los números reales. Además $f'(x) = x^2 - 4x + 3$.

Si $f'(x) = 0$, entonces $x^2 - 4x + 3 = 0$, de donde obtenemos

$$(x-1)(x-3) = 0.$$

Las soluciones de la ecuación $(x-1)(x-3) = 0$

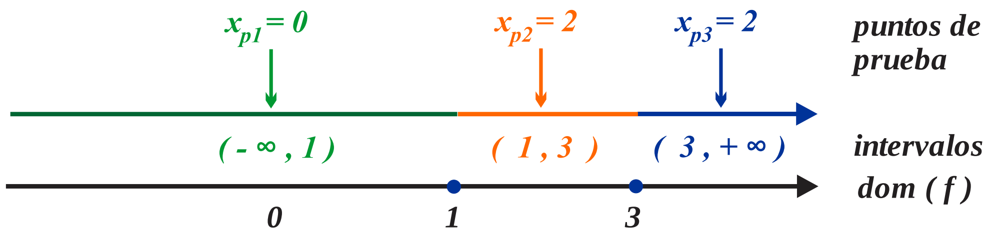
son los números

$$x=1 \text{ y } x=3,$$

mismos que dividen y generan los intervalos

$$I_1(-\infty,\ 1),\ I_2(1,\ 3) \text{ y } I_3(3,\ +\infty),$$

en el dominio de la función.



En cada intervalo seleccionamos un número de prueba x_{pi}, por ejemplo,

$$0 \text{ } en \text{ } I_1(-\infty,\ 1),\ 2 \text{ } en \text{ } I_2(1,\ 3) \text{ y } 4 \text{ } en \text{ } I_3(3,\ +\infty).$$

Utilizando los números de prueba determinamos el signo de $f'(x)$ en cada intervalo, luego:

$f'(0)=(0)^2-4(0)+3=3$, signo positivo.

$f'(2)=(2)^2-4(2)+3=-1$, signo negativo.

$f'(3)=(4)^2-4(4)+4=4$, signo positivo.

La información obtenida se resume en la tabla

Intervalo	Número de prueba x_{pi}	Signo de $f'(x_p)$	Carácter de f
$I_1(-\infty,\ 1)$	$x_{p1}=0$	$f'(0)=3$, positivo.	creciente
$I_2(1,\ 3)$	$x_{p2}=2$	$f'(2)=-1$, negativo.	decreciente
$I_3(3,\ +\infty)$	$x_{p3}=4$	$f'(3)=4$, positivo.	creciente

3. El dominio de la función $f(x)=\dfrac{x^2+x+2}{x}$ es el conjunto

$$(-\infty,\ 0)\cup(0,\ +\infty).$$

Además

$$f'(x)=\frac{x^2-2}{x^2}.$$

Si $f'(x)=0$, entonces $x^2-2=0$. Las soluciones de la ecuación

$$x^2-2=0$$

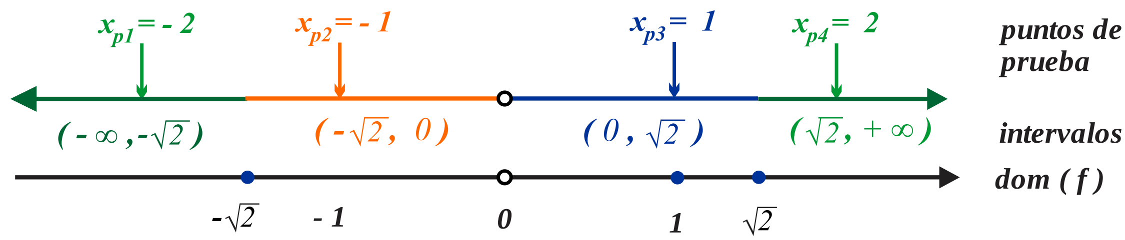
son los números

$$x=-\sqrt{2} \text{ y } x=\sqrt{2},$$

se considera $x=0$ dado que en este número no está definida la función derivada, mismos que dividen y generan los intervalos

$$I_1(-\infty,\ -\sqrt{2}),\ (-\sqrt{2},\ 0),\ I_3(0,\ \sqrt{2}) \text{ y } I_4(\sqrt{2},\ +\infty),$$

en el dominio de la función.



En cada intervalo seleccionamos x_{pi}, número de prueba:

-2 en $I_1\left(-\infty,\ -\sqrt{2}\right)$, -1 en $\left(-\sqrt{2},\ 0\right)$, 1 en $I_3\left(0,\ \sqrt{2}\right)$ y 2 en $I_4\left(\sqrt{2},\ +\infty\right)$.

Utilizando los números de prueba determinamos el signo de

$$f'$$

en cada intervalo, luego

$$f'(-2) = \frac{(-2)^2 - 2}{(-2)^2} = \frac{1}{2}, \text{ signo positivo.}$$

$$f'(-1) = \frac{(-1)^2 - 2}{(-1)^2} = -1, \text{ signo negativo.}$$

$$f'(1) = \frac{(1)^2 - 2}{(1)^2} = -1, \text{ signo negativo.}$$

$$f'(2) = \frac{(2)^2 - 2}{(2)^2} = \frac{1}{2}, \text{ signo positivo.}$$

Sistematizamos la información obtenida en la tabla:

Intervalo	**Número de prueba** x_{pi}	**Signo de** $f'(x_p)$	**Carácter de** f
$I_1\left(-\infty,\ -\sqrt{2}\right)$	$x_{p1} = -2$	$f'(-2) = \frac{1}{2}$, positivo	creciente
$I_2\left(-\sqrt{2},\ 0\right)$	$x_{p2} = -1$	$f'(-1) = -1$, negativo	decreciente
$I_3\left(0,\ \sqrt{2}\right)$	$x_{p3} = 1$	$f'(1) = -1$, negativo	decreciente
$I_4\left(\sqrt{2},\ +\infty\right)$	$x_{p4} = 2$	$f'(2) = \frac{1}{2}$, positivo	creciente

SECCIÓN 4.1 BLOQUE 1 EJERCICIOS 1	Nombre Fecha

Determina:

i. El dominio de la función.

ii. La función derivada y los números en que se anula o que no existe.

iii. Construye una tabla que incluya la información: intervalos generados por los números críticos, el signo de la función derivada en cada intervalo y el carácter monótono de la función en cada intervalo.

1. $f(x) = -x^2 - 2x + 8$.

2. $f(x) = -2x^2 + 10x + 12$.

3. $f\left(x\right)=x^3-12x-2$.

4. $f\left(x\right)=x^3-6x^2+9x$.

5. $f\left(x\right)=2x^3-6x^2$.

6. $f(x) = x^3 - x^2 + x + 2$.

7. $f(x) = (x-1)^2(x+2)$.

8. $f\left(x\right)=2x^{3}-9x^{2}+2$.

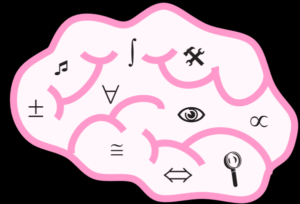
9. $f\left(x\right)=x^{\frac{4}{3}}-4x^{\frac{1}{3}}+1$.

10. $f\left(x\right)=\dfrac{\left(x+1\right)^2}{x^2+1}$.

BLOQUE 2

CRITERIO DE LA PRIMERA DERIVADA

ESTRATEGIA DE APRENDIZAJE



Presentamos ejemplos sobre la forma de uso del “criterio de la primera derivada” con la finalidad de que el alumno los analice y posteriormente lo utilice en el análisis de valores extremos relativos.

Los números (con sus respectivas imágenes) en los que se anula (o no existe) la función derivada f' asociada a una función f desempeñan un papel básico en la optimización de características de situaciones cuyos modelos son funciones.

SECCIÓN 4.1

SECUENCIA DIDÁCTICA 2

EXISTENCIA DE PUNTOS CRÍTICOS

INICIO

1. Proporciona las definiciones: valor máximo relativo y valor mínimo relativo.

DESARROLLO

2. Supón que la función f es derivable sobre (a, b), que $x_0 \in (a, b)$ y $f(x_0)$ es un valor extremo máximo de la función f. ¿Qué ocurre con $f(x_0)$, si al número x_0 se le agrega o se le resta Δx? (utiliza la relación de orden parcial en tu respuesta.

3. Expresa la respuesta del inciso anterior en términos del "incremento de la función Δf y la relación de orden parcial.

4. Supón que Δx tiene signo negativo ($\Delta x < 0$). Bajo las condiciones del inciso anterior, divide el resultado que obtuviste en el ***inciso 3.*** por Δx y asóciale el signo que corresponde (ya sea positivo o negativo) utilizando la relación de orden.

5. Supón que Δx tiene signo positivo ($\Delta x > 0$). Bajo las condiciones del inciso anterior, divide el resultado que obtuviste en el ***inciso 2.*** por Δx y asóciale el signo que corresponde (ya sea positivo o negativo) utilizando la relación de orden.

6. Rescribe los resultados de los ***incisos 4. y 5.*** como solo una expresión.

7. Aplica $\lim\limits_{\Delta x \to 0}$ en cada una de las partes de la expresión que obtuviste en el ***inciso 6***.

8. Calcula los límites en los extremos de la expresión que obtuviste en el ***inciso 7***.

9. Sustituye la parte central de la expresión que obtuviste en el ***inciso h.*** por $f'(x_0)$ y simplifica

CIERRE

10. Completa la proposición:

Sea f una función derivable en el intervalo (a, b), $x_0 \in (a, b)$ y $f(x_0)$ es un valor extremo máximo de f, entonces

Fin de actividad

DEFINICIÓN 4.2

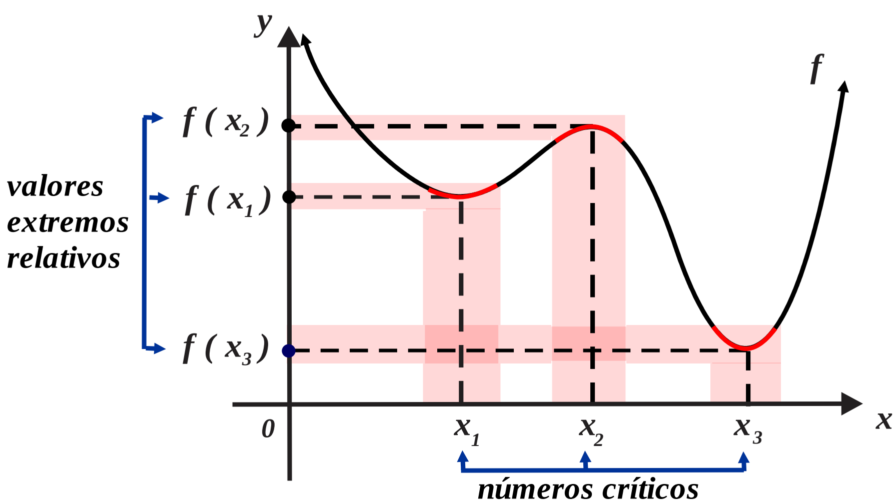
NÚMEROS CRÍTICOS Y VALORES EXTREMOS RELATIVOS

Sea f una función derivable alrededor de x_0.

a. Si $f'(x_0)=0$, entonces x_0 se denomina número crítico de f.

b. Si $f'(x_0)$ no existe, entonces x_0 se denomina número crítico de f.

c. Si $f'(x_0)$ existe, el número $f(x_0)$ se conoce como valor extremo relativo.



Un proceso de obtención los valores extremos de una función se fundamentan en la estrategia que presentamos a continuación.

ESTRATEGIA 4.2

DETERMINACIÓN DE NÚMEROS CRÍTICOS Y VALORES EXTREMOS

i. Obtén la función derivada e iguálela a cero, las soluciones de esta ecuación son parte de los números críticos de la función.

ii. Identifica los números en que la función derivada f' no existe y que pertenecen al dominio de la función f, éstos son otros de los números críticos.

iii. Evalúa la función f en los números críticos obtenidos.

SECCIÓN 4.1
BLOQUE 2
EJEMPLOS 1

Determina:

a. El dominio de la función.
b. Los números críticos.
c. Los valores extremos.

1. $f(x) = -2x^2 + 10x + 4$.

a. El dominio son todos los números reales (por ser una función polinomial).

b. Si $f(x) = -2x^2 + 10x + 4$, entonces $f'(x) = -4x + 10$. Los números críticos son las soluciones de la ecuación $-4x + 10 = 0$. Por tanto, $4x = 10$ o bien $x = \frac{5}{2}$, es el único número crítico.

c. El único valor extremo es $f\left(\frac{5}{2}\right) = -2\left(\frac{5}{2}\right)^2 + 10\left(\frac{5}{2}\right) + 4 = -\frac{17}{2}$.

2. $f(x) = x^3 - 12x - 2$.

a. El dominio son todos los números reales (por ser una función polinomial).

b. Puesto que $f'(x) = 3x^2 - 12$, entonces $3x^2 - 12 = 0$ implica que $x_1 = -2$ y $x_2 = 2$ son los números críticos.

c. Los valores extremos son

$$f(-2) = (-2)^3 - 12(-2) - 2 = 14 \text{ y } f(2) = (2)^3 - 12(2) - 2 = -18.$$

3. $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$.

a. El dominio son todos los números reales (por ser una función polinomial).

b. La función derivada es $f(x) = 3x^2 - 12x + 9x$, por tanto, de $3x^2 - 12x + 9x = 0$ obtenemos

$$3(x-3)(x-1) = 0.$$

Los números críticos son $x_1 = 1$ y $x_2 = 3$.

c. Los valores extremos son $f(1) = (1)^3 - 6(1) + 9(1) = 4$ y $f(3) = (3)^3 - 6(3) + 9(3) = 0$.

4. $f(x) = (x-1)^2(x+2)$.

a. El dominio son todos los números reales (por ser una función polinomial).

b. En este caso $f'(x) = 3(x-1)(x+1)$. Los números críticos son $x_1 = -1$ y $x_2 = 1$.

c. Los valores extremos son $f(-1) = (-1-1)^2(-1+2) = 4$ y $f(1) = (1-1)^2(1+2) = 0$.

5. $f(x) = x^{\frac{4}{3}} - 4x^{\frac{1}{3}} + 1$.

a. El dominio son todos los números reales (no tiene denominadores variables y no tiene radicales de índice par).

b. En este caso $f'(x) = \frac{4}{3}\sqrt[3]{x} - \frac{4}{3\sqrt[3]{x^2}}$.

La función derivada no está definida cuando $x_1 = 0$.

Por otra parte,

$$\frac{4}{3}\sqrt[3]{x}-\frac{4}{3\sqrt[3]{x^2}}=0\text{, implica }\sqrt[3]{x}-\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}=0,$$

luego $\sqrt[3]{x}\ \sqrt[3]{x^2}-1=0$ y $x=1$.
Los números críticos son $x_1=0$ y $x_2=1$.

c. Los valores extremos son $f(0)=(0)^{\frac{4}{3}}-4(0)^{\frac{1}{3}}+1=1$ y $f(1)=(1)^{\frac{4}{3}}-4(1)^{\frac{1}{3}}+1=-2$.

6. $f(x)=\dfrac{2}{x^2+4x}$.

a. El dominio no incluye a los números 0 y -4.

b. $f'(x)=-\dfrac{2(2x+4)}{(x^2-4x)^2}$.

La función derivada no está definida cuando $x=-4$ y $x=0$, sin embargo, no son números críticos por no pertenecer al dominio de la función.
De $-\dfrac{2(2x+4)}{(x^2-4x)^2}=0$ obtenemos $2x+4=0$, por tanto, el único número crítico es $x=-2$.

c. El único valor extremo es $f(-2)=\dfrac{2}{(-2)^2+4(-2)}=-\dfrac{1}{2}$.

7. $f(x)=\dfrac{x^2-x-2}{x^2-6x+9}$.

a. El dominio no incluye al número 3.

b. $f'(x)=-\dfrac{5x-7}{(x-3)^3}$.

La función derivada no está definida en $x=3$, sin embargo, no es un número crítico al no pertenecer al dominio de la función.
De la ecuación

$$-\frac{5x-7}{(x-3)^3}=0\text{ obtenemos }5x-7=0,$$

luego $x=\dfrac{7}{5}$ es el único número crítico.

c. El único valor extremo es $f\left(\dfrac{7}{5}\right)=\dfrac{\left(\frac{7}{5}\right)^2-\left(\frac{7}{5}\right)-2}{\left(\frac{7}{5}\right)^2-6\left(\frac{7}{5}\right)+9}=-\dfrac{9}{16}$.

SECCIÓN 4.1 BLOQUE 2 EJERCICIOS 1	Nombre Fecha

Determina:
i. El dominio.
ii. Los números críticos.
iii. Los valores extremos.

1. $f\left(x\right)=2x^{2}-8x+9$.

2. $f\left(x\right)=x^{3}-2x+4$.

3. $f(x) = x^3 - 3x + 2$.

4. $f(x) = x^4 - 8x^2 + 3$.

5. $f(x) = \dfrac{x^2 + 1}{x^2 - 4}$.

6. $f(x) = 5x^2\sqrt{x+1}$.

7. $f(x) = \sqrt{x^2+1}$.

8. $f(x)=(x-1)^2-3x$.

9. $f(x)=\sqrt{x^2-7}$.

Los números (junto con sus respectivas imágenes) en los que se anula (o no existe) la función derivada f' asociada a f desempeñan un papel básico en la optimización de características de situaciones descritas por funciones. Una primera clasificación de los valores extremos de una función es valores máximos y valores mínimos, ***figura 4.2***.

