MATEMÁTICAS IV

LO ESENCIAL EN FUNCIONES: POLINOMIALES, RACIONALES, EXPONENCIALES, LOGARÍTMICAS Y TRIGONOMÉTRICAS

AUTORES
Pantaleón Gómez Carranza
Oscar López García
Ferman Arellano Cabezas
Martín Paredes Martínez
Héctor González Pérez
Jesús Lechuga Anaya
José Adolfo Rendón Ortiz
Edgar Cervantes Santana
Mauricio Enrique Rodríguez Pérez
Aldo Arenas García
Miguel Ángel Villalba Chavero
Rafael Martínez Patiño
Rafael Gutiérrez Estrada

COORDINACIÓN: OSCAR LÓPEZ GARCÍA PANTALEÓN GÓMEZ CARRANZA

CCH ORIENTE
2017 - 2018

Gómez, Pantaleón y Colaboradores

MATEMÁTICAS IV

LO ESENCIAL EN FUNCIONES: POLINOMIALES, RACIONALES
EXPONENCIALES, LOGARÍTMICAS Y TRIGONOMÉTRICAS

COLEGIO DE CIENCIAS Y HUMANIDADES,
PLANTEL ORIENTE 2018

ISBN: PENDIENTE

ÁREA Matemáticas

Formato 21 por 27 cm Páginas: 185

MATEMÁTICAS IV

LO ESENCIAL EN FUNCIONES: POLINOMIALES, RACIONALES, EXPONENCIALES, LOGARÍTMICAS Y TRIGONOMÉTRICAS

f(x)
f(x)
f(x)

COORDINACIÓN: OSCAR LÓPEZ GARCÍA
PANTALEÓN GÓMEZ CARRANZA

CCH ORIENTE
2017 - 2018

AUTORES
Pantaleón Gómez Carranza
Oscar López García
Ferman Arellano Cabezas
Martín Paredes Martínez
Héctor González Pérez
Jesús Lechuga Anaya
José Adolfo Rendón Ortiz
Edgar Cervantes Santana
Mauricio Enrique Rodríguez Pérez
Aldo Arenas García
Miguel Ángel Villalba Chavero
Rafael Martínez Patiño
Rafael Gutiérrez Estrada

MATEMÁTICAS IV

LO ESENCIAL EN FUNCIONES: POLINOMIALES, RACIONALES, EXPONENCIALES, LOGARÍTMICAS Y TRIGONOMÉTRICAS

$f(x)$

$f(x)$

$f(x)$

COORDINACIÓN: OSCAR LÓPEZ GARCÍA

PANTALEÓN GÓMEZ CARRANZA

CCH ORIENTE

2017 - 2018

COLEGIO DE CIENCIAS Y HUMANIDADES
Plantel Oriente

Impreso en CCH Oriente, UNAM

Departamento de Impresiones a cargo del Sr. Rosendo Vargas Torres

Se tiraron 300 ejemplares

INTRODUCCIÓN

Bienvenidos a Matemáticas IV, lo esencial en funciones polinomiales, racionales, exponenciales, logarítmicas y trigonométricas. Nos es grato presentar esta obra que puede catalogarse como un libro de texto. Con esta obra pretendemos hacer accesible el curso de Matemáticas IV, que se imparte en el Colegio de Ciencias y Humanidades de la UNAM, apoyando el éxito de los estudiantes y proponiendo a los profesores opciones significativas de enseñanza.

Esta obra, que corresponde al producto que nos comprometimos desarrollar en el proyecto de trabajo de área complementaria del ciclo escolar 2017 – 2018, representa un gran esfuerzo de nuestra parte por desarrollar de manera pertinente y con calidad todos los propósitos, los aprendizajes y la temática incluida en la última versión del Programa de Estudios de la asignatura de Matemáticas IV del Colegio de Ciencias y Humanidades. Con este esfuerzo, ponemos en manos del lector una obra que incluye todos los contenidos y aprendizajes relativos a las funciones que todo estudiante de bachillerato debe conocer y dominar para continuar con éxito su formación en esta área del conocimiento.