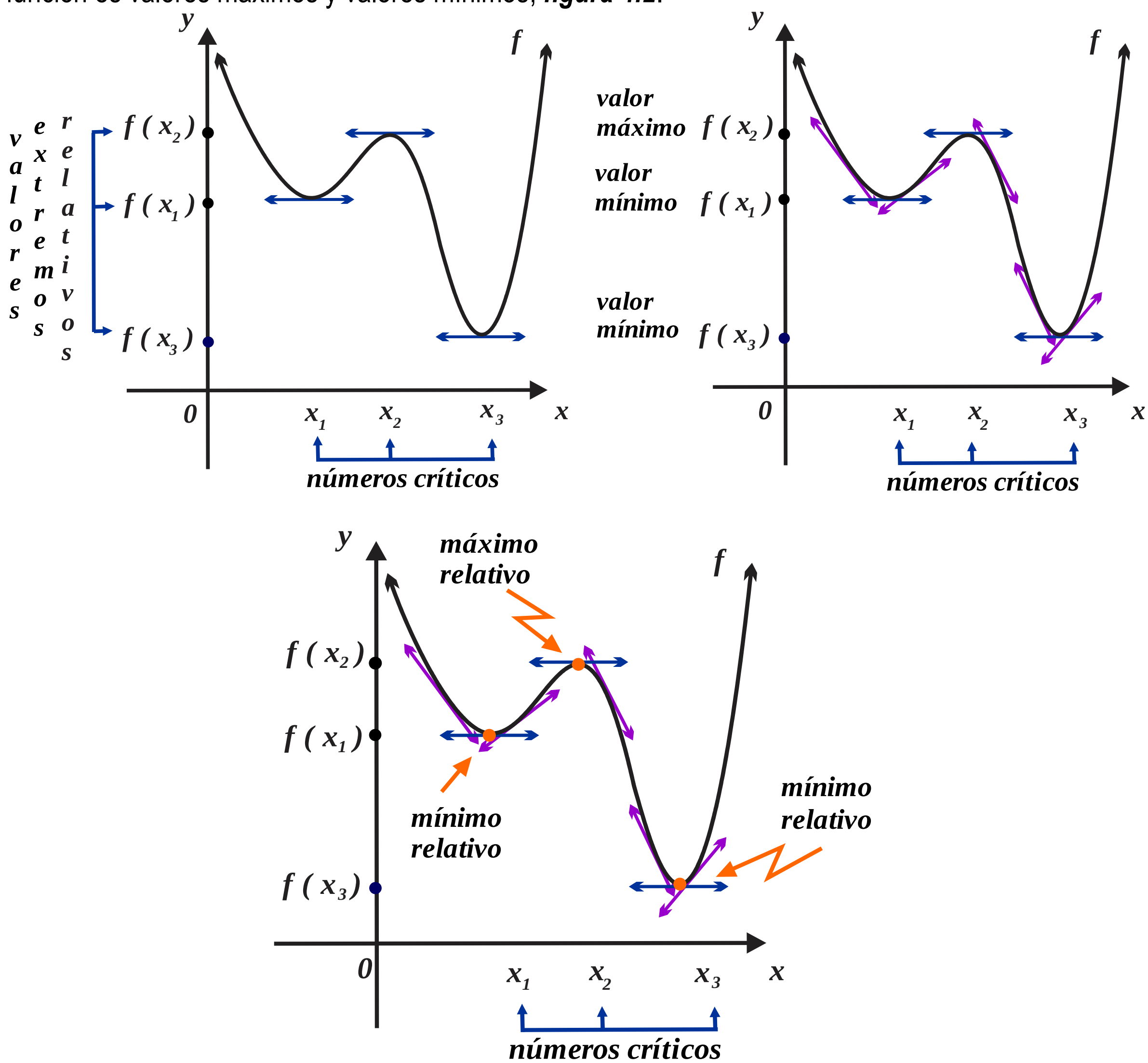


FIGURA 4.2

La ***figura 4.2*** muestra el comportamiento de las pendientes de las líneas rectas tangentes a una curva alrededor de un valor máximo y un valor un mínimo:

i. Alrededor de un valor máximo, el signo de la función derivada primero es positivo, luego $f'(x)=0$ y finalmente negativo.

ii. Alrededor de un mínimo, el signo de la función derivada primero es negativo, luego $f'(x)=0$ y finalmente positivo. Las observaciones anteriores son válidas suponiendo continuidad y derivabilidad de la función f sobre el intervalo abierto (a,b) suponiendo que x_1, x_2 y x_3 son número crítico y contenidos en (a,b).

PROPIEDAD 4.2

EL CRITERIO DE LA PRIMERA DERIVADA

Sea x_0 un número crítico de una función continua sobre el intervalo abierto (a,b), intervalo que contiene al número x_0. Si la función f es derivable en el intervalo (a,b), excepto quizá en x_0, y sí el signo de f':

a. Cambia de positivo a negativo alrededor de x_0, entonces $f(x_0)$ es un valor máximo relativo de f.

b. Cambia de negativo a positivo alrededor de x_0, entonces $f(x_0)$ es un valor mínimo relativo de f.

c. No cambia de signo alrededor de x_0, $f(x_0)$ no es ni valor mínimo relativo ni valor máximo relativo de f.

La propiedad anterior justifica la ***estrategia 4.3,*** que es de gran utilidad en el análisis de los valores extremos de relativos de la función f.

ESTRATEGIA 4.3

NATURALEZA DE LOS VALORES EXTREMOS DE UNA FUNCIÓN

i. Aplica la ***estrategia 4.3***.

ii. Verifica si existe cambio de signo alrededor de los números críticos.

SECCIÓN 4.1
BLOQUE 2
EJEMPLOS 2

Determina:

a. El dominio de la función.

b. Los números críticos y los valores extremos relativos.

c. Los intervalos de monotonía y clasifica los valores extremos.

1. $f(x)=-2x^2+10x+4$.

a. El dominio son todos los números reales (por ser una función polinomial).

b. En este caso $f'(x)=-4x+10$. Los números críticos son las soluciones de

$$-4x+10=0,$$

por tanto, $4x=10$, o bien $x=\frac{5}{2}$, el valor extremo que tiene asociado es

$$f\left(\frac{5}{2}\right)=-2\left(\frac{5}{2}\right)^2+10\left(\frac{5}{2}\right)+4=\frac{33}{2}.$$

c. Los intervalos de monotonía y clasificación de los valores extremos son

Intervalo	x_p	$f'(x_p)$	**Signo de** $f'(x_p)$	**Carácter de** f
$I_1\left(-\infty\,,\ \frac{5}{2}\right)$	0	$f'(0)=10$	positivo	decreciente
$I_2\left(\frac{5}{2}\,,\ +\infty\right)$	3	$f'(3)=-2$	negativo	creciente

Luego, f' cambia de positiva a negativa alrededor de $x=\frac{5}{2}$ y como consecuencia $f\left(\frac{5}{2}\right)=\frac{33}{2}$ es un valor máximo de $f(x)=-2x^2+10x+4$, siendo $p\left(\frac{5}{2},\ \frac{33}{2}\right)$ el punto máximo.

2. $f(x)=x^3-6x^2+9x$.

a. El dominio son todos los números reales (por ser una función polinomial).

b. Si derivamos obtenemos la función $f'(x)=3x^2-12x+9$, por tanto,

$$3x^2-12x+9=0\text{, o bien } 3(x-3)(x-1)=0,$$

los números críticos son $x_1=1$ y $x_2=3$. Los valores extremos respectivos son

$$f(1)=(1)^3-6(1)^2+9(1)=4\text{, asimismo } f(3)=(3)^3-6(3)^2+9(3)=0.$$

c. Los intervalos de monotonía y clasificación de los valores extremos son

Intervalo	x_p	$f'(x_p)$	**Signo de** $f'(x_p)$	**Carácter de** f
$I_1(-\infty\,,\ 1)$	0	$f'(0)=0$	sin signo	
$I_2(1,\ 3)$	2	$f'(2)=6$	negativo	decreciente
$I_3(3,\ +\infty)$	4	$f'(4)=36$	positivo	creciente

Cuando $x_1=1$ la función f' no cambia de signo, por tanto, la ***estrategia 4.3*** no proporciona información sobre el valor extremo $f(1)=4$.

Alrededor de $x_2=3$ el signo de la función f' cambia de negativo a positivo, como consecuencia $f(3)=0$ es un valor mínimo de $f(x)=x^3-6x^2+9x$.

El punto $p(3,\ 0)$ es un mínimo de $f(x)=x^3-6x^2+9x$.

3. $f(x)=(x-1)^2(x+2)$.

a. El dominio son todos los números reales (por ser una función polinomial).

b. En este caso $f'(x)=3(x-1)(x+1)$. Los números críticos son $x_1=-1$ y $x_2=1$. Los valores extremos son $f(-1)=(-1-1)^2(-1+2)=4$ y $f(1)=(1-1)^2(1+2)=0$.

c. Los intervalos de monotonía y clasificación de los valores extremos son

Intervalo	x_p	$f'(x_p)$	**Signo de** $f'(x_p)$	**Carácter de** f
$I_1(-\infty,\ -1)$	-2	$f'(-2)=9$	positivo	creciente
$I_2(-1,\ 1)$	0	$f'(0)=-3$	negativo	decreciente
$I_3(1,\ +\infty)$	2	$f'(2)=9$	positivo	creciente

Si $x_1=-1$ el signo de f' cambia de positivo a negativo, luego, $f(-1)=4$ es un valor máximo y el punto máximo de $f(x)=(x-1)^2(x+2)$ es $p(-1,\ 4)$.

Alrededor de $x_2=1$ el signo de f' cambia de negativo a positivo, luego, $f(1)=0$ es un valor mínimo y el punto mínimo de $f(x)=(x-1)^2(x+2)$ es $p(1,\ 0)$.

4. $f(x)=x^{\frac{4}{3}}-4x^{\frac{1}{3}}+1$.

a. El dominio son todos los números reales (no tiene denominadores variables y no tiene radicales de índice par).

b. En este caso $f'(x)=\frac{4}{3}\sqrt[3]{x}-\frac{4}{3\sqrt[3]{x^2}}$.

La función derivada no está definida en $x_1=0$. Por otra parte,

$$\frac{4}{3}\sqrt[3]{x}-\frac{4}{3\sqrt[3]{x^2}}=0 \text{ implica } \sqrt[3]{x}-\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}=0, \text{ o bien } \sqrt[3]{x}\sqrt[3]{x^2}-1=0 \text{ y } x=1.$$

Los números críticos son $x_1=0$ y $x_2=1$, con valores extremos respectivamente

$$f(0)=(0)^{\frac{4}{3}}-4(0)^{\frac{1}{3}}+1=1 \text{ y } f(1)=(1)^{\frac{4}{3}}-4(1)^{\frac{1}{3}}+1=-2.$$

c. Los intervalos de monotonía y clasificación de los valores extremos son:

Intervalo	x_p	$f'(x_p)$	**Signo de** $f'(x_p)$	**Carácter de** f
$I_1(-\infty,\ 0)$	-1	$f'(-1)=-\frac{8}{3}$	negativo	decreciente
$I_2(0,\ 1)$	$\frac{1}{8}$	$f'\left(\frac{1}{8}\right)=-2$	negativo	decreciente
$I_3(1,\ +\infty)$	8	$f'(8)=\frac{7}{3}$	positivo	creciente

Alrededor de $x_1=0$ la función f' no cambia de signo, por tanto, la ***estrategia 4.3*** no proporciona información sobre el valor extremo $f(0)=1$.

Alrededor de $x_2=1$ el signo de la función f' cambia de negativo a positivo, por tanto, $f(1)=-2$ es un valor mínimo de $f(x)=x^{\frac{4}{3}}-4x^{\frac{1}{3}}+1$, así el punto $p(0,\ 1)$ es un mínimo de $f(x)=x^{\frac{4}{3}}-4x^{\frac{1}{3}}+1$.

5. $f(x)=\dfrac{2}{x^2+4x}$.

a. El dominio no incluye a los números 0 y -4.

b. $f'(x)=-\dfrac{2(2x+4)}{(x^2-4x)^2}$, la función derivada no está definida cuando $x=-4$ y $x=0$, sin embargo, no son números críticos por no pertenecer al dominio de la función.

De $-\dfrac{2(2x+4)}{(x^2-4x)^2}=0$ obtenemos $2x+4=0$, por tanto, el único número crítico es $x=-2$ y el único valor extremo es

$$f(-2)=\frac{2}{(-2)^2+4(-2)}=-\frac{1}{2}.$$

c. Los intervalos de monotonía y clasificación de los valores extremos son

Intervalo	x_p	$f'(x_p)$	**Signo de** $f'(x_p)$	**Carácter de** f
$I_1(-\infty,\ -2)$	$-\frac{5}{2}$	$f'\left(-\frac{5}{2}\right)=\frac{32}{225}$	positivo	creciente
$I_2(-2,\ +\infty)$	$-\frac{3}{2}$	$f'\left(-\frac{3}{2}\right)=-\frac{32}{225}$	negativo	decreciente

Alrededor de $x=-2$ el signo de la función $f'(x)$ cambia de negativo a positivo, por tanto,

$$f(-2)=-\frac{1}{2}$$

es un valor mínimo de

$$f(x)=\frac{2}{x^2+4x},$$

y el punto $p(0,\ 1)$ es un mínimo de $f(x)=\dfrac{2}{x^2+4x}$.

SECCIÓN 4.1 BLOQUE 2 EJERCICIOS 2	Nombre Fecha

Determina:
i. El dominio de la función.
ii. Los números críticos y los valores extremos.
iii. Los intervalos de monotonía y clasifica los valores extremos.

1. $f(x) = x(x-2)^2$.

2. $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 9x + 3$.

3. $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x + 1$.

4. $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2 + x + 1$.

5. $f(x) = x^4 - 8x^2 + 4$.

6. $f\left(x\right)=\left(x+1\right)^{3}\left(x-1\right).$

7. $f(x)=\left(x^2-1\right)^3$.

8. $f(x)=\dfrac{4}{x^2+2x}$.

9. $f\left(x\right)=x^{\frac{1}{3}}\left(x+3\right)^{\frac{2}{3}}$.

10. $f\left(x\right)=2\sqrt{x}-x$.

BLOQUE 3

CONCAVIDADES

Presentamos ejemplos que muestran la información que proporciona la segunda derivada en la forma (local) de la curva asociada a una función dos veces derivable.

La posición de las líneas rectas tangentes en una curva (asociada a una función derivable) determina la forma en que ésta crece (o decrece). La función $f^{(2)}$ (derivada de la función f') y segunda derivada de la función f), proporciona información sobre el comportamiento de la curva asociada a la función f, en particular, sobre la forma en que crece (o decrece). La ***figura 4.3*** muestra las dos formas (genéricas) como puede crecer (o decrecer) la curva asociada la función f sobre el intervalo $(a\ ,\ b)$.

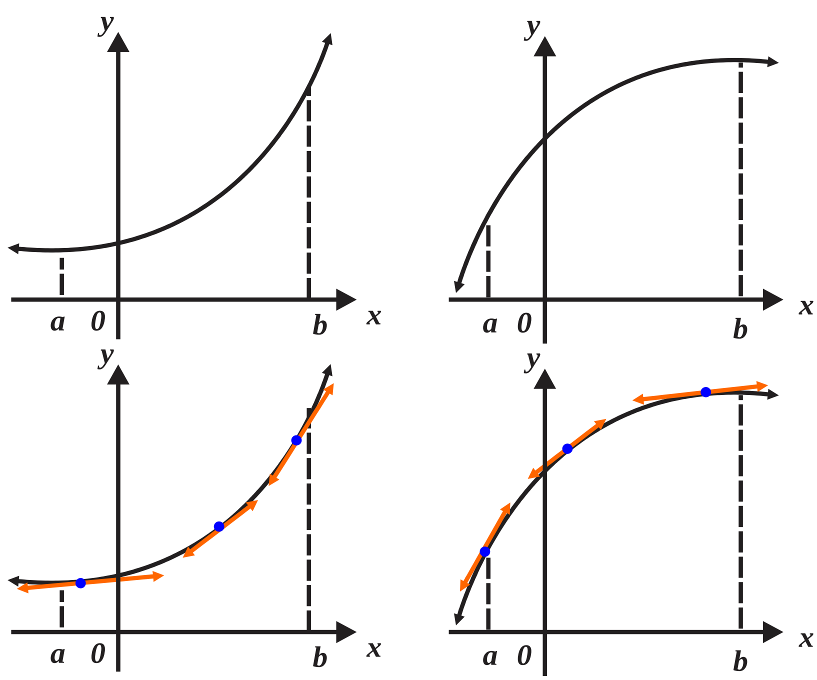


FIGURA 4.3

A la ***figura 4.3*** hemos agregado líneas rectas tangentes, nota:

i. En el primer caso las líneas rectas tangentes se encuentran "abajo" de la curva y en el segundo caso se encuentran "arriba" de ella.

ii. Las pendientes de las líneas rectas tangentes que se encuentran por abajo de la curva son crecientes, y si se encuentran por encima de la curva son decrecientes.

Si la función que describe la pendiente de la línea recta tangente (función derivada) a una curva es creciente sobre el intervalo $(a\ ,\ b)$ se dice que es cóncava hacia arriba, en el caso contrario, será cóncava hacia abajo.

DEFINICIÓN 4.3

TIPOS DE CONCAVIDADES

Sean f una función derivable sobre el intervalo $(a\,,b)$, entonces su curva asociada es:

a. Cóncava hacia arriba si la función f' es creciente en el intervalo $(a\,,b)$.

b. Cóncava hacia abajo si la función f' es decreciente sobre el intervalo $(a\,,b)$.

La ***figura 4.4*** muestra una curva cóncava hacia arriba (que pertenece a una función f) y el comportamiento de su derivada f', nota:

$$f'(x_1) < f'(x_0) < f'(x_2).$$

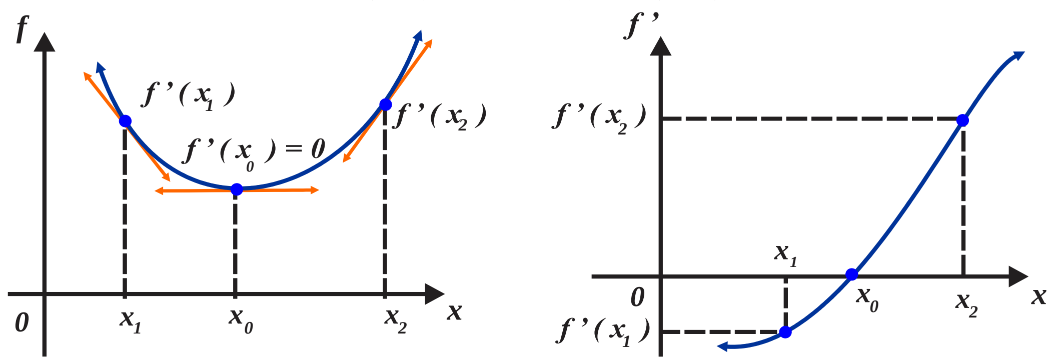


FIGURA 4.4

La ***figura 4.5*** muestra una curva cóncava hacia abajo (perteneciente a la función f) y el comportamiento de su función derivada f', observa $f'(x_1) > f'(x_0) > f'(x_2)$.

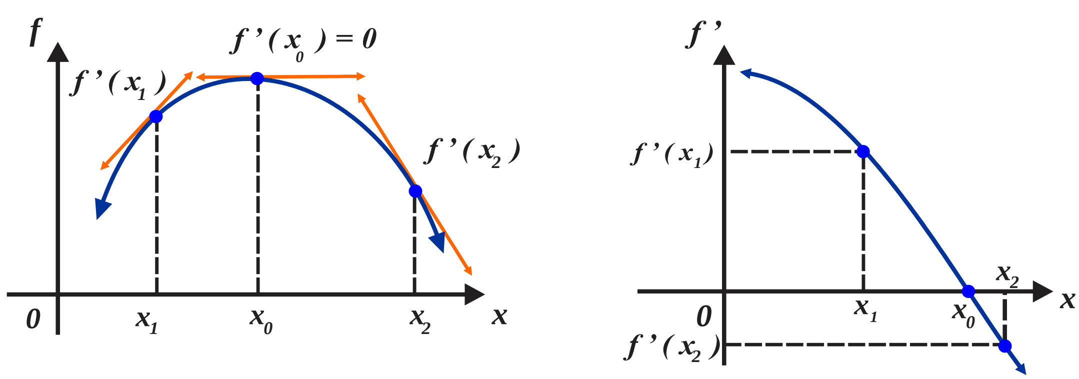


FIGURA 4.5

Estas observaciones constituyen un criterio para determinar los intervalos (abiertos) sobre los cuales la curva asociada a la función f (dos veces derivable) es cóncava hacia arriba o es cóncava hacia abajo. El criterio consiste en determinar los intervalos en los que la función derivada f' es creciente y los intervalos donde es decreciente, esto equivale a identificar los intervalos sobre los que se cumple que $f^{(2)} > 0$ y los intervalos sobre los que dónde $f^{(2)} < 0$.

PROPIEDAD 4.3

CRITERIO DE CONCAVIDAD

Sea f dos veces derivable sobre (a, b), entonces:

a. Si $f^{(2)} > 0$ para toda $x \in (a, b)$, entonces la curva asociada a f es cóncava hacia arriba.

b. Si $f^{(2)} < 0$ para toda $x \in (a, b)$, entonces la curva asociada a f es cóncava hacia abajo.

Por otra parte, los puntos de cambia la concavidad de una curva (asociada a una función doblemente derivable) se llaman puntos de inflexión.

DEFINICIÓN 4.4

PUNTO DE INFLEXIÓN

Sea f una función derivable sobre el intervalo (a, b). Sea x_0 un número en el intervalo (a, b).

a. Si la concavidad de la curva asociada a f cambia en el punto $A(x_0, f(x_0))$, entonces, este punto, se denomina "punto de inflexión".

b. El número x_0 es la "abscisa" del punto de inflexión y también se considera número crítico.

Analíticamente, los puntos de inflexión pueden identificarse considerando: ya sea un cambio de concavidad, o revisando el comportamiento de función tercera derivada y verificando que ésta es distinta de cero al ser evaluada en un número crítico.

ESTRATEGIA 4.4

IDENTIFICACIÓN DE CONCAVIDADADES Y DE PUNTOS DE INFLEXIÓN

i. Obtén el dominio de la función f

ii. Obtén las tres primeras derivadas de f.

iii. Construye la ecuación $f^{(2)} = 0$ y resuélvela.

iv. Las soluciones de $f^{(2)} = 0$ definen en el dominio de f intervalos, en los números extremos la función puede alcanzar un punto de inflexión.

v. En cada intervalo toma un número x_p de prueba y determine el signo de $f^{(2)}$.

vi. Con los resultados obtenidos en el inciso anterior decide el tipo de concavidad de la función y verifica si hay cambio en el signo de $f^{(2)}$ en intervalos contiguos.

vii. En su caso, verifica, si x_0 es la abscisa de un punto de inflexión (se debe cumplir $f^{(3)} \neq 0$).

SECCIÓN 4.1
BLOQUE 3
EJEMPLOS 1

Determina:
a. El dominio de la función.
b. Las dos primeras funciones derivada.
c. Los números que anulan la segunda derivada y los intervalos en que seccionan al dominio de la función.
d. Los tipos de concavidades y los posibles números en los que existen puntos de inflexión.
e. Los puntos de inflexión.

1. Si $f(x)=\frac{1}{4}x^4-6x^2$.

a. Dado que $f(x)=\frac{1}{4}x^4-6x^2$ es una función polinomial, su dominio es el conjunto de todos los números reales.

b. $f'(x)=x^3-12x$ y $f^{(2)}(x)=3x^2-12$.

c. $f^{(2)}(x)=3x^2-12=0$, implica $x^2-4=0$, o bien $(x-2)(x+2)=0$. Los ceros de ésta última función son $x=-2$ y $x=2$, mismos que dividen al eje x en los intervalos:

$$(-\infty\ ,\ -2),\ (-2\ ,\ 2) \text{ y } (2\ ,\ +\infty).$$

Intervalo	Número de prueba	$f^{(2)}(x_p)$	Signo de $f^{(2)}(x)$	Concavidad
$I_1(-\infty\ ,\ -2)$	$x_{p1}=-3$	15	$+$	Hacia arriba.
$I_2(-2\ ,\ 2)$	$x_{p2}=0$	-12	$-$	Hacia abajo.
$I_3(2\ ,\ +\infty)$	$x_{p3}=3$	15	$+$	Hacia arriba.

La curva asociada a f es cóncava hacia arriba si x pertenece al intervalo

$$I=(-\infty\ ,\ -2)\cup(2\ ,\ +\infty)$$

y es cóncava hacia abajo sobre el intervalo

$$I_2(-2\ ,\ 2).$$

d. Considerando que alrededor de los números $x=-2$ y $x=2$ existen cambios de signo de la función
$f^{(2)}(x)=3x^2-12$ y

$$f(-2)=\frac{1}{4}(-2)^4-6(-2)^2=-20,\ f(2)=\frac{1}{4}(2)^4-6(2)^2=-20$$

concluimos que los puntos

$$p_1(-2\ ,\ -20) \text{ y } p_2(2\ ,\ -20)$$

son puntos de inflexión.

2. $f(x)=\dfrac{x^3}{3}-2x^2$.

a. $f(x)=\dfrac{x^3}{3}-2x^2$ es una función polinomial, su dominio es el conjunto de los números reales.

b. $f'(x)=x^2-4x$, $f^{(2)}(x)=2x-4$ y $f^{(3)}(x)=2$.

c. $f^{(2)}(x)=2x-4=0$, implica $2x-4=0$, o bien $x=2$.

El cero de esta última función es $x=2$ y genera los intervalos: $(-\infty\ ,\ 2)$ y $(2\ ,\ +\infty)$.

Intervalo	**Número de prueba**	$f^{(2)}(x_p)$	**Signo de** $f^{(2)}(x)$	**Concavidad**
$I_1(-\infty\ ,\ 2)$	$x_{p1}=0$	-4	$-$	Hacia abajo.
$I_2(2\ ,\ +\infty)$	$x_{p2}=3$	2	$+$	Hacia arriba.

La curva asociada a f es cóncava hacia arriba si x pertenece al intervalo

$I_2=(2\ ,\ +\infty)$ y es cóncava hacia abajo sobre el intervalo $I_1(-\infty\ ,\ 2)$.

d. Considerando que alrededor del número $x=2$ la función $f^{(2)}(x)=2x-4$ cambia de signo y $f^{(3)}(3)=2$, concluimos el punto $p_1(2\ ,0)$ es un punto de inflexión.

3. $f(x)=\dfrac{20x}{x^2+3}$.

a. El denominador de $f(x)=\dfrac{20x}{x^2+3}$ no se anula, por tanto, el dominio es el conjunto de todos los números reales.

b. $f'(x)=\dfrac{20(-x^2+3)}{(x^2+3)^2}$ y $f^{(2)}(x)=-\dfrac{40x(-x^2+9)}{(x^2+3)^3}$.

c. $f^{(2)}(x)=-\dfrac{40x(-x^2+9)}{(x^2+3)^3}=0$, implica $40x(-x^2+9)=0$, o bien

$40x(3+x)(3-x)=0$, por tanto, $x=-3$, $x=0$ y $x=3$.

Los números anteriores dividen al eje x en los intervalos: $(-\infty\ ,\ -3)$, $(-3\ ,\ 3)$ y $(3\ ,\ +\infty)$.

Intervalo	Número de prueba	$f^{(2)}(x_p)$	Signo de $f^{(2)}(x)$	Concavidad
$I_1(-\infty\ ,\ -3)$	$x_{p1}=-4$	$\dfrac{(160)(-7)}{19^3}$	$-$	Hacia abajo.
$I_2(-3\ ,\ 0)$	$x_{p2}=-1$	$\dfrac{(40)(8)}{4^3}$	$+$	Hacia arriba.
$I_3(0\ ,\ 3)$	$x_{p3}=1$	$\dfrac{(-40)(8)}{4^3}$	$-$	Hacia abajo.
$I_4(3\ ,\ +\infty)$	$x_{p4}=4$	$\dfrac{(160)(7)}{19^3}$	$+$	Hacia arriba.

La curva asociada a la función f es cóncava hacia abajo si x pertenece al intervalo

$$(-\infty\ ,\ -3)\cup(0\ ,\ 3)$$

y es cóncava hacia arriba sobre el intervalo

$$(-3\ ,\ 0)\cup(3\ ,\ +\infty).$$

d. Considerando que alrededor de los números $x=-3$, $x=0$ y $x=2$ la función $f^{(2)}(x)=2x-4$ cambia de signo y que

$$f(-3)=\frac{20(-3)}{(-3)^2+3}=-5,\ f(0)=\frac{20(0)}{(0)^2+3}=0 \text{ y } f(3)=\frac{20(3)}{(3)^2+3}=5,$$

concluimos que los puntos

$$p_1(-3\ ,5)\ ,\ p_2(0\ ,0) \text{ y } p_3(3\ ,5)$$

son puntos de inflexión.

4. $f(x)=x^2+\dfrac{1}{x}$.

a. El denominador de $f(x)=x^2+\dfrac{1}{x}$ se anula cuando $x=0$, por tanto, el dominio es el conjunto

$$(-\infty\ ,\ 0)\cup(0\ ,\ +\infty).$$

b. $f'(x)=2x-x^{-2}=2x-\dfrac{2}{x^2}$ y $f^{(2)}(x)=2-2x^{-3}=2+\dfrac{2}{x^3}$.

c. $f^{(2)}(x)=2+\dfrac{2}{x^3}=0$, implica $2x^3+2=0$, o bien $2\left(x^3+1\right)=0$, por tanto, $x=-1$.

Los números anteriores ($x=0$ y $x=-1$) dividen al eje x en los intervalos:

$$(-\infty\ ,\ -1),\ (-1\ ,\ 0) \text{ y } (0\ ,\ +\infty).$$

Intervalo	Número de prueba	$f^{(2)}(x_p)$	Signo de $f^{(2)}(x)$	Concavidad
$I_1(-\infty\ ,\ -1)$	$x_{p1}=-2$	$\frac{3}{4}$	$+$	Hacia arriba.
$I_2(-1\ ,\ 0)$	$x_{p2}=-\frac{1}{2}$	-2	$-$	Hacia abajo.
$I_3(0\ ,\ +\infty)$	$x_{p3}=1$	4	$+$	Hacia arriba.

Si x pertenece al intervalo $I_2(-1\ ,\ 0)$ la curva asociada a f es cóncava hacia abajo y cóncava hacia arriba sobre $(-\infty\ ,\ -1)\cup(0\ ,\ +\infty)$.

c. Alrededor del número $x=-1$, la función $f^{(2)}(x)=2+\dfrac{2}{x^3}$ cambia de signo, además $f(-1)=(-1)^2+\dfrac{1}{-1}=0$, por tanto, el punto $p(-1\ ,0)$, es un punto de inflexión.

SECCIÓN 4.1 BLOQUE 3 EJERCICIOS 1	Nombre Fecha

Determina:

i. El dominio de la función.

ii. Las dos primeras funciones derivada.

iii. Los números que anulan la segunda derivada y los intervalos en que seccionan al dominio de la función, los tipos de concavidades y los posibles números en los que existen puntos de inflexión.

iv. Los puntos de inflexión.

1. Si $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 4$.

2. Si $f(x) = -2x^3 + 6x^2 - 4$.

3. Si $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - x^3 - 2$.

4. Si $f(x) = x^2 + \frac{8}{x}$.

5. Si $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 - 9}$.

6. Si $f(x) = \dfrac{1}{4}\left(x^2 - 12\right)^2$.

7. Si $f(x) = \frac{1}{6}(x-2)^3$.

8. Si $f(x) = \frac{2}{4-x^2}$.

BLOQUE 4

CRITERIO DE LA SEGUNDA DERIVADA

Presentamos un grupo de problemas resueltos como guía al estudiante en el uso y aplicación del "criterio de la segunda derivada" en la caracterización de los valores extremos de una función y el trazo de su gráfica.

La segunda derivada de una función proporciona información sobre el carácter de sus valores extremos. La siguiente figura presenta las curvas asociadas a las funciones f y f' definidas sobre el intervalo $I=(\,x_1\;,\;x_2\,)$. La curva de la izquierda (corresponde a f) es cóncava hacia arriba y alcanza un valor mínimo sobre x_0, éste es $f(\,x_0\,)$. La curva de la derecha es creciente (corresponde a f'), muestra: $f'(\,x_0\,)=0$ y que alrededor de x_0 se cumple

$$f^{(2)}(\,x_0\,)>0.$$

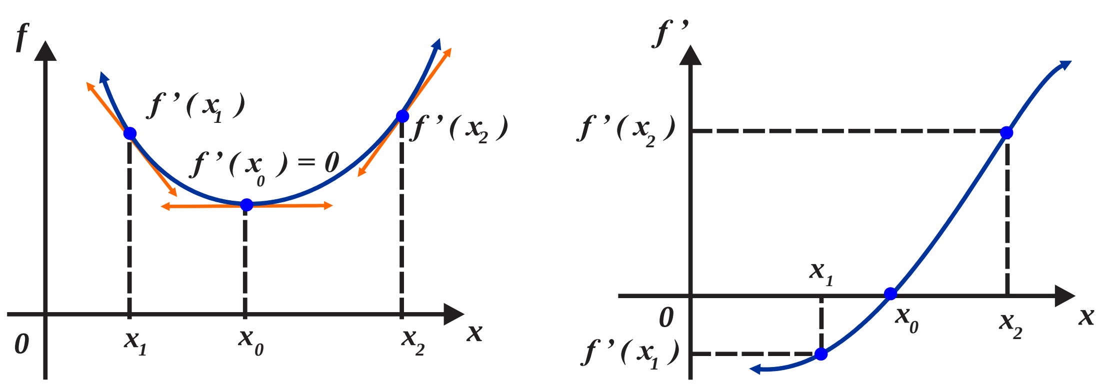


FIGURA 4.6

La curva de la izquierda (corresponde a f) es cóncava hacia abajo y alcanza un valor máximo en $x=x_0$, éste es $f(\,x_0\,)$. La curva de la derecha es decreciente (corresponde a f') y muestra: $f'(\,x_0\,)=0$ y que alrededor de x_0 se cumple

$$f^{(2)}(\,x_0\,)<0.$$

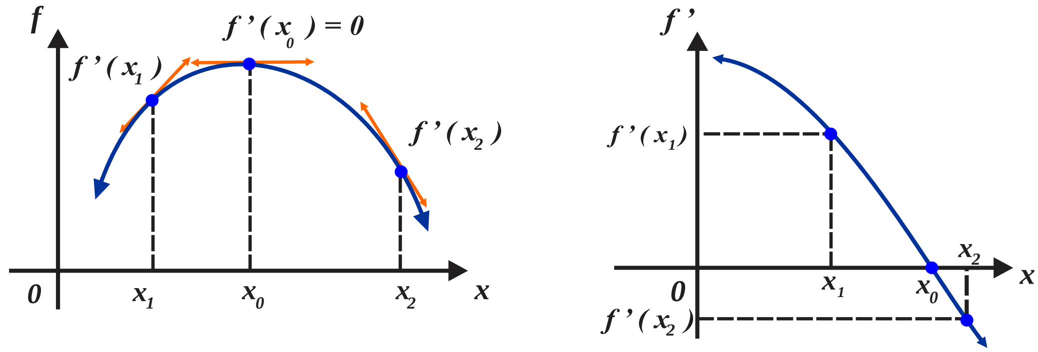


FIGURA 4.7

PROPIEDAD 4.4

CRITERIO DE LA SEGUNDA DERIVADA

Sea f una función tal que $f'(x_0)=0$ y $f^{(2)}$ existe alrededor de x_0.

a. Si $f^{(2)}(x_0)>0$, entonces $f(x_0)$ es un valor mínimo relativo.

b. Si $f^{(2)}(x_0)<0$, entonces $f(x_0)$ es un valor máximo relativo.

c. Si $f^{(2)}(x_0)=0$, entonces el criterio no proporciona información sobre $f(x_0)$.

La siguiente ***figura 4.8*** ilustra el criterio de la segunda derivada.

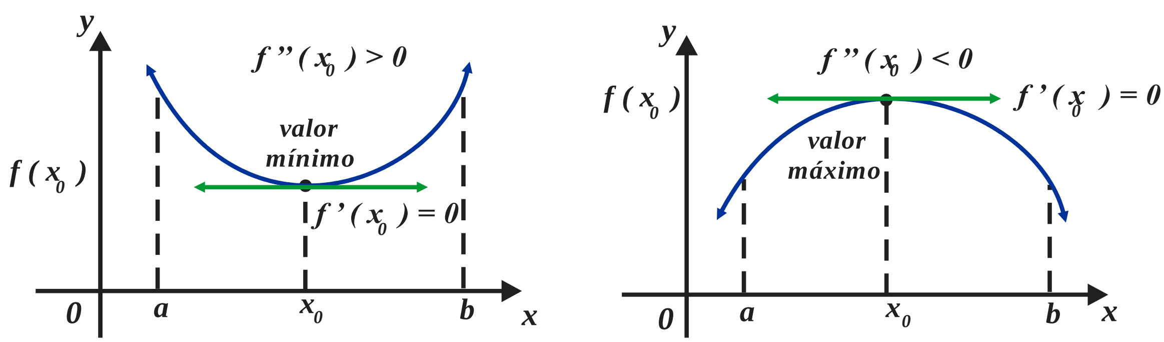


FIGURA 4.8

SECCIÓN 4.1
BLOQUE 4
EJEMPLOS 1

Determina:

a. El dominio de la función.

b. Las dos primeras funciones derivada.

c. Los números críticos y los máximos y mínimos.
d. Aplica el criterio de la segunda derivada y determina el carácter de los valores extremos.