Por consiguiente, el propósito general de la presente obra, es el de ofrecer un texto que los estudiantes puedan leer, comprender y analizar, y que el profesor que imparte la asignatura de Matemáticas IV en el Colegio de Ciencias y Humanidades, lo pueda utilizar como guía de apoyo en el desarrollo de su curso. Para conseguir lo anterior, hemos utilizado un lenguaje sencillo, con oraciones cortas, explicaciones claras y una gran diversidad de ejemplos seleccionados y resueltos detalladamente, también proponemos una gran cantidad y diversidad de ejercicios relacionados con situaciones, mismas que seguramente motivarán a los estudiantes a estudiar matemáticas. Conviene señalar que a esta obra le hace falta afinar algunos elementos, por ejemplo, falta proporcionar más apoyos al lector, tales como resúmenes, aplicaciones en el marco de la vida real, actualizarse conforme transcurre el tiempo, etc., sin embargo, creemos y tenemos el firme propósito de que en un tiempo perentorio sea trascendente en el Colegio de Ciencias y Humanidades, por lo que la seguiremos complementando.

Descripción de la presente obra

Apertura de la unidad

- Cada unidad inicia presentando los propósitos que pretendemos que el alumno logre una vez que haya concluido el estudio de la misma.

- Contiene las secciones en que ha sido dividida cada unidad.

Secciones

- Inician con los aprendizajes que el alumno debe adquirir durante el desarrollo de la sección, estos aprendizajes son los propuestos en los Planes y Programas vigentes de la asignatura de Matemáticas IV del Colegio de Ciencias y Humanidades de la UNAM.

- En la medida de lo posible y en las secciones que así lo ameritan, el desarrollo de la temática incluye ejemplos que apoyan el desarrollo de los pensamientos inductivo y deductivo en el alumno, con actividades de exploración y justificación, para incrementar las formas de argumentación del alumno en la resolución de problemas.

El eje central de la metodología didáctica se basa en la resolución de problemas, por lo que incluimos situaciones problemáticas que seleccionamos cuidadosamente con el fin de incrementar el interés y la curiosidad de los alumnos por la matemática.

• Múltiples ejemplos, que presentan soluciones con enfoques variados, algebraicos, gráficos, y numéricos. En estos ejemplos incluimos una variedad de estilos de aprendizaje haciendo hincapié a los estudiantes que métodos distintos conducen al mismo resultado.

• Exploraciones, que pretenden llamar la atención del estudiante al descubrimiento de los conceptos matemáticos, reforzando sus habilidades del pensamiento crítico fomentándole una comprensión intuitiva de los conceptos teóricos.

• Figuras, cada unidad contiene múltiples figuras que apoyan al lector en la comprensión de los conceptos correspondientes.

• Tecnología, con el propósito de crear una relación entre los resultados obtenidos a partir de sus procesos de pensamiento y los proporcionados por los dispositivos electrónicos.

• Preguntas, destacan aspectos importantes de los contenidos de la asignatura y tienen el propósito de ofrecer retos al lector con el fin de incrementar su capacidad de análisis y de reflexión.

• Preguntas sobre los conceptos aprendidos. Se refieren a los conceptos relevantes de cada sección. • Problemas propuestos. Cada sección contiene un conjunto de problemas propuestos que pueden clasificarse de distintas formas. Los algorítmicos, su nombre lo indica, justifican el fin de reforzar los algoritmos inherentes a la disciplina. Los de aplicación, son un reto al lector y se justifican por el hecho de establecer relaciones entre variables con el fin de crear un modelo que describa la solución de un problema.

• Respuestas a los ejercicios propuestos. Proporcionamos la respuesta de la mayoría de los ejercicios que proponemos, con el fin de que el lector verifique sus resultados.,

• Autoevaluación. Cuidadosamente señalada con el fin de que el lector mida el nivel de aprendizajes alcanzados.

CARACTERÍSTICAS INSTITUCIONALES

Texto diseñado y elaborado, tanto para el plan Ordinario como para el programa PAE, con las siguientes características:

• Ubicado en “Producción de Materiales” Nivel “C” del Protocolo de Equivalencias del Colegio de Ciencias y Humanidades.

• Con las características señaladas en el Glosario de Términos establecido en el Protocolo de Equivalencias vigente del Colegio de Ciencias y Humanidades.

• Acorde al Programa Modificado de la Asignatura de Matemáticas IV.

• Congruente con el proyecto de área complementaria propuesto y aprobado por el H. Consejo Técnico del Colegio.

Invitamos a los lectores a hacernos llegar sus observaciones, comentarios y sugerencias sobre la presente obra, mismas que recibirán una especial atención y respuesta inmediata.