1. Si $f(x)=x^3+\frac{3}{2}x^2-6x+2$.

a. Al ser $f(x)=x^3+\frac{3}{2}x^2-6x+2$ una función polinomial su dominio son todos los números reales.

b. $f'(x)=3x^2+3x-6$ y $f^{(2)}(x)=6x+3$.

c. Si $f'(x)=3x^2+3x-6=0$, entonces $3(x^2+x-2)=0$,
o también

$$3(x+2)(x-1)=0.$$

Los números críticos son $x=-2$ y $x=1$, con valores extremos

$$f(-2)=(-2)^3+\frac{3}{2}(-2)^2-6(-2)+2=12 \text{ y } f(1)=(1)^3+\frac{3}{2}(1)^2-6(1)+2=-\frac{3}{2}$$

respectivamente.
Puesto que $f^{(2)}(-2)=6(-2)+3=-9$, el punto $p(-2\ ,\ 12)$ es máximo.
Considerando que $f^{(2)}(1)=6(1)+3=9$, el punto $q\left(1\ ,\ -\frac{3}{2}\right)$ es mínimo.

2. $f(x)=x^4-\frac{8}{3}x^3+2x^2+1$.

a. Al ser $f(x)=x^4-\frac{8}{3}x^3+2x^2+1$ una función polinomial su dominio son todos los números reales.

b. $f'(x)=4x^3-8x^2+4x$ y $f^{(2)}(x)=12x^2-16x+4$.

c. Si $f'(x)=4x^3-8x^2+4x$, entonces $4x^3-8x^2+4x=0$ o también

$$4x(x-1)^2=0.$$

Los números críticos son $x=0$ y $x=1$, con valores extremos

$$f(0)=(0)^4-\frac{8}{3}(0)^3+2(0)^2+1=1 \text{ y } f(1)=(1)^4-\frac{8}{3}(1)^3+2(1)^2+1=\frac{4}{3}$$

respectivamente.
d. Puesto que

$$f^{(2)}(0)=12(0)^2-16(0)+4=4,$$

el punto $p(0\ ,\ 1)$ es mínimo.
Considerando

$$f^{(2)}(1)=12(1)^2-16(1)+4=0,$$

el criterio de la segunda derivada no caracteriza al punto $q\left(1\ ,\ \frac{4}{3}\right)$.

3. $f(x)=\frac{1}{3}(x-4)^3$.

a. La función $f(x)=\frac{1}{3}(x-4)^3$ es polinomial, por tanto, su dominio son todos los números reales.

b. $f'(x)=(x-4)^2$ y $f^{(2)}(x)=2(x-4)$.

c. Si $f'(x)=(x-4)^2$, entonces $(x-4)^2=0$, de donde $x=4$.

El único número crítico es $x=4$ y tiene valor extremo

$$f(4)=\frac{1}{3}(x-4)=0.$$

d. Puesto que $f^{(2)}(4)=\frac{1}{3}(4-4)=0$, entonces el criterio de la segunda derivada no proporciona información sobre el carácter de punto $p(4\ ,\ 0)$.

4. $f(x)=\frac{x^2}{x-1}$.

a. La función $f(x)=\frac{x^2}{x-1}$ no está definida en $x=1$.

b. $f'(x)=\frac{x(x-2)}{(x-1)^2}$ y $f^{(2)}(x)=\frac{2}{(x-1)^3}$.

c. Si $f'(x)=\frac{x(x-2)}{(x-1)^2}$, entonces $\frac{x(x-2)}{(x-1)^2}=0$, o bien $x(x-2)=0$, de donde obtenemos los números críticos $x=0$ y $x=2$.

Los valores extremos

$$f(0)=\frac{0^2}{0-1}=0 \text{ y } f(2)=\frac{(2)^2}{2-1}=4 \text{ respectivamente.}$$

d. De $f^{(2)}(0)=\frac{2}{(0-1)^3}=-2$, concluimos que punto $p(0\ ,\ 0)$ es máximo.

Si $f^{(2)}(2)=\frac{2}{(2-1)^3}=2$, el punto $q(2\ ,\ 4)$ es mínimo.

SECCIÓN 4.1 BLOQUE 4 EJERCICIOS 1	Nombre Fecha

Determina:

i. El dominio de la función.

ii. Las dos primeras funciones derivada.

iii. Los números críticos.

iv. Aplica el criterio de la segunda derivada y determina el carácter de los valores extremos.

a. Si $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 4x$.

b. Si $f(x) = -x^3 + \frac{3}{4}x^2 + \frac{9}{2}x$.

c. Si $f(x) = x^4 - 2x^3$.

d. Si $f(x) = -\frac{1}{4}x^4 + 8x^2$.

e. Si $f(x) = 3x^4 - 12x^3 - 24x^2 + 5$.

f. Si $f(x) = -x^4 + 4x^3 - 15$.

g. Si $f(x)=\frac{1}{2}x^4-4x^2+2$.

h. Si $f(x)=\frac{2}{3}(x^2-4)^{\frac{2}{3}}$.

i. Si $f(x)=\dfrac{4}{x^2+1}$.

j. Si $f(x)=\dfrac{x^3}{(x-1)^2}$.

BLOQUE 5

BOSQUEJO DE LA GRÁFICA DE UNA FUNCIÓN

En funciones específicas ñostramos al alumno el uso de la información que proporcionan: la primera y la segunda derivada en el bosquejo de la "curva que tiene asociada".

La interpretación de la información que proporcionan las tres primeras derivadas de una función se utiliza en la realización del bosquejo de la curva que tiene asociada, es decir, una aproximación bastante fiel de la representación de la gráfica de una función. El siguiente algoritmo incluye los pasos que son imprescindibles en el bosquejo de la gráfica de una función.

1. Determinar el dominio.
2. Calcular su función primera derivada para construir los subintervalos del dominio sobre los cuales la función crece y sobre los cuales decrece.
3. Determinar los puntos críticos, los valores extremos y el carácter de éstos.
4. Calcular la función segunda derivada y utilizar la información que nos brinda en cuanto al tipo de concavidades y puntos de inflexión.

SECCIÓN 4.1
BLOQUE 5
EJEMPLOS 1

Bosqueja la gráfica de la función calculando.
a. Dominio.
b. Monotonía, máximos y mínimos.
c. Concavidades y puntos de inflexión.

1. $f(x)=\frac{1}{3}x^3-3x^2+8x-4$.

a. Su dominio son todos los números reales.

b. $f'(x)=x^2-6x+8=(x-4)(x-2)$.

Por tanto, los números críticos son: $x=2$, $f(2)=\frac{1}{3}(2)^3-3(2)^2+8(2)-4=\frac{8}{3}$

$x=4$, $f(4)=\frac{1}{3}(4)^3-3(4)^2+8(4)-4=\frac{4}{3}$.

El carácter de su monotonía es:

Intervalo	$\left(x_p \ , \ f'\left(x_p \right) \right)$	Signo de $f'(x)$	Monotonía
$I_1(-\infty \ , \ 2)$	$(\ 0 \ , \ 8 \ )$	positivo	creciente
$I_1(-\infty \ , \ 2)$	$(\ 3 \ , \ -1 \ )$	negativo	decreciente
$I_3(4 \ , +\infty)$	$(\ 5 \ , \ 3 \ )$	positivo	creciente

Como consecuencia:

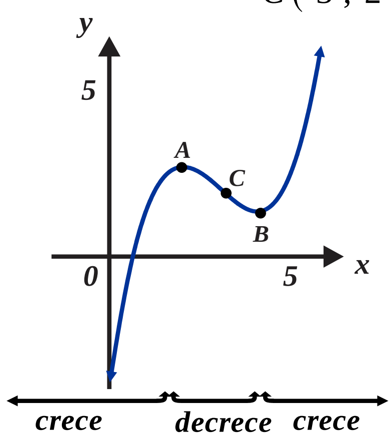
$$A\left(\ 2 \ , \ \frac{8}{3} \right) \text{ es un máximo y } B\left(\ 4 \ , \ \frac{4}{3} \right) \text{ es un mínimo.}$$

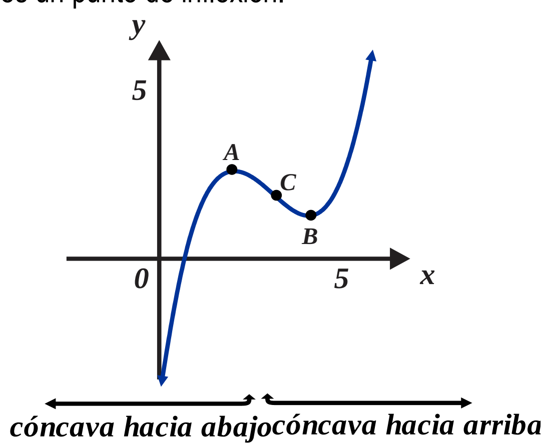
c. $f^{(2)}\left(x_p \right) = 2x - 6$, por tanto, $x = 3$ y $f(3) = \frac{1}{3}(3)^3 - 3(3)^2 + 8(3) - 4 = 2$

Intervalo	$\left(x_p \ , \ f^{(2)}\left(x_p \right) \right)$	Signo de $f^{(2)}\left(x_p \right)$	Concavidad
$I_1(-\infty, \ 3)$	$(\ 0 \ , \ -6 \ )$	negativo	Hacia abajo
$I_2(3, \ +\infty)$	$(\ 4 \ , \ 2 \ )$	Positivo	Hacia arriba

Como consecuencia:

$$C(\ 3 \ , \ 2 \ ) \text{ es un punto de inflexión.}$$





2. $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - x^3 + 2$.

a. Su dominio son todos los números reales.

b. $f'(x) = x^3 - 3x^2$, entonces $x^3 - 3x^2 - x = 0$, que es equivalente a

$$x^3 - 3x^3 = x^2(\ x - 3\ ) = 0.$$

Por tanto, los números críticos y sus respectivos valores extremos son

$$x = 0, \ f(0) = \frac{1}{4}(0)^4 - (0)^3 + 2 = 2$$

$$x = 3, \ f(3) = \frac{1}{4}(3)^4 - (3)^3 + 2 = -\frac{19}{4}.$$

El carácter de su monotonía es:

Intervalo	$\left(x_p\ ,\ f'\left(x_p\right)\right)$	Signo de $f'(x)$	Monotonía
$I_1(-\infty\ ,\ 0)$	$(-1\ ,\ -4)$	negativo	decreciente
$I_2(0\ ,\ 3)$	$(1\ ,\ -2)$	negativo	decreciente
$I_3(3\ ,\ +\infty)$	$(4\ ,\ 16)$	positivo	creciente

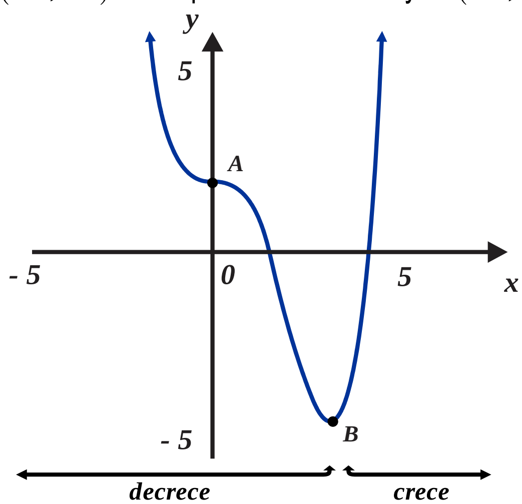
Como consecuencia:

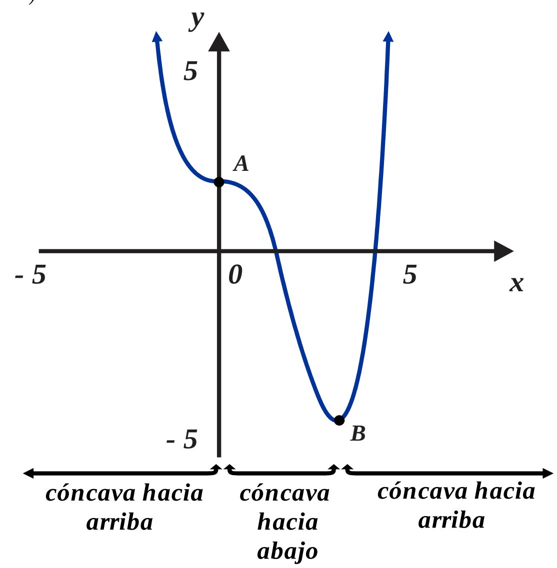
Para $A(\ 0\ ,\ 2\ )$ el criterio no proporciona información, $B\left(\ 3\ ,\ -\dfrac{19}{4}\ \right)$ es un mínimo.

c. $f^{(2)}\left(x_p\right)=3x^2-6x=3x(x-2)$.

Intervalo	$\left(x_p\ ,\ f^{(2)}\left(x_p\right)\right)$	Signo de $f^{(2)}\left(x_p\right)$	Concavidad
$I_1(-\infty,\ 0)$	$(-1\ ,\ 9)$	Positivo	Hacia arriba
$I_2(0,\ 2)$	$(1\ ,\ -3)$	Negativo	Hacia abajo
$I_3(2,\ +\infty)$	$(3\ ,\ 9)$	Positivo	Hacia arriba

Como consecuencia:
$A(\ 0\ ,\ 2\ )$ es un punto de inflexión y $C(\ 2\ ,\ -2\ )$ también lo es.





3. $f(x)=\dfrac{1}{8}x^2-\dfrac{2}{x}$.

a. Su dominio son todos los números reales excepto el cero.

b. $f'(x)=\dfrac{x}{4}+\dfrac{2}{x^2}$, entonces $x^3+8=0$, lo que implica $x=-2$.

Por tanto, un número crítico y su respectivo valor extremo es,

$$x=-2,\ f(-2)=\frac{1}{8}(-2)^2-\frac{2}{(-2)}=\frac{3}{2}.$$

El carácter de su monotonía es:

Intervalo	$\left(x_p \ , \ f'(x_p) \right)$	Signo de $f'(x)$	Monotonía
$I_1(-\infty \ , \ -2)$	$\left(-4 \ , \ -\frac{7}{8} \right)$	negativo	decreciente
$I_2(-2 \ , \ 0)$	$\left(-1 \ , \ \frac{7}{4} \right)$	positivo	creciente
$I_3(0 \ , \ +\infty)$	$\left(1 \ , \ \frac{9}{4} \right)$	positivo	creciente

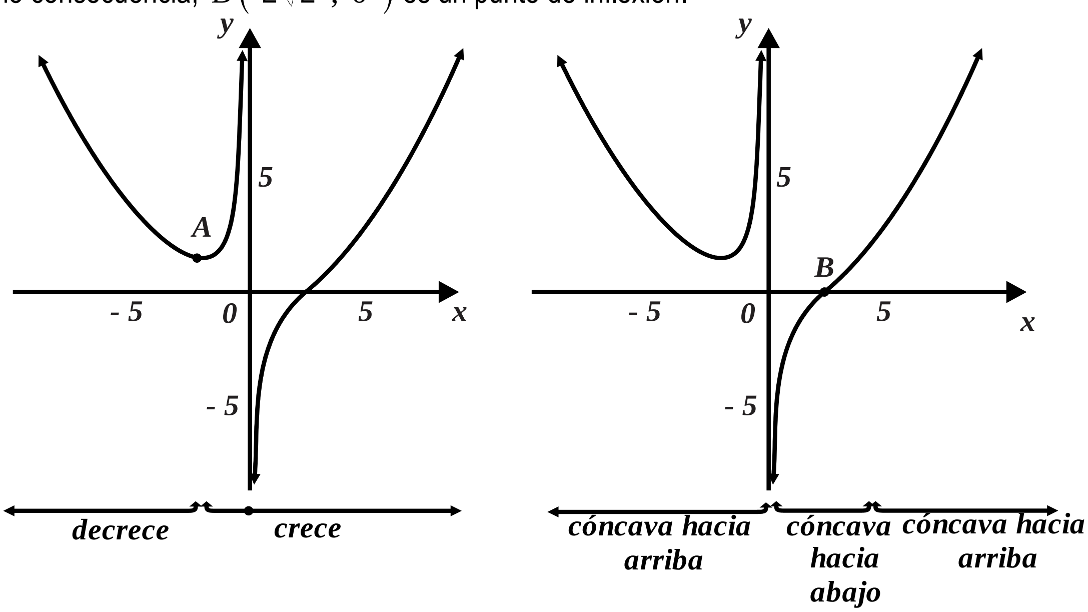
Como consecuencia: El punto $A\left(2 \ , \ \frac{3}{2} \right)$ es un mínimo.

c. $f^{(2)}(x_p) = \frac{1}{4} - \frac{4}{x^3}$.

Si $f^{(2)}(x_p) = \frac{1}{4} - \frac{4}{x^3} = 0$, entonces $x^3 - 16 = 0$, esto implica $x = 2\sqrt[3]{2}$.

Intervalo	$\left(x_p \ , \ f^{(2)}(x_p) \right)$	Signo de $f^{(2)}(x_p)$	Concavidad
$I_1(-\infty, \ 0)$	$\left(-1 \ , \ \frac{17}{16} \right)$	Positivo	Hacia arriba
$I_2\left(0, \ 2\sqrt[3]{2}\right)$	$\left(1 \ , \ -\frac{15}{16} \right)$	Negativo	Hacia abajo
$I_3\left(2\sqrt[3]{2}, \ +\infty\right)$	$\left(4 \ , \ \frac{3}{16} \right)$	Positivo	Hacia arriba

Como consecuencia, $B\left(2\sqrt[3]{2} \ , \ 0 \right)$ es un punto de inflexión.



4. $f(x) = -\dfrac{6x}{x^2+1}$.

a. Su dominio son todos los números reales.

b. $f'(x) = -\dfrac{6(-x^2+1)}{(x^2+1)^2}$, entonces $6(-x^2+1) = 0$, lo que implica $x=-1$ y $x=1$.

Por tanto, los números críticos y sus respectivos valores extremos son

$$x=-1,\ f(-1) = -\frac{6(-1)}{(-1)^2+1} = 3 \text{ y } x=1,\ f(1) = -\frac{6(1)}{(1)^2+1} = -3.$$

El carácter de su monotonía es:

Intervalo	$(x_p\ ,\ f'(x_p))$	**Signo de** $f'(x)$	**Monotonía**
$I_1(-\infty\ ,\ -1)$	$\left(-2\ ,\ \frac{18}{25}\right)$	positivo	creciente
$I_2(-1\ ,\ 1)$	$(0\ ,\ -6)$	negativo	decreciente
$I_3(1\ ,\ +\infty)$	$\left(2\ ,\ \frac{18}{25}\right)$	positivo	creciente

Como consecuencia, el punto $A(-1\ ,\ 3)$ es un máximo y el punto $B(1\ ,\ -3)$ es un mínimo.

c. $f^{(2)}(x_p) = \dfrac{12x(-x^2+3)}{(x^2+1)^3}$.

Si $f^{(2)}(x_p) = \dfrac{12x(-x^2+3)}{(x^2+1)^3} = 0$, entonces $12x(-x^2+3) = 0$, esto implica:

$$x=-\sqrt{3},\ f(-\sqrt{3}) = -\frac{6(-\sqrt{3})}{(-\sqrt{3})^2+1} = -\frac{3}{2}\sqrt{3}$$

$$x=0\ ,\ f(0) = -\frac{6(0)}{(0)^2+1} = 0,$$

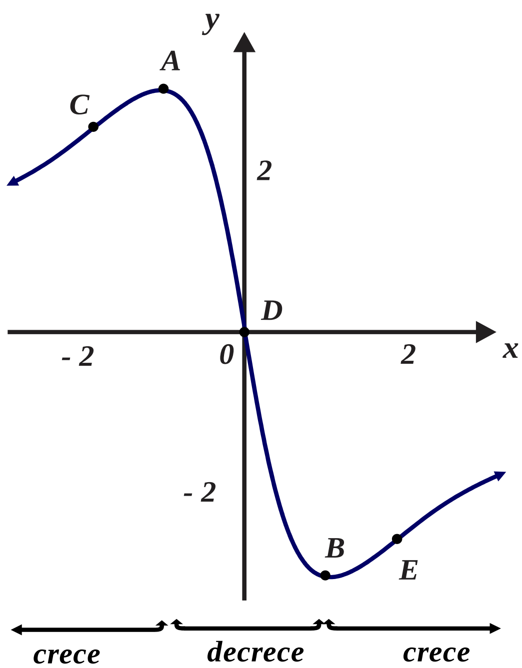
$$x=\sqrt{3},\ f(\sqrt{3}) = -\frac{6(\sqrt{3})}{(\sqrt{3})^2+1} = \frac{3}{2}\sqrt{3}.$$

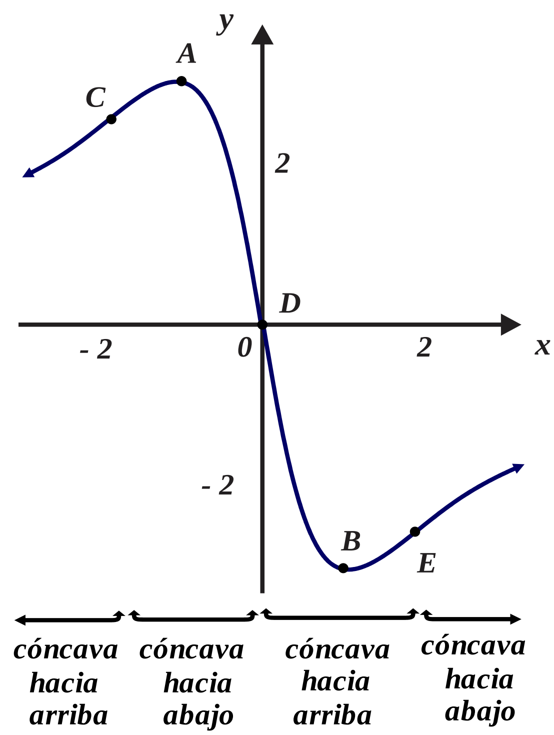
Intervalo	$(x_p\ ,\ f^{(2)}(x_p))$	**Signo de** $f^{(2)}(x_p)$	**Concavidad**
$I_1(-\infty\ ,\ -\sqrt{3})$	$\left(-2\ ,\ \frac{8}{125}\right)$	Positivo	Hacia arriba
$I_2(-\sqrt{3}\ ,\ 0)$	$(-1\ ,\ -3)$	Negativo	Hacia abajo
$I_3(0\ ,\ \sqrt{3})$	$(1\ ,\ 3)$	Positivo	Hacia arriba
$I_4(\sqrt{3}\ ,\ +\infty)$	$\left(2\ ,\ -\frac{8}{125}\right)$	Negativo	Hacia abajo

Como consecuencia,

$$C\left(-\sqrt{3}\ ,\ \frac{3}{2}\sqrt{3}\right),\ D(\ 0\ ,\ 0\ )\ \text{y}\ E\left(\sqrt{3}\ ,\ -\frac{3}{2}\sqrt{3}\right)$$

son puntos de inflexión.





SECCIÓN 4.1 BLOQUE 5 EJERCICIOS 1	Nombre Fecha

Traza la gráfica de la función que cumple con las condiciones.

a. $f(0)=6,\ f(3)=0,\ f(6)=2.$

f' negativa sobre $I_1(0,\ 3)$; $f'(x)$ positiva sobre $I_2(3,\ 6)$.

$f^{(2)}$ positiva sobre $(0,\ 5)$ y $f^{(2)}(x)$ negativa sobre $(5,\ 6)$.

b. $f(0)=5,\ f(2)=2,\ f(6)=0.$

f' negativa sobre $(0,\ 2)\cup(2,\ 6)$ y $f'(2)=0$.

$f^{(2)}$ negativa sobre $(0,\ 1)\cup(2,\ 6)$ y $f^{(2)}(x)$ positiva en el, intervalo $(1,\ 2)$.

c. $f(0)=f(4)=1,\ f(2)=4,\ f(6)=0.$

f' positiva sobre $(0,\ 2)$, $f'(x)$ negativa $(2,\ 4)\cup(4,\ 6)$.

$f'(2)=f'(4)=0.$

$f^{(2)}$ negativa sobre $(1,\ 2)\cup(2,\ 4)$ y positiva sobre $(4,\ 6)$.

d. $f(0)=f(3)=3,\ f(2)=4,\ f(6)=0.$

f' positiva sobre $(0,\ 2)$, $f'(x)$ negativa en $(2,\ 4)\cup(4,\ 5)$.

$f'(2)=f'(4)=0,\ f'(x)=-1$ sobre $(5,\ 6)$.

$f^{(2)}$ negativa sobre $(0,\ 3)\cup(4,\ 5)$, $f^{(2)}(x)$ positiva sobre $(3,\ 4)$.

SECCIÓN 4.1 BLOQUE 5 EJERCICIOS 2	Nombre Fecha

Bosqueja la gráfica de la función

a. $f(x) = x^3 - 3x + 2$.

b. $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 3x^2 - 8x + 2$.

c. $f\left(x\right)=3x^4-4x^3-2$.

d. $f\left(x\right)=x^4-6x^3+12x^2-8x$.

e. $f(x)=\dfrac{12}{x^2+3}$.

f. $f(x)=\dfrac{(x+1)^2}{x^2+1}$.

g. $f(x) = x^2 + \frac{2}{x}$.

h. $f(x) = \frac{4x}{x^2 - 9}$.

FIN DE SECCIÓN

SECCIÓN 4.2 PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN

APRENDIZAJES

8. Resuelve problemas que involucran máximos o mínimos de una función de acuerdo con su dominio restringido.

TEMÁTICA

1. Problemas de optimización.

BLOQUE 1

OPTIMIZACIÓN DE FUNCIONES

Se proponen ejemplos característicos de optimización de funciones como guía para que el alumno construya el modelo funcional de otros problemas similares y posteriormente, aplicando los criterios de la primera y de la segunda derivada determine, las asignaciones que optimizan el modelo.

En ocasiones nos enfrentamos con situaciones cuyo estudio requiere resolver el problema de determinar la mejor forma de utilizar los recursos disponibles. Por ejemplo, un comerciante puede requerir establecer la mejor forma de preparar una mezcla de granos que sea la más apropiada para obtener la mayor ganancia. Un arquitecto desea emplear la menor cantidad de material de manera que pueda diseñar y construir un canal que transporte la mayor cantidad de líquido posible. A un fabricante le gustaría minimizar el costo de los envases que utiliza para sus productos. Este tipo de problemas puede modelarse de manera que impliquen maximizar o minimizar una función. Cuando esto es así, los métodos de cálculo diferencial constituyen una herramienta útil y poderosa en el análisis y la resolución de los problemas.

Tomando como base los elementos desarrollados en la ***sección 4.1*** de esta unidad, proponemos la inclusión de la siguiente estrategia para la resolución de problemas prácticos de optimización de funciones. No lo siga ciegamente; con frecuencia, sus habilidades o el mismo tipo de problema pueden indicarle utilizar un enfoque alterno o la omisión de algunos pasos o la inclusión de otros.

i. Lee repetidamente el enunciado del problema, ilústralo y asigna variables que sean adecuadas a las cantidades importantes.

ii. Identifica la variable o función objetivo que debe ser optimizada (maximizar o minimizar), en términos de las variables del paso i.

iii. Utiliza las condiciones de ligadura en las variables del problema para reducir su número, y por consiguiente, expresa la función a optimizar en términos de una sola variable.

iv. Aplica la teoría desarrollada en la sección anterior para determinar: los números críticos, valores extremos asociados y haga un análisis de ellos.

v. Sustituye los valores críticos en la función objetivo y observa que sus soluciones son viables en el contexto del problema.

vi. Usa tu intuición para obtener alguna idea sobre cuál debe ser la solución del problema.

SECCIÓN 4.2
BLOQUE 1
EJEMPLOS 1

a. PRODUCTO MÁXIMO
Determina dos números enteros positivos cuya suma sea 500 y su producto sea máximo.
i. Sean x, y los números desconocidos
ii. Se desea optimizar la función que describe el producto de los números.
$$p = xy.$$
iii. Los números por determinar se encuentran ligados con la condición $x + y = 500$, si combinamos el producto $p = xy$ con la condición anterior obtenemos la función
$$p(x) = x(500 - x) = 500x - x^2 \text{ con dominio } 0 \le x \le 500.$$
Dado que
$$p'(x) = 500 - 2x \text{ y } p^{(2)}(x) = -2.$$
iv. Por la condición de número crítico, obtenemos
$$p'(x) = 500 - 2x = 0, \text{ luego } x = 250.$$
Además,
$$p^{(2)}(250) = -2,$$
por tanto, de acuerdo con el criterio de la segunda derivada, cuando $x = 250$ el producto es máximo. De la condición de ligadura y del resultado anterior obtenemos
$$y = 250.$$
Conclusión, los números solicitados son
$$x = 250 \text{ y } y = 250.$$

b. RECTÁNGULO DE ÁREA MÁXIMA
Determina las dimensiones del rectángulo de área máxima que puede construirse con 100 metros de cordón.
i. Sean x, y las dimensiones del rectángulo.
ii. Se desea optimizar la función que describe el área del rectángulo, es decir
$$A = xy.$$
iii. Los números por determinar se encuentran ligados con la condición
$$2x + 2y = 100,$$
que representa el perímetro del rectángulo.

Si en $2x + 2y = 100$ despejamos la longitud de uno de los lados del rectángulo, obtenemos
$$y = 50 - x.$$
Por tanto, el área $A = xy$ en términos del lado de longitud $y = 50 - x$ es
$$A(x) = x(50 - x) = 50x - x^2, \text{ con dominio } 0 \le x \le 50.$$
iv. Dado que: $A'(x) = 50 - 2x$ y $A^{(2)}(x) = -2$.

De la condición de número crítico, obtenemos

$$A'(x) = 50 - 2x = 0 \text{, entonces } x = 50.$$

Además, $A^{(2)}(x) = -2$, por tanto, por el criterio de la segunda derivada, cuando $x = 50$ el área del rectángulo es máxima.
Por la condición de ligadura

$$2x + 2y = 100 \text{ y de } x = 50 \text{ obtenemos } y = 50.$$

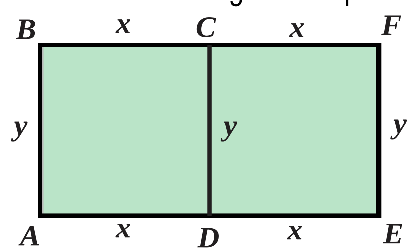
Conclusión, las dimensiones del rectángulo de área máxima son

$$x = 50 \text{ y } y = 50.$$

c. TERRENOS CON ÁREA MÁXIMA

Se cuenta con 600 metros lineales de valla para rodear un terreno rectangular de área fija y después dividirlo en dos partes rectangulares congruentes utilizando una cerca paralela a dos de los lados. Determina las dimensiones de los terrenos rectangulares de forma que el área que encierra (cada uno de ellos) sea máxima.

i. Sean: x, y las dimensiones de uno de los rectángulos en que se divide el rectángulo mayor.



Se debe optimizar la función que describe el área de uno de los rectángulos menores, digamos el $ABCD$ rectángulo, es decir

$$A = xy.$$

ii. Las variables x, y están ligadas por la relación $4x + 3y = 600$ (perímetro de las regiones), por tanto,

$$y = \frac{600 - 4x}{3}.$$

iii. Combinando las expresiones del área y de la longitud de la altura del rectángulo $ABCD$ obtenemos la función

$$A(x) = x\left(\frac{600 - 4x}{3}\right) = 200x - \frac{4}{3}x^2 \text{, con } 0 \le x \le 150.$$

iv.

$$A'(x) = 200 - \frac{8}{3}x \text{ y } A^{(2)}(x) = -\frac{8}{3}.$$

Los números críticos son las soluciones de la ecuación $200 - \frac{8}{3}x = 0$, entonces $x = 75$.

En efecto, dado que $A^{(2)}(75) = -\frac{8}{3}$ (criterio de la segunda derivada), la función área alcanza un valor máximo si

$$x = 75.$$

De $x = 75$ y la condición de ligadura

$$y = \frac{600 - 4x}{3}\text{, obtenemos } y = 100.$$

Conclusión, las dimensiones de los rectángulos menores son

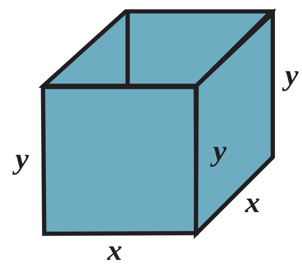
$$x = 75 \text{ y } y = 100 \text{ metros.}$$

Las dimensiones del rectángulo mayor son

$$2x = 150 \text{ y } y = 100 \text{ metros.}$$

d. CONTENEDOR PRISMÁTICO

Se desea construir un contenedor de base cuenta y sin tapadera con capacidad de 500 litros ($\frac{1}{2}$ metro cúbico) uniendo placas de plástico, unas rectangulares y otras cuadradas. ¿Qué dimensiones debe tener el contenedor si se desea que utilizar la mínima cantidad de aditivo en la unión de las caras?



i. Sean: x la longitud de lado de la base e y la altura del contenedor.

La longitud de las partes a unirse es

$$L = 4x + 4y.$$

ii. Las variables x e y se encuentra ligadas por la condición

$$V = x^2 y = 0.5.$$

Si de la condición de ligadura $x^2 y = \frac{1}{2}$ despejamos y obteniendo $y = \frac{1}{2x^2}$.

iii. La composición de

$$L = 4x + 4y \text{ con } y = \frac{1}{2x^2}$$

genera la función

$$L(x) = 4x + \frac{2}{x^2}.$$

iv. Al derivar obtenemos:

$$L'(x) = 4 - \frac{4}{x^3} \text{ y } L^{(2)}(x) = \frac{12}{x^4}.$$

Si $L'(x) = 0$, entonces

$$4 - \frac{4}{x^3} = 0$$

y como consecuencia $4x^3 - 4 = 0$, o bien $x = 1$, también

$$L^{(2)}(1) = \frac{12}{1^4} = 12\,.$$

Con base en el criterio de la segunda derivada:
cuando $x = 1$ la función

$$L(x) = 4x + \frac{2}{x^2}$$

alcanza un valor mínimo, éste es, $L(1) = 6$.

De $x = 1$ y la condición de ligadura $x^2 y = \frac{1}{2}$, obtenemos $y = \frac{1}{2}$.

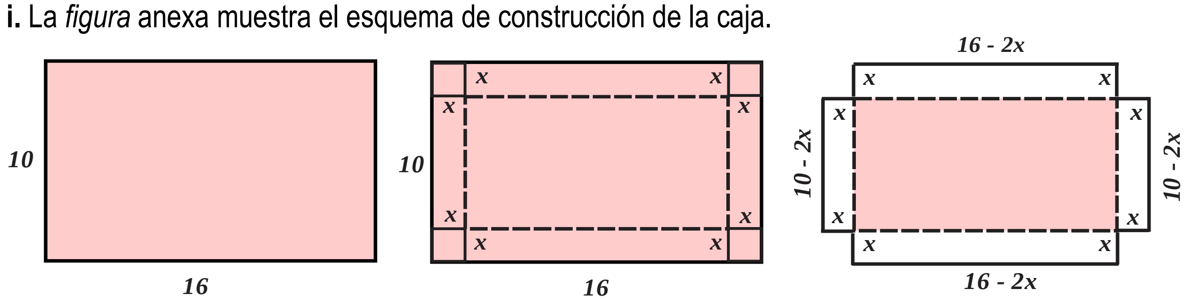
Dimensiones adecuadas:

$$x = 1 \text{ y } y = \frac{1}{2}\,.$$

e. CAJA CON BASE RECTANGULAR

Se desea construir una caja rectangular sin tapa de la siguiente manera: a una lámina de cartón de 10×16 centímetros se le hará un corte cuadrado en cada esquina y luego se doblarán los bordes de manera perpendicular a la lámina. ¿Cuáles deben ser las dimensiones de los cuadrados recortados para que la caja contenga el mayor volumen posible?

i. La *figura* anexa muestra el esquema de construcción de la caja.



ii. Sea x la longitud del lado de uno de los cuadrados recortados, por tanto

$16 - 2x$ es la longitud de la base de la caja,
$10 - 2x$ es el ancho de la base de la caja,
x es la altura de la caja.

iii. El volumen $V(x)$ de la caja es

$$V(x) = (16 - 2x)(10 - 2x)(x) = 4\left(40x - 13x^2 + x^3\right), \text{ siempre que } 0 \le x \le 5.$$

iv. Por tanto,

$$V'(x) = 4\left(40 - 26x + 3x^2\right) \text{ y } V^{(2)}(x) = -104 + 24x\,.$$

Si $V'(x) = 0$, entonces $3x^2 - 26x + 40 = 0$ y como consecuencia

$$x = 2 \text{ y } x = \frac{20}{3},$$

note que la solución $x = \frac{20}{3}$ no cumple la condición $0 \le x \le 5$ por lo que se descarta.