LOS AUTORES

CONTENIDO

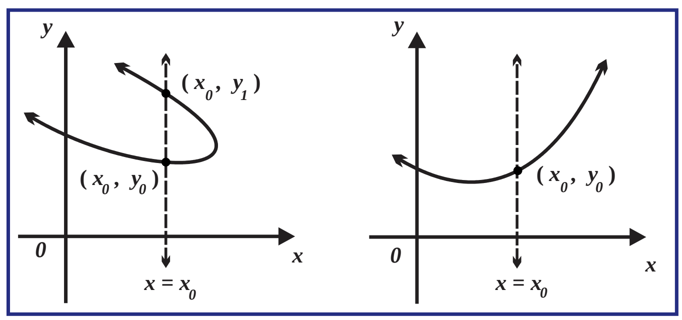
1 FUNCIONES POLINOMIALES

PROPÓSITOS:
Al finalizar la unidad el alumno:

Habrá avanzado en el estudio de las funciones al introducir la notación funcional y la noción de dominio y rango. Relacionando la expresión algebraica de una función polinomial con su gráfica y analizar su comportamiento. Con base en la resolución de problemas y en contexto, usar las gráficas, tablas y expresiones matemáticas para explicar los procesos involucrados.

CONTENIDO

1



1.1 FUNCIONES Y ELEMENTOS

APRENDIZAJES

En el estudio de la presente sección usted:
1. Explorará diferentes relaciones, reconociendo las condiciones necesarias para determinar si una relación es función, la simbolizará y distinguirá el dominio y el rango.
2. Usará la notación de intervalos para representar el dominio y rango de una función.

Resolver problemas es uno de los propósitos de las matemáticas, el estudio y análisis (resolución) de diversas situaciones reales (o hipotéticamente reales) requiere de la construcción de un modelo (que puede ser una figura, una tabla, una relación o la combinación de estos elementos) que relacione dos o más de sus propiedades, así, los modelos matemáticos incluyen (o pueden ser) relaciones matemáticas entre las partes que constituyen el problema, éstas relaciones describen su comportamiento y/o solución. En esta obra, trataremos los modelos matemáticos conocidos como "funciones", las funciones son relaciones matemáticas entre variables, mismas que representan un estado específico de un problema y que el cambio en sus valores representa un cambio de las características del problema.
En nuestra vida diaria todos hemos dicho o escuchado frases como:

"el precio del pasaje está en función (o depende) de la distancia existente hasta el destino",
"el tiempo que una persona puede hablar desde su "celular" depende (es función) del "crédito" que dispone.
"la calificación final que alguien obtendrá en un curso está en función (o depende) de cuánto tiempo le dedique",
"los ingresos que obtenga están en función (o dependen) del tiempo que trabaje",

también, en el ámbito académico hemos escuchado,

"el área de un círculo depende (es función) de la longitud de su radio",
"el volumen de un gas depende de la temperatura",
"el tamaño de una población depende (es función) del tiempo transcurrido".

EJEMPLO 1.1 (Construcción de modelos utilizando funciones)

a. La leyenda en una distribuidora de granos indica: "maíz, 6 pesos el kilogramo, tara (precio del contenedor, que tiene capacidad de 50 Kilogramos) 10 pesos". Si se desea adquirir cierta cantidad de maíz y un solo contenedor. ¿Cuánto se pagará?
i. En la elaboración de un modelo que describa la situación antes descrita, debemos tener en cuenta que la cantidad de maíz adquirida depende de la cantidad de dinero invertido.
ii. Por tanto, la cantidad de dinero a pagar $p(x)$ al adquirir x Kilogramos de maíz es $p(x)=10+6x$.
iii. Puesto que x representa una cantidad no negativa, la relación $p(x)=10+6x$, se limita a que a la variable x sólo se le asignen números comprendidos entre 0 y 50, inclusive.
iv. La mínima cantidad de dinero a desembolsar es el precio de la tara y el máximo es $p(50)=10+6(50)=310$ pesos.
b. Cierta compañía telefónica indica en su propaganda "costo de la llamada, 80 centavos por minuto (o parte proporcional), más comisión por conexión 20 centavos. Se desea construir un modelo matemático de manera que, si se efectúa una llamada, y se posee una cantidad específica de dinero, proporcione la duración (en segundos) de la llamada.
i. En la construcción del modelo que describe tal situación intervienen dos variables: la cantidad de dinero disponible y el tiempo que dura la llamada.
ii. Si f representa el tiempo de la duración de la llamada y x el dinero disponible, entonces $f(x)$ indica que la duración de la llamada depende del dinero disponible para ella.
iii. Así, $f(x)=20+80x$ proporciona la duración de la llamada en función del dinero disponible.
iv. La mínima cantidad de dinero utilizada al llamar es 20 centavos, lo que significa que la llamada se interrumpió inmediatamente. Por otra parte, el costo de la llamada varía desde los 20 centavos en adelante y el tiempo de la llamada desde los 0 segundos en adelante.
c. Si en el estacionamiento de un centro comercial, la tarifa por estacionar el automóvil es de "cinco pesos por las tres primeras horas más quince pesos por hora extra" (o la parte fraccionaria correspondiente), entonces:

i. En la construcción del modelo que describe tal situación intervienen dos variables: el pago por estacionar el automóvil y el tiempo de estacionamiento.
ii. Si f representa el tiempo de estacionamiento y x representa el pago por estacionar el automóvil, entonces $f(x)$ indica que el tiempo de estacionamiento es función del pago por estacionar el automóvil.
iii. Así $f(x)=5$, si x es menor o igual que tres horas, $f(x)=5+15x$ si x es mayor que tres horas.
iv. En general, x es mayor o igual a cero horas y $f(x)$ asume valores mayores o iguales a cinco pesos.

□

EJEMPLO 1.2 (Construcción de modelos utilizando funciones)
Los cuatro vértices de un cuadrado (de lado de longitud 10 unidades) se expanden de tal manera que se transforman en "cuartos de círculo", dando lugar a la región mostrada en la *figura 1.1* (los cuartos de círculo no se superponen). ¿Cuál es el modelo que describe el área de la región que no forma parte de los cuartos de círculo en términos de la longitud del radio de los "cuartos de círculo"?
i. El área A de la "región resultante" generada por la expansión de los vértices depende de la longitud del radio de los "cuartos de círculo", esto lo indicamos por $A(r)$.
ii. Inicialmente, el área encerrada por el cuadrado es 100 unidades cuadradas, pero los cuatro cuartos de círculo (de radio de longitud r) tienen área de πr^2. El área de la región que no forma parte de los cuartos de círculo es $A(r)=100-\pi\cdot r^2$ unidades cuadradas.

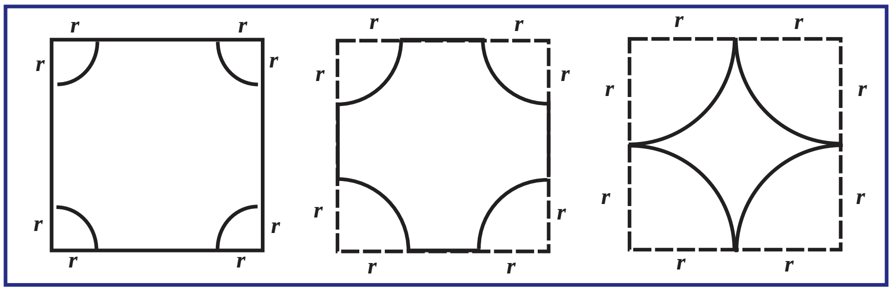


FIGURA 1.1

Puesto que el cuadrado (de lado 10 unidades) contiene un área de 100 unidades cuadradas, entonces la función que describe el área de la figura restante es $A(r)=100-\pi r^2$ siempre que $0<r\le 5$ (¿por qué?). Por otra parte, el área de la región oscila entre $100-25\pi$ y 100 unidades cuadradas, es decir, el recorrido (o rango) de $A(r)=100-\pi r^2$ oscila entre $100-25\pi$ y 100 unidades cuadradas.
iii. La longitud del radio de un cuarto de círculo está comprendida entre 0 y 5 unidades puesto que las "expansiones no pueden superponerse.

□

EJEMPLO 1.3 (Construcción de modelos utilizando funciones)
Un envase cilíndrico tiene capacidad de 1000 litros. Se desea determinar la función que describe el área de su superficie en términos del radio del envase. La *figura 1.2* muestra la descomposición del cilindro en superficies planas.

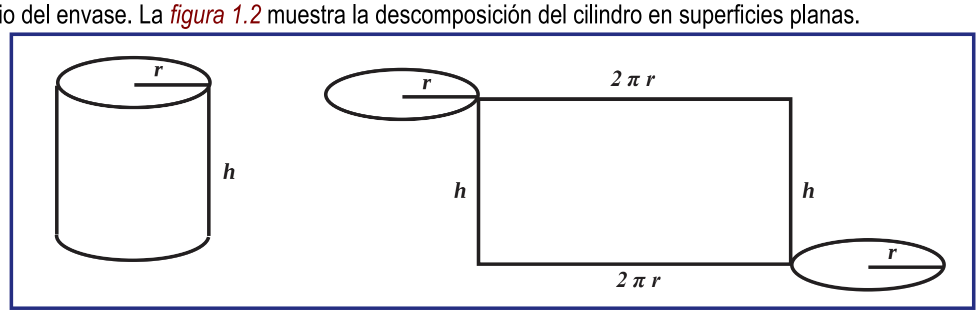


FIGURA 1.2

i. El área de cada superficie circular es πr^2 y el área de la región rectangular es $2\pi r h$, entonces el área del cilindro es $A=2\pi r^2+2\pi r h$ (que depende de las variables r y h).

ii. Dado que las variables r y h están ligadas por el hecho de que $V = 1000 = \pi r^2 h$, una de ellas puede escribirse en términos de la otra, así $h = \dfrac{1000}{\pi r^2}$.

iii. Si sustituimos $h = \dfrac{1000}{\pi r^2}$ en $A = 2\pi r^2 + 2\pi r h$ obtenemos $A(r) = 2\pi \cdot r^2 + \dfrac{2000}{r}$ siempre que $r > 0$, función que sólo depende de la variable r.

□

En cada uno de los casos anteriores, la palabra función se relaciona con el hecho de que la variación de una característica proporciona información sobre el comportamiento de la otra. Por el hecho de poder medir y controlar (por parte nuestra) la variable de un modelo, se le nombra "variable independiente". **La variable independiente** es aquella propiedad o característica medible de un modelo que influye o afecta a otra característica medible del modelo. **La variable dependiente** es aquella característica o propiedad del modelo que se desea investigar y que se modifica al cambiar la variable independiente. Formalmente:

Definición 1.1 (VARIABLE)

a. Variable: característica medible de un modelo que es susceptible de cambiar.
b. Variable independiente, variable de un modelo que es factible de controlar, modificar o de asignarle los valores.
c. Variable dependiente, variable de un modelo cuyos valores se modifican al asignarle valores a la variable independiente.

Para indicar la dependencia de una variable (dependiente) r de otra variable (independiente) x se utiliza el término de relación y la notación $r(x)$. La expresión $r(x)$ se lee *"erre de equis"*.

Advertencia: $r(x)$ no significa r veces x, $r(x)$ es la salida correspondiente a la asignación x.

En las situaciones que presentamos en los *ejemplos 1.1 a 1.3*, están presentes (ya sea explícitamente o implícitamente):
i. Dos variables (la variable independiente a la que le son asignados números y la variable dependiente que, como su nombre lo indica, asume un número cada vez que le es asignado un número a la variable independiente), cada una de ellas relacionada con un conjunto de números.
ii. La relación (o forma en que se relacionan las variables), misma que se denominada regla de correspondencia o regla de asociación.

En este curso sólo son de nuestro interés las relaciones (entre dos variables) que satisfacen las siguientes características:
a. Las asignaciones (posibles) a la variable independiente dan origen a un conjunto (llamémosle A) de números reales.
b. Los valores que asume la variable dependiente (una vez hechas las asignaciones a la variable independiente) dan origen a un subconjunto (llamémosle B) de números reales.
c. A todo número del conjunto A le corresponde un único número del conjunto B.

Para ciertas situaciones, una función puede interpretarse como una máquina que acepta una cantidad de materia prima x (representada por un número real) y que la transforma en cierta cantidad de producto $f(x)$ (representado por otro número real). Así, para la cantidad de materia prima x, la cantidad del nuevo producto producido por la "máquina" es $f(x)$ (lo producido por la máquina dependerá de la cantidad de materia prima x introducido a la máquina), vea la *figura 1.3*.

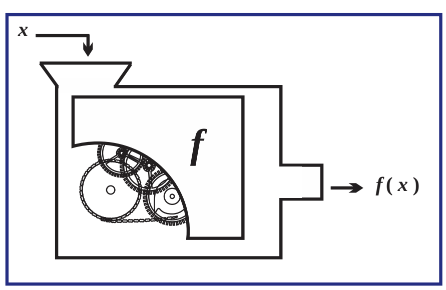


FIGURA 1.3

Cada una de los elementos que componen a una función tiene un nombre