También

$$V^{(2)}(2) = -104 + 24(2) = -56\,,$$

por tanto, para $x = 2$ el volumen es máximo.

SECCIÓN 4.2 BLOQUE 1 EJERCICIOS 1	Nombre Fecha

1. DOS NÚMEROS ENTEROS DE PRODUCTO MÁXIMO

Determina dos números enteros positivos cuya suma sea 1000 y su producto sea máximo.

2. DOS NÚMEROS ENTEROS DE PRODUCTO MÁXIMO

La suma de un número positivo x con el cuádruple de otro número positivo y es 100. Cuáles deben ser los números, si su producto debe ser máximo.

3. RECTÁNGULO DE ÁREA MÁXIMA

Determina las dimensiones del rectángulo de área máxima que puede construirse con l metros de alambre.

4. ÁREA MÁXIMA DE UN TRAPECIO

Un trapecio tiene tres lados con longitudes de 40 centímetros (cada uno). ¿De qué longitud debe ser el otro lado para que el trapecio encierre área máxima?

5. ÁREA MÁXIMA DE UN TERRENO

Con 200 metros lineales de valla se va a limitar un terreno rectangular en el que uno de los lados es un muro (lineal ya construido). ¿Qué dimensiones debe tener el terreno para que el área que encierre sea máxima? Calcula el área máxima que encierra.

6. ÁREA MÁXIMA DE UN TERRENO

Con L metros lineales de valla se desea limitar una superficie rectangular y dividirla en cuatro partes, colocando cercas paralelas a uno de los lados de la superficie del rectángulo.

a. ¿Cuál es el área total máxima posible de los cuatro rectángulos?

b. ¿Cuáles deben ser las dimensiones de uno de los rectángulos para que su área sea máxima?

7. ÁREA MÁXIMA DE UN TERRENO

Con 24 metros de cerca se desea limitar una región rectangular y posteriormente dividirla en cuatro corrales rectangulares colocando cercas paralelas a dos de los lados de la región. Calcula:

a. Las dimensiones de la región rectangular que encierra área máxima.

b. Las dimensiones de los corrales con área máxima.

8. PERÍMETRO MÍNIMO DE UN TERRENO

Se desea limitar dos lotes rectangulares contiguos y congruentes, cada uno de ellos limita una superficie con área de 300 metros cuadrados.

¿Cuánto deben medir el largo y el ancho de manera que se utilice la menor cantidad de valla?

9. FLUJO MÁXIMO A TRAVÉS DE UN CANAL

Con una placa metálica de 2 metros de ancho se va a construir un canal (sin base superior) de sección transversal rectangular (doblando perpendicularmente dos lados opuestos de la placa). ¿Qué dimensiones debe tener la sección transversal para que el flujo a través del canal sea máximo?

10. SOLDADURA MÍNIMA

Se va a construir un tanque con forma de prisma cuadrangular, con tapa y base cuadrada. El área de las placas a utilizar es 10 metros cuadrados. Determina las dimensiones del tanque para que la soldadura que se utiliza sea mínima.

11. VENTANA RECTANGULAR CORONADA POR UN TRIÁNGULO EQUILÁTERO

El perímetro de una ventana con forma de rectángulo coronado por un triángulo equilátero debe ser de 12 metros. Determina las dimensiones del rectángulo para que la ventana encierre la mayor área posible.

12. VENTANA RECTANGULAR CORONADA POR UN SEMICÍRCULO

Calcular las dimensiones de una ventana rectangular coronada por un semicírculo, si su perímetro es de 12 metros y su área debe ser máxima.

13. CAJA

Se va a construir una caja (sin tapadera) con una lámina cuadrada de 24 centímetros de lado, cortando cuadritos iguales de cada esquina y doblando los lados hacia arriba. Calcula las dimensiones que debe tener la caja para que el volumen que contenga sea el máximo.

14. ENVASE CON BASE CUADRADA

Un contenedor con base cuadrada y parte superior abierta debe tener un volumen de 1000 centímetros cúbicos. Determina las dimensiones del contenedor que minimizan la cantidad de material usado en su construcción.

15. ENVASE CON BASES Y TAPADERA CUADRADAS

Un envase con base cuadrada y parte superior cubierta debe contener un volumen de 1000 centímetros cúbicos. Calcula las dimensiones del envase que minimizan la cantidad de material utilizado en su construcción.

16. CAJA DE VOLUMEN MÁXIMO

Con 1000 centímetros cuadrados de cierto material con el que se desea construir una caja con base cuadrada y la base superior abierta, determina el volumen máximo que puede contener la caja.

17. CONTENEDOR MÁS ECONÓMICO

Un contenedor (con forma de prisma cuadrangular) con base rectangular para almacenamiento, con la parte superior abierta, debe tener volumen de 10 metros cúbicos. El largo de su base es el doble del ancho. El costo del material para la base es 300 pesos por metro cuadrado. El costo del material para los costados es 400 pesos por metro cuadrado. Determina las dimensiones que debe tener el más económico de los contenedores.

18. CONSTRUCCIÓN DE UN ENVASE CIRCULAR CILÍNDRICO

Se desea fabricar un envase cilíndrico (sin tapa) que tenga capacidad para 1000 centímetros cúbicos, utilizando la mínima cantidad de material para su construcción. Calcula las dimensiones correspondientes.

19. ENVASE CON FORMA DE CILÍNDRICO CIRCULAR

Se desea fabricar un envase cilíndrico (sin tapa) de metal, que tenga capacidad para 8 litros, utilizando la mínima cantidad de material para su construcción. El costado y la base se unirán utilizando cierta clase de soldadura. Calcula las dimensiones correspondientes de manera que la soldadura utilizada sea mínima.

20. RECTÁNGULO DE ÁREA MÁXIMA

Se cortarán trozos "rectangulares" de madera de un tronco cilíndrico con radio de longitud $10\sqrt{2}$ centímetros. Se requiere que los trozos tengan área máxima, ¿qué dimensiones deben tener?

FIN DE SECCIÓN

4.3 EVALUACIÓN DIAGNÓSTICA

Sugerimos al lector responderla al inicio de la unidad o tema para medir su nivel de conocimientos

1. La representación como intervalo del conjunto de los números reales es:

2. El intervalo $(a\ ,\ b)$, no contiene a sus:

3. El dominio de una función f está compuesto por el conjunto de los números tales que f :

4. Los números 3 y 5 dividen a la recta de los números reales en los intervalos:

5. Una función es creciente, si x_1 menor que x_2 implica:

6. El **teorema de los ceros de Bolzano** afirma: si una función es continua en un intervalo cerrado y las imágenes de los extremos tienen distinto signo, entonces existe algún punto del interior del intervalo en donde:

7. Si la pendiente de la línea recta tangente a una curva (en un punto específico) es cero, entonces es paralela al eje de las:

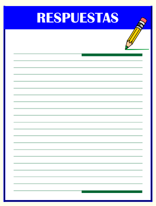
8. En el plano cartesiano, la función derivada asociada a una función f describe el comportamiento de:

9. Una línea recta vertical no tiene:

10. Las líneas rectas tangentes a la curva asociada a la función $f(x) = C$ tienen pendiente:

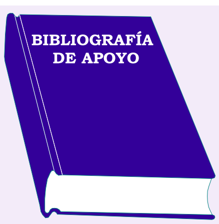
ESCALA DE ACREDITACIÓN DE LA EVALUACIÓN DIAGNÓSTICA (SUFICIENTE Y NO SUFICIENTE)

SUFICIENTE: 7 O MÁS ACIERTOS
NO SUFICIENTE: 6 O MENOS ACIERTOS



RESPUESTAS A LAS PREGUNTAS DEL EXAMEN DIAGNÓSTICO

1. $(-\infty\ ,\ +\infty\ )$.
2. Números extremos.
3. Existe.
4. $(-\infty\ ,\ 3\ )(\ 3\ ,\ 5\ )$ y $(\ 5\ ,\ +\infty\ )$.
5. $f\ (\ x_1\ )$ es menor que $f\ (\ x_2\ )$.
6. La imagen se anula.
7. Abscisas.
8. La pendiente de la línea recta tangente a una curva.
9. Pendiente.
10. Cero.



SI NO APROBASTE EL EXAMEN DIAGNÓSTICO, ENTONCES LA REVISIÓN DE LOS SIGUIENTES DOCUMENTOS PUEDE AYUDARTE.

1. Purcell, E. (2007). Preliminares. *Cálculo diferencial e integral. Novena edición* (pp. 35-54). México: Pearson Educación Prentice Hall.

2. Stewart, J. E. (2012). Funciones. *Precálculo Matemáticas para el cálculo, Sexta edición.* (pp. 148-199). México: Cengage Learning.

FIN DE SECCIÓN

4.4 EVALUACIÓN DE LA UNIDAD 2

COMPORTAMIENTO GRÁFICO Y OPTIMIZACIÓN DE FUNCIONES

CONCEPTOS

1. Sea f una función derivable sobre el intervalo abierto $I = (a\ ,\ b)$, entonces:
f es creciente sobre el intervalo I sí y sólo si:

2. Sea f una función derivable alrededor de x_0.
Si $f'(x_0)$ no existe, entonces:

3. Si $f'(x_0)$ existe, entonces el número $f(x_0)$ se conoce como:

4. Los valores extremos de una función se clasifican en valores máximos y valores mínimos, y:

5. Las abscisas correspondientes a los puntos críticos reciben el nombre de:

6. Sea x_0 un número crítico de una función continua sobre el intervalo abierto $(a\ ,b)$, sí el signo de f' cambia de negativo a positivo alrededor de x_0, entonces $f(x_0)$ es un:

7. Sea f una función derivable sobre el intervalo $(a\ ,b)$, entonces su curva asociada es cóncava hacia arriba si la función f' :

8. Si f es dos veces derivable sobre $(a\ ,b)$, y $f^{(2)} < 0$ para toda $x \in (a\ ,b)$, entonces la curva asociada a f es:

9. Si f una función tal que $f'(x_0)=0$, $f^{(2)}$ existe alrededor de x_0 y $f^{(2)}(x_0)>0$, entonces $f(x_0)$ es un:

10. Si la función $\frac{dh}{dt}$ disminuye cuando el tiempo aumenta, entonces $\frac{d^2h}{dt^2}$ es:

VALOR: Un punto por inciso (máximo 10 puntos)

DESARROLLOS OPERATIVOS (1)

1. Determina los números críticos de la función $f(x)=(x^2-1)^2$.

2. Calcula los números críticos de la función $f(x)=2x+3x^{\frac{2}{3}}$.

3. Determina los intervalos sobre los que la función $f(x)=\frac{1}{5}x^5-3x^3$ crece:

4. Obtén los intervalos sobre los que la función $f(x)=x^3-3x+1$ decrece:

5. Determina los intervalos sobre los que la función $f(x) = -x^3 + 6x^2 + x - 1$ es cóncava hacia arriba:

6. Obtén los intervalos sobre los que la función $f(x) = \frac{x(x-3)}{(x+3)^2}$ es cóncava hacia abajo:

7. Determina los valores máximos relativos de la función $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 1$.

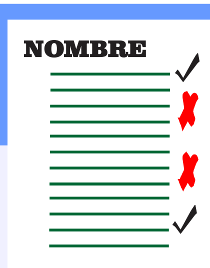
8. Determina los valores mínimos relativos de la función $f(x) = x^4 - 8x^3$.

VALOR: Dos puntos por inciso (máximo 20 puntos)

9. Con una lámina cuadrada en que cada lado mide 60 centímetros se construirá una caja con forma de prisma recto (sin base superior) recortando cuadrados en las esquinas (de lado "x") y doblando las cejas resultantes hacia arriba. Determina la capacidad máxima de la caja y el valor correspondiente de "x".

10. Determina pares de números “ x ” e “ y ” de forma que el número “ y ” sea el doble del cuadrado del número “ x ”, y la resta de sus cuadrados sea máxima.

VALOR: Tres puntos por inciso (máximo 20 puntos)



RESPUESTAS A LA EVALUACIÓN DE LA UNIDAD 4

COMPORTAMIENTO GRÁFICO Y PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN

CONCEPTOS

1. $f' > 0$, para todo x en $I = (a, b)$.

2. x_0 se denomina número crítico de f.

3. valor extremo relativo.

4. Puntos de inflexión.

5. Números críticos.

6. Valor mínimo relativo

7. Es creciente en el intervalo (a, b).

8. Cóncava hacia abajo.

9. Valor mínimo relativo.

10. Negativa.

VALOR: Un punto por inciso (máximo 10 puntos)

DESARROLLOS OPERATIVOS

1. $x = -1$, $x = 0$, $x = 1$, $x = -\sqrt{\frac{1}{3}}$, $x = \sqrt{\frac{1}{3}}$.

2. $x = -1$ y $x = 0$

3. $x \in (-\infty, -3) \cup (3, +\infty)$.

4. $x \in (-1, 1)$.

5. $x \in (-\infty, 2)$.

6. $x \in (3, +\infty)$.

7. $f(-1) = 6$.

8. $f(4) = -432$.

VALOR: Dos puntos por inciso (máximo 20 puntos)

9. $V = 16000$ centímetros cúbicos y $x = 10$ centímetros.

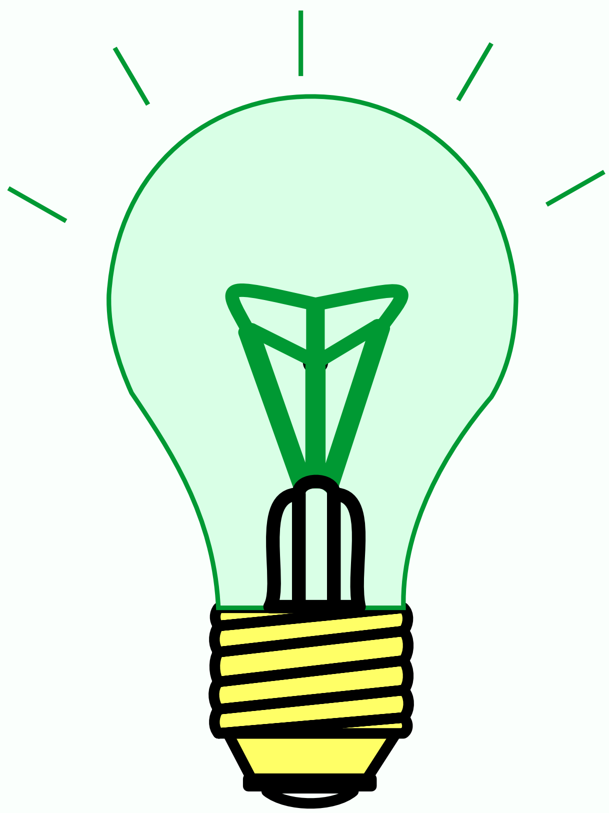
10. $x = \frac{\sqrt{2}}{4}$, $y = \frac{1}{4}$. También $x = -\frac{\sqrt{2}}{4}$, $y = \frac{1}{4}$.

VALOR: Tres puntos por inciso (máximo 20 puntos)

FIN DE SECCIÓN

SOLUCIONES DE EJERCICIOS Y ACTIVIDADES

4.5 COMPORTAMIENTO GRÁFICO Y PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN



SECCIÓN 4.1

BLOQUE 1

SECCIÓN 4.1
SECUENCIA DIDÁCTICA 1
LA DERIVADA EN LA MONONOTONÍA DE UNA FUNCIÓN

INICIO

1. i. FUNCIÓN CRECIENTE SOBRE UN INTERVALO ABIERTO I

A medida que aumenta el valor de x aumenta el valor de y.

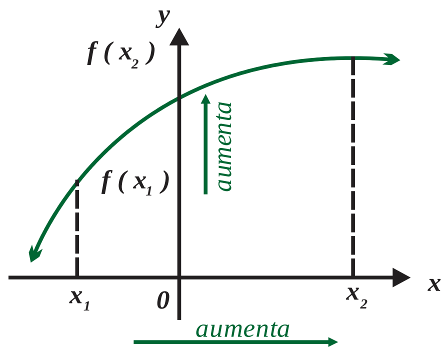
Una función es creciente en un intervalo, si se cumple que: si $x_1 < x_2$ implica $f(x_1) < f(x_2)$.

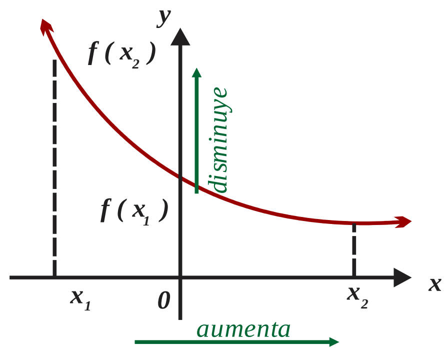
ii. FUNCIÓN DECRECIENTE SOBRE UN INTERVALO ABIERTO I

A medida que aumenta el valor de x disminuye el valor de y.

Una función es creciente en un intervalo, si se cumple que: si $x_1 < x_2$ implica $f(x_1) > f(x_2)$.

2. i. y **ii.**

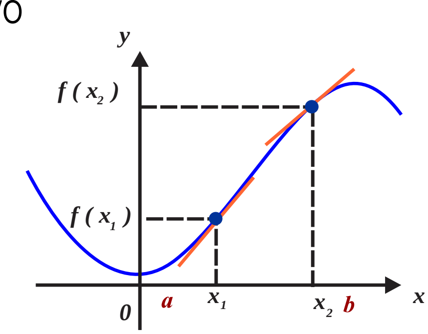




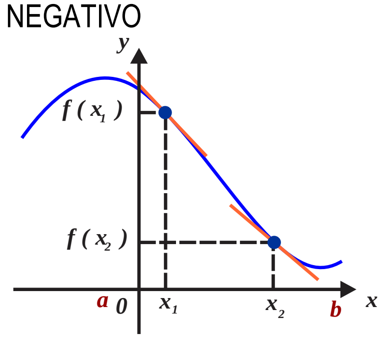
DESARROLLO

1. (DIRECTA) Carácter monótono de las funciones derivables.

i. POSITIVO



ii. NEGATIVO



iii. Si una función es sólo creciente o es sólo decreciente en un intervalo de su dominio, diremos que es monótona en dicho intervalo.

Las características que hemos observado se pueden utilizar como criterios sobre el crecimiento o decrecimiento de una función de la siguiente forma:

Sea $f(x)$ definida sobre el intervalo (a, b), entonces, para todo x del intervalo:

$$\text{Si } f'(x) > 0 \text{ entonces } f(x) \text{ es creciente.}$$

$$\text{Si } f'(x) < 0 \text{ entonces } f(x) \text{ es decreciente.}$$

2. (RECÍPROCA) El criterio de monotonía de una función derivable y creciente.

a. Sean: f una función derivable en el intervalo (a, b), $x_1 < x < x_2$ números de (a, b).

i. Positivo, es decir, $f'(x) = \lim\limits_{x \to x_1} \dfrac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} > 0$.

ii. Positivo, es decir, $\dfrac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} > 0$.

iii. Positivo, es decir, $f(x) - f(x_1) > 0$.

iv. $f(x) - f(x_1) > 0$.

v. Creciente.

b. Negativo, es decir, $f'(x) = \lim\limits_{x \to x_1} \dfrac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} < 0$.

ii. negativo, es decir, $\dfrac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} < 0$. **iii.** negativo, es decir, $f(x) - f(x_1) < 0$.

iv. $f(x) - f(x_1) < 0$.

v. decreciente.

CIERRE

i. $f(x)$ es creciente en el intervalo (a, b). **ii.** $f(x)$ es decreciente en el intervalo (a, b).

Fin de actividad

SECCIÓN 4.1 BLOQUE 1
EJERCICIOS 1

a.

Intervalo	Signo de $f'(x_p)$	Carácter de f
$I_1(-\infty, -1)$	negativo	creciente
$I_2(-1, +\infty)$	positivo	decreciente

b.

Intervalo	Signo de $f'(x_p)$	Carácter de f
$I_1\left(-\infty, \dfrac{5}{2}\right)$	positivo	decreciente
$I_2\left(\dfrac{5}{2}, +\infty\right)$	negativo	creciente

c.

Intervalo	Signo de $f'(x_p)$	Carácter de f
$I_1(-\infty, -2)$	positivo	creciente
$I_2(-2, 2)$	negativo	decreciente
$I_3(2, +\infty)$	positivo	creciente

d.

Intervalo	Signo de $f'(x_p)$	Carácter de f
$I_1(-\infty,\ 1)$	positivo	creciente
$I_2(1,\ 3)$	negativo	decreciente
$I_3(3,\ +\infty)$	positivo	creciente

e.

Intervalo	Signo de $f'(x_p)$	Carácter de f
$I_1(-\infty,\ 0)$	positivo	creciente
$I_2(0,\ 2)$	negativo	decreciente
$I_3(2,\ +\infty)$	positivo	creciente

f.

Intervalo	Signo de $f'(x_p)$	Carácter de f
$I_1(-\infty,\ +\infty)$	positivo	creciente

g.

Intervalo	Signo de $f'(x_p)$	Carácter de f
$I_1(-\infty,\ -1)$	positivo	creciente
$I_2(-1,\ 1)$	negativo	decreciente
$I_3(1,\ +\infty)$	positivo	creciente

h.

Intervalo	Signo de $f'(x_p)$	Carácter de f
$I_1(-\infty,\ 0)$	positivo	creciente
$I_2(0,\ 3)$	negativo	decreciente
$I_3(3,\ +\infty)$	positivo	creciente

i. $f(x) = x^{\frac{4}{3}} - 4x^{\frac{1}{3}} + 1.$

Intervalo	Signo de $f'(x_p)$	Carácter de f
$I_1(-\infty,\ 0)$	positivo	decreciente
$I_2(0,\ 1)$	negativo	decreciente
$I_3(1,\ +\infty)$	positivo	creciente

j.

Intervalo	Signo de $f'(x_p)$	Carácter de f
$I_1(-\infty,\ -1)$	positivo	decreciente
$I_2(-1,\ 1)$	negativo	creciente
$I_3(1,\ +\infty)$	positivo	decreciente

BLOQUE 2

SECCIÓN 4.1
SECUENCIA DIDÁCTICA 2
EXISTENCIA DE PUNTOS CRÍTICOS

INICIO

a. VALOR MÁXIMO RELATIVO

Sea f una función definida sobre el intervalo abierto (a, b) que contiene al número x_0.

i. Si $f(x_0) \leq f(x)$ para todo número x en el intervalo (a, b), entonces el punto $(x_0, f(x_0))$ se denomina mínimo relativo (o local) de la función f y $f(x_0)$ es el valor mínimo relativo de f sobre el intervalo (a, b).

VALOR MÍNIMO RELATIVO

ii. Si $f(x_0) \geq f(x)$ para todo número x en el intervalo (a, b), entonces el punto $(x_0, f(x_0))$ se denomina máximo relativo (o local) de la función f y $f(x_0)$ es el valor máximo relativo de la función f sobre el intervalo (a, b).

DESARROLLO

a. En ambos casos $f(x_0) \geq f(x_0 + \Delta x)$.

b. Si $f(x_0) \geq f(x_0 + \Delta x)$, entonces $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \leq 0$.

c. $\dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \geq 0$. **d.** $\dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \leq 0$.

e. $0 \leq \dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \leq 0$.

f. $\lim\limits_{\Delta x \to 0} 0 \leq \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \leq \lim\limits_{\Delta x \to 0} 0$. **h.** $0 \leq \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \leq 0$.

i. Si $0 \leq f'(x_0) \leq 0$, entonces $f'(x_0) = 0$.

CIERRE

a. $f'(x_0) = 0$.

Fin de actividad

SECCIÓN 4.1 BLOQUE 2
EJERCICIOS 1

a. i. Todos los números reales. **ii.** $x = 2$. **iii.** $f(2) = 1$.

b.. i. Todos los números reales. **ii.** $x_1 = \sqrt{\dfrac{2}{3}}$ y $x_2 = \sqrt{\dfrac{2}{3}}$.

iii. $f\left(\sqrt{\dfrac{2}{3}}\right) = 4 - \dfrac{4\sqrt{6}}{9}$ y $f\left(\cdot\sqrt{\dfrac{2}{3}}\right) = 4 + \dfrac{4\sqrt{6}}{9}$.

c. i. Todos los números reales. **ii.** $x_1 = -1$ y $x_2 = 1$. **iii.** $f(-1) = 4$ y $f(1) = 0$.

d. i. Todos los números reales. **ii.** $x_1 = -2$, $x_2 = 0$ y $x_3 = 2$.

iii. $f(-2) = -13$, $f(0) = 3$ y $f(2) = -13$.

e. i. Los números reales menos excepto -2 y 2. **ii.** $x_1 = 0$. **iii.** $f(0) = -\frac{1}{4}$.

f. i. Los números reales mayores o iguales que -1. **ii.** $x_1 = -1$, $x_2 = -\frac{4}{5}$ y $x_3 = 0$.

iii. $f(-1) = 0$, $f\left(-\frac{4}{5}\right) = -\frac{16}{5\sqrt{5}}$ y $f(0) = 0$.

g. i. Todos los números reales. **ii.** $x_1 = 0$. **iii.** $f(0) = 1$.

h. i. Todos los números reales. **ii.** $x_1 = \frac{5}{2}$. **iii.** $f\left(\frac{5}{2}\right) = -\frac{21}{4}$.

i. i. Los números reales menores o igual que -7 y mayores o iguales a 7.

ii. $x_1 = -\sqrt{7}$ y $x_2 = -\sqrt{7}$. **iii.** $f\left(-\sqrt{7}\right) = 0$ y $f\left(\sqrt{7}\right) = 0$.

SECCIÓN 4.1 BLOQUE 2 EJERCICIOS 2

a. i. Todos los números reales. **ii.** $f\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{32}{27}$ y $f(2) = 0$.

iii. Los intervalos de monotonía y clasifica los valores extremos.

Intervalo	Signo de $f'(x)$	Carácter de f
$I_1\left(-\infty, \frac{2}{3}\right)$	positivo	creciente
$I_2\left(\frac{2}{3}, 2\right)$	negativo	decreciente
$I_3(2, +\infty)$	positivo	creciente

Máximo $p\left(\frac{2}{3}, \frac{32}{27}\right)$, mínimo $p(2, 0)$.

b. i. Todos los números reales. **ii.** Los números críticos y los valores extremos $f(-3) = 21$ y $f(3) = -15$.

iii. Los intervalos de monotonía y clasifica los valores extremos.

Intervalo	Signo de $f'(x)$	Carácter de f
$I_1(-\infty, -3)$	positivo	creciente
$I_2(-3, 3)$	negativo	decreciente
$I_3(3, +\infty)$	positivo	creciente

Máximo $p(-3, 21)$, mínimo $p(3, -15)$.

c. i. Todos los números reales.

ii. Los números críticos y los valores extremos $f(1)=6$ y $f(2)=5$.

iii. Los intervalos de monotonía y clasifica los valores extremos.

Intervalo	Signo de $f'(x)$	Carácter de f
$I_1(-\infty,\ 1)$	positivo	creciente
$I_2(1,\ 2)$	negativo	decreciente
$I_3(2,\ +\infty)$	positivo	creciente

Máximo $p(1,6)$, mínimo $p(2,5)$.

d. i. Todos los números reales. **ii.** $f(-1)=\frac{2}{3}$.

iii. Los intervalos de monotonía y clasifica los valores extremos.

Intervalo	Signo de $f'(x)$	Carácter de f
$I_1(-\infty,\ -1)$	positivo	creciente
$I_2(-1,\ +\infty)$	positivo	creciente

Para $p\left(-1,\frac{2}{3}\right)$ no decide el criterio.

e. i. Todos los números reales.

ii. Los números críticos y los valores extremos $f(-2)=-12$, $f(0)=4$ y $f(2)=12$.

iii. Los intervalos de monotonía y clasifica los valores extremos.

Intervalo	Signo de $f'(x)$	Carácter de f
$I_1(-\infty,\ -2)$	negativo	decreciente
$I_2(-2,\ 0)$	positivo	creciente
$I_3(0,\ 2)$	negativo	decreciente
$I_4(2,\ +\infty)$	positivo	creciente

Mínimo $p(-2,12)$. Máximo $p(0,4)$, mínimo $p(2,-12)$.

f. i. Todos los números reales.

ii. Los números críticos y los valores extremos $f(-1)=0$ y $f\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{27}{16}$.

iii. Los intervalos de monotonía y clasifica los valores extremos.

Intervalo	Signo de $f'(x)$	Carácter de f
$I_1(-\infty,\ 1)$	negativo	decreciente
$I_2\left(1,\ \frac{1}{2}\right)$	negativo	decreciente
$I_3\left(\frac{1}{2},\ +\infty\right)$	positivo	creciente

No decide el criterio $p(-1,0)$, mínimo $p\left(\frac{1}{2},-\frac{27}{16}\right)$.

g. i. Todos los números reales.

ii. Los números críticos y los valores extremos $f(-1)=0$, $f(0)=-1$ y $f(1)=0$.

iii. Los intervalos de monotonía y clasifica los valores extremos.

Intervalo	Signo de $f'(x)$	Carácter de f
$I_1(-\infty,\ -1)$	negativo	decreciente
$I_2(-1,\ 0)$	negativo	decreciente
$I_3(0,\ 1)$	positivo	creciente
$I_4(1,\ +\infty)$	positivo	creciente

Para $p(-1,0)$ y $p(1,0)$ no decide el criterio. Mínimo $p(0,-1)$.

h. i. Todos los números reales excepto -2 y 0.

ii. Los números críticos y los valores extremos $f(-1)=-4$.

iii. Los intervalos de monotonía y clasifica los valores extremos.

Intervalo	Signo de $f'(x)$	Carácter de f
$I_1(-\infty,\ -2)$	positivo	creciente
$I_2(-2,\ -1)$	positivo	creciente
$I_3(-1,\ 0)$	negativo	decreciente
$I_4(0,\ +\infty)$	negativo	decreciente

Máximo $p(-1,-4)$.

i. i. Todos los números reales.

ii. Los números críticos y los valores extremos $f(-3)=0$, $f(-1)=-\sqrt[3]{4}$ y $f(0)=0$.

iii. Los intervalos de monotonía y clasifica los valores extremos.

Intervalo	Signo de $f'(x)$	Carácter de f
$I_1(-\infty,\ -3)$	positivo	creciente
$I_2(-3,\ -1)$	negativo	decreciente
$I_3(-1,\ 0)$	positivo	creciente
$I_4(0,\ +\infty)$	positivo	creciente

Máximo $p(3,0)$, mínimo $p\left(-1,-\sqrt[3]{4}\right)$, no decide $p(0,0)$.

j. i. Los números reales no negativos.

ii. Los números críticos y los valores extremos $f(0)=1$.

iii. Los intervalos de monotonía y clasifica los valores extremos.

Intervalo	Signo de $f'(x)$	Carácter de f
$I_1[0,\ 1)$	negativo	decreciente
$I_2(1,\ +\infty)$	positivo	creciente

Máximo $p(1,1)$.

BLOQUE 3

SECCIÓN 4.1 BLOQUE 3 EJERCICIOS 1	Nombre Fecha

a. i. Todos los números reales.

ii. $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$ y $f^{(2)}(x) = 6x - 12$.

iii.

Intervalo	Signo de $f^{(2)}(x)$	Concavidad de f
$I_1(-\infty,\ 2)$	negativo	Hacia abajo
$I_2(2,\ +\infty)$	positivo	Hacia arriba

iv. Punto de inflexión $p(2, -3)$.

b. i. Todos los números reales.

ii. $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$ y $f^{(2)}(x) = 6x - 12$.

iii.

Intervalo	Signo de $f^{(2)}(x)$	Concavidad de f
$I_1(-\infty,\ 1)$	positivo	Hacia arriba
$I_2(1,\ +\infty)$	negativo	Hacia abajo

iv. Punto de inflexión $p(1, 0)$.

c. i. Todos los números reales.

ii. $f'(x) = x^3 - 3x^2$ y $f^{(2)}(x) = 3x^2 - 6x$.

iii.

Intervalo	Signo de $f^{(2)}(x)$	Concavidad de f
$I_1(-\infty,\ 0)$	positivo	Hacia arriba
$I_2(0,\ 2)$	negativo	Hacia abajo
$I_3(2,\ +\infty)$	positivo	Hacia arriba

iv. Puntos de inflexión $p_1(0, -2)$ y $p_2(2, -6)$.

d. i. Todos los números reales excepto el cero.

ii. $f'(x) = 2x - \dfrac{8}{x^2}$ y $f^{(2)}(x) = 2 + \dfrac{16}{x^3}$.

iii.

Intervalo	Signo de $f^{(2)}(x)$	Concavidad de f
$I_1(-\infty,\ -2)$	positivo	Hacia arriba
$I_2(-2,\ 0)$	negativo	Hacia abajo
$I_3(0,\ +\infty)$	positivo	Hacia arriba

iv. Punto de inflexión $p(-2, 0)$.

e.

i. Todos los números reales menos el tres y el menos tres.

ii. $f'(x) = -\dfrac{18x}{\left(x^2-9\right)^2}$ y $f^{(2)}(x) = -\dfrac{54\left(x^2+3\right)}{\left(x^2-9\right)^3}$.

iii.

Intervalo	Signo de $f^{(2)}(x)$	Concavidad de f
$I_1(-\infty,\ -3)$	positivo	Hacia arriba
$I_2(-3,\ 3)$	negativo	Hacia abajo
$I_3(3,\ +\infty)$	positivo	Hacia arriba

iv. Sin puntos de inflexión.

f.

i. Todos los números reales. **ii.** $f'(x) = x\left(x^2-12\right)$ y $f^{(2)}(x) = 3x^2-12$.

iii.

Intervalo	Signo de $f^{(2)}(x)$	Concavidad de f
$I_1(-\infty,\ -2)$	positivo	Hacia arriba
$I_2(-2,\ 2)$	negativo	Hacia abajo
$I_3(2,\ +\infty)$	positivo	Hacia arriba

iv. Puntos de inflexión $p_1(-2, 16)$ y $p_2(2, 16)$.

g.

i. Todos los números reales. **ii.** $f'(x) = \dfrac{1}{2}(x-2)^2$ y $f^{(2)}(x) = x-2$.

iii.

Intervalo	Signo de $f^{(2)}(x)$	Concavidad de f
$I_1(-\infty,\ 2)$	negativo	Hacia abajo
$I_2(2,\ +\infty)$	positivo	Hacia arriba

iv. Punto de inflexión $p(2, 0)$.

h.

i. Todos los números reales excepto el dos y el menos dos.

ii. $f'(x) = \dfrac{4x}{\left(4-x^2\right)^2}$ y $f^{(2)}(x) = \dfrac{4\left(3x^2+4\right)}{\left(4-x^2\right)^3}$.

iii.

Intervalo	Signo de $f^{(2)}(x)$	Concavidad de f
$I_1(-\infty,\ -2)$	negativo	Hacia abajo
$I_2(-2,\ 2)$	positivo	Hacia arriba
$I_3(2,\ +\infty)$	negativo	Hacia abajo

iv. Sin puntos de inflexión.

BLOQUE 4

SECCIÓN 4.1 BLOQUE 4 EJERCICIOS 1

a. i. Todos los números reales. **ii.** $f'(x)=-x^2+4$ y $f^{(2)}(x)=-2x$. **iii.** $x_1=-2$, $x_2=2$. **iv.** Mínimo $\left(-2,-\frac{16}{3}\right)$, Máximo $\left(2,\frac{16}{3}\right)$.

b. i. Todos los números reales. **ii.** $f'(x)=-3x^2+\frac{3}{2}x+\frac{9}{2}$ y $f^{(2)}(x)=-6x+\frac{3}{2}$. **iii.** $x_1=-1$, $x_2=\frac{3}{2}$. **iv.** Mínimo $\left(-1,-\frac{11}{4}\right)$, Máximo $\left(\frac{3}{2},\frac{81}{16}\right)$.

c. i. Todos los números reales. **ii.** $f'(x)=4x^3-6x^2$ y $f^{(2)}(x)=12x^2-12x$. **iii.** $x_1=0$, $x_2=\frac{3}{2}$.

iv. No decide el criterio $(0,0)$, Mínimo $\left(\frac{3}{2},-\frac{27}{16}\right)$.

d. i. Todos los números reales. **ii.** $f'(x)=-x^3+16x$ y $f^{(2)}(x)=-3x^2+16$. **iii.** $x_1=-4$, $x_2=0$, $x_3=4$. **iv.** Máximo $(-4,64)$, Mínimo $(0,0)$, Máximo $(4,64)$.

e. i. Todos los números reales. **ii.** $f'(x)=12x^3-36x^2-48x$ y $f^{(2)}(x)=36x^2-72x-48$. **iii.** $x_1=-1$, $x_2=0$, $x_3=4$. **iv.** Mínimo $(-1,-4)$, Máximo $(0,5)$, Mínimo $(4,-379)$.

f. i. Todos los números reales. **ii.** $f'(x)=-4x^3+12x^2$ y $f^{(2)}(x)=-12x^2+12x$. **iii.** $x_1=0$, $x_2=3$. **iv.** En $(0,-15)$ no decide el criterio, Máximo $(3,12)$.

g. i. Todos los números reales. **ii.** $f'(x)=2x^3-8x$ y $f^{(2)}(x)=6x^2-8$. **iii.** $x_1=-2$, $x_2=0$, $x_2=2$. **iv.** Mínimo $(-2,-6)$, Máximo $(0,2)$, Mínimo $(2,-6)$.

h. i. Todos los números reales. **ii.** $f'(x)=\dfrac{8x}{9\sqrt[3]{x^2-4}}$ y $f^{(2)}(x)=\dfrac{8\left(x^2-12\right)}{27\sqrt[3]{\left(x^2-4\right)^4}}$.

iii. $x_1=-2$, $x_2=0$, $x_2=2$. **iv.** Mínimo $(-2,0)$, Máximo $\left(0,2\dfrac{\sqrt[3]{16}}{3}\right)$, Mínimo $(2,0)$.

i. i. Todos los números reales. **ii.** $f'(x)=\dfrac{8x}{\left(x^2+1\right)^2}$ y $f^{(2)}(x)=\dfrac{8\left(3x^2-1\right)}{\left(x^2+1\right)^3}$. **iii.** $x_1=0$. **iv.** Máximo $(0,4)$.

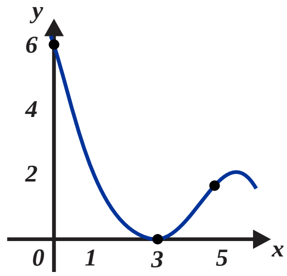
j. i. Todos los números reales excepto el 1. **ii.** $f'(x)=\dfrac{x^3-3x^2}{(x-1)^3}$ y $f^{(2)}(x)=\dfrac{6x}{(x-1)^4}$.

iii. $x_1=0$, $x_2=3$. **iv.** No decide el criterio en $(0,0)$, Mínimo en $\left(3,\frac{27}{4}\right)$.

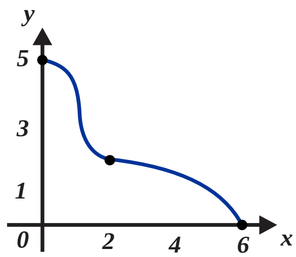
BLOQUE 5

SECCIÓN 4.1 BLOQUE 5 EJERCICIOS 1

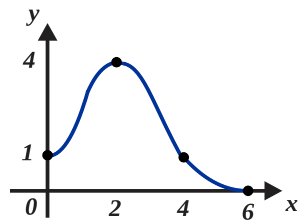
a.



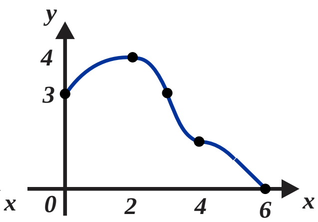
b.



c.

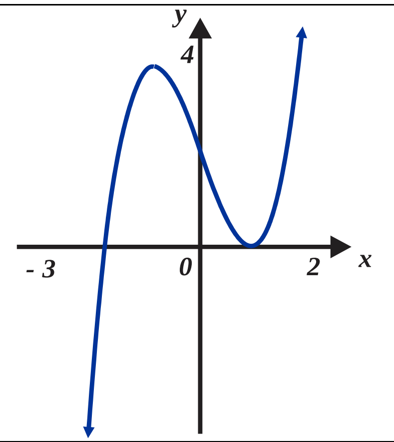


d.

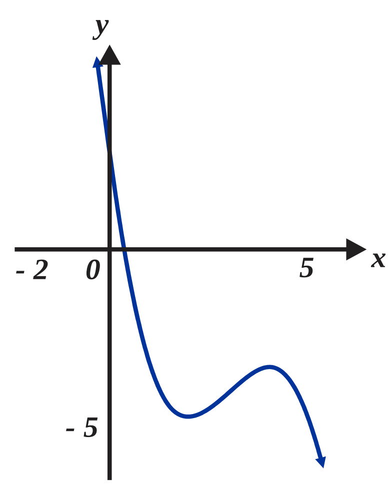


SECCIÓN 4.1 BLOQUE 5 EJERCICIOS 2

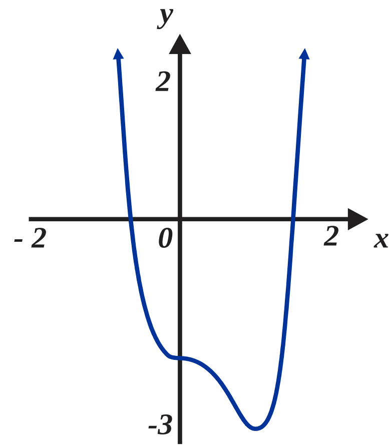
a. Decreciente $(-1,\ 1)$.
Creciente $(-\infty,\ -1)\cup(1,\ +\infty)$.
Cóncava hacia abajo $(-\infty,\ 0)$.
Cóncava hacia arriba $(0,\ +\infty)$.
Mínimo $m(1,\ 0)$.
Máximo $M(-1,\ 4)$. Inflexión $I(0,\ 2)$.



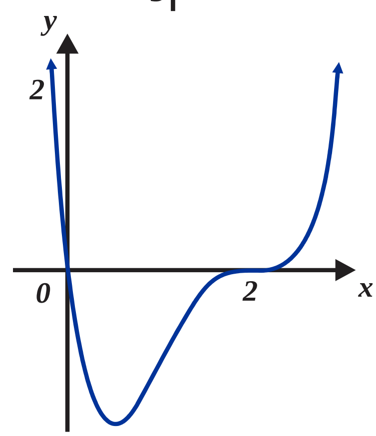
b. Decreciente $(-\infty,\ 2)\cup(4,\ +\infty)$.
Creciente $(2,\ 4)$.
Cóncava hacia abajo $(3,\ +\infty)$.
Cóncava hacia arriba $(-\infty,\ 3)$. Mínimo $m\left(2,\ -\dfrac{14}{3}\right)$.
Máximo $M\left(4,\ -\dfrac{10}{3}\right)$.
Inflexión $I(3,\ -4)$.



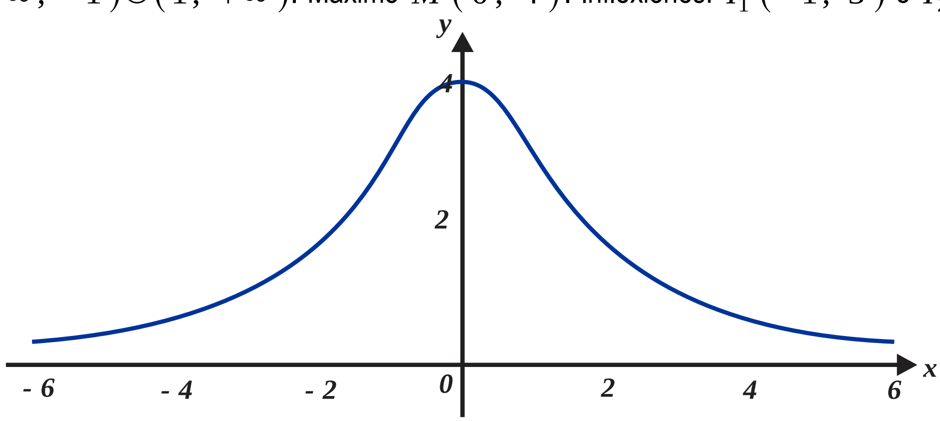
c. Decreciente $(-\infty,\ 0)\cup(0,\ 1)$.
Creciente $(1,\ +\infty)$.
Cóncava hacia abajo $(-\infty,\ 0)\cup\left(0,\ \frac{2}{3}\right)$.
Cóncava hacia arriba $(-\infty,\ 0)$.
Mínimo $m(1,\ -3)$.
Inflexión $I(0,\ -2)$.



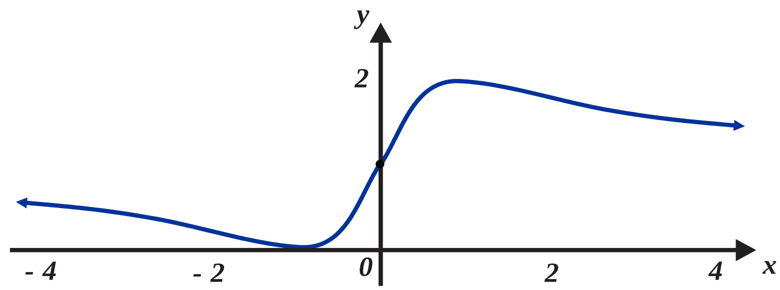
d. Decreciente $\left(-\infty,\ \frac{1}{2}\right)$.
Creciente $\left(\frac{1}{2},\ 2\right)\cup(2,+\infty)$. Cóncava hacia abajo $(1,\ 2)$.
Cóncava hacia arriba $(-\infty,\ 1)\cup(2,\ +\infty)$. Mínimo $m\left(\frac{1}{2},\ -\frac{27}{16}\right)$.
Inflexión $I(2,\ 0)$.



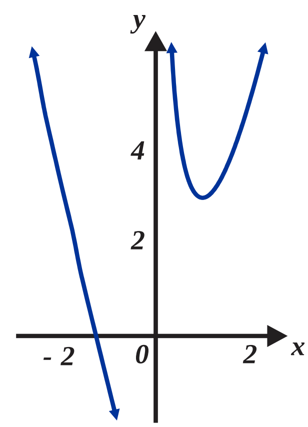
e. Creciente $(-\infty,\ 0)$. Decreciente $(0,+\infty)$. Cóncava hacia abajo $(-1,\ 1)$. Cóncava hacia arriba $(-\infty,\ -1)\cup(1,\ +\infty)$. Máximo $M(0,\ 4)$. Inflexiones: $I_1(-1,\ 3)$ e $I_2(1,\ 3)$.



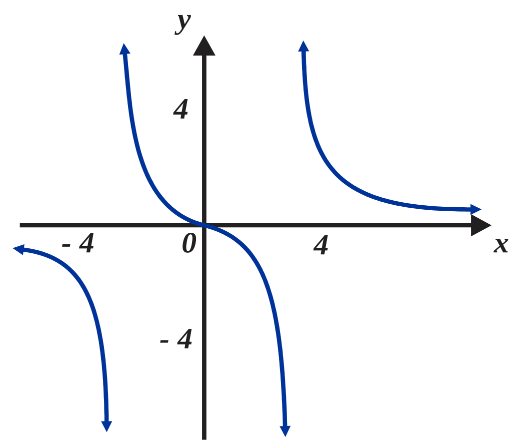
f. Creciente $(-1,1)$. Decreciente $(-\infty,\ -1)\cup(1,\ +\infty)$. Cóncava hacia abajo $(-\infty,\ -\sqrt{3})\cup(0,\ \sqrt{3})$. Cóncava hacia arriba $(-\sqrt{3},\ 0)\cup(\sqrt{3},\ +\infty)$. Mínimo $m(-1,\ 0)$.
Máximo $M(1,\ 2)$.
Inflexiones: $I_1\left(-\sqrt{3},\ \frac{2-\sqrt{3}}{2}\right)$, $I_2(0,\ 1)$ e $I_3\left(\sqrt{3},\ \frac{2+\sqrt{3}}{2}\right)$.



g. Creciente $(1,\ +\infty)$.
Decreciente $(-\infty,\ 0)\cup(0,\ 1)$.
Cóncava hacia abajo $\left(-\sqrt[3]{2},\ 0\right)$.
Cóncava hacia arriba $\left(-\infty,\ -\sqrt[3]{2}\right)\cup(0,\ +\infty)$.
Mínimo $m(1,\ 3)$.
Inflexiones: $I\left(-\sqrt[3]{2},\ 0\right)$.



h. Decreciente
$(-\infty,\ -3)\cup(-3,\ 3)\cup(3,\ +\infty)$.
Cóncava hacia abajo $(-\infty,\ -3)\cup(0,\ 3)$.
Cóncava hacia arriba $(-3,\ 0)\cup(3,\ +\infty)$.
Inflexiones: $I(0,\ 0)$.



SECCIÓN 4.2

SECCIÓN 4.2 BLOQUE 1 EJERCICIOS 1

1. Los números solicitados son $x=500$ y $y=500$.

2. $x=60$ y $y=10$. **3.** Base de longitud $\frac{l}{3}$ y lados oblicuos de longitud $\frac{l}{3}$.

4. 20 centímetros.

5. 50 y 100 metros, área máxima 5000 metros cuadrados. .

6.

a. $\frac{L^2}{40}$.

b. $x=\frac{L}{10}$ y $y=\frac{L}{16}$ metros.

7.

a. $largo=6$, $ancho=3$.

b. $largo=2$, $ancho=3$.

8. $largo=15$ metros, $ancho=20$ metros.

9. $base=1$ metro, $altura=\frac{1}{2}$ metro.

10. Base cuadrada de longitud de lado $\sqrt{\frac{5}{3}}$. Altura de longitud $\sqrt{\frac{5}{3}}$.

11. $base=2.8$ metros, $altura=1.8$ metros.

12. $base=\frac{24}{4+\pi}$ metros, $altura=\frac{12}{4+\pi}$ metros.

13. $altura=x=4$ centímetros y base de lado $24-2x=8$ centímetros.

14. base de lado $x=80$ altura $y=40$ centímetros.

15. base de lado $x=10$ altura $y=10$ centímetros.

16. base de lado $x=\frac{10}{\sqrt{6}}$, altura $y=\frac{10}{\sqrt{6}}$ y volumen $y=\frac{10}{\sqrt{6}}\left(\frac{10}{\sqrt{6}}\right)^2$ centímetros cúbicos.

17. $x=\frac{1}{\sqrt[3]{10}}$, $h=\frac{20}{\sqrt[3]{2\pi}}$ centímetros.

18. $r=\frac{10}{\sqrt[3]{2\pi}}$, $h=\frac{1}{2\sqrt[3]{10}}$.

19. $r=\frac{2}{\sqrt[3]{\pi^2}}$, $h=2\sqrt[3]{\pi}$.

20. $x=20$, $y=20$ centímetros.

BIBLIOGRAFÍA

En la parte final del cuaderno de trabajo se encuentran las referencias en que el alumno puede consultar la temática del contenido en que desee profundizar; los docentes pueden recurrir a ella para incrementar, la variedad, el número y el grado de dificultad de los ejercicios y contenidos propuestos en el cuaderno de trabajo.

BIBLIOGRAFÍA PARA EL PROFESOR

Larson, E. (2014). *Cálculo Tomo 1.* décima edición. México: Cengage Learning.

Thomas, Jr. (2010). *Cálculo una variable Decimosegunda edición*. México: Pearson - Addison Wesley.

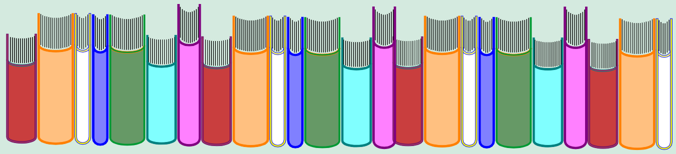
Purcell, E. (2007). *Calculo diferencial e integral Novena edición*. México: Pearson - Addison Wesley.

Stewart, J. (2007). *Calculo de una variable. Trascendentes tempranas sexta edición*. México: Cengage Learning.

Boyce, W. (1994). *Cálculo*. México: Cecsa.
Miller, Ch. (2013). *Matemática: razonamiento y aplicaciones*. México: Pearson - Addison Wesley.

Adams, R. (2009) *Cálculo Sexta edición*. México: Pearson - Addison Wesley.

UNAM. (2016). *Programas de estudio área matemáticas, Cálculo diferencial e integral I – II*. Recuperado de: https://www.cch.unam.mx/programasestudio



BIBLIOGRAFÍA PARA EL ALUMNO

Miller, Ch. (2013). *Matemática: razonamiento y aplicaciones*. México: Pearson - Addison Wesley.

Purcell, E. (2007). *Calculo diferencial e integral Novena edición*. México: Pearson - Addison Wesley.

Stewart, J. (2012). *Precálculo Matemáticas para el cálculo Sexta Edición*. México: Cengage Learning.

Haeussler, F. (2015). *Matemáticas para administración y economía Treceava Edición*. México: Pearson.

Haeussler, F. (2011). *Precálculo Treceava Edición*. México: Pearson.

Larson, R. (2012). *Precálculo Octava Edición*. México: Cengage Learning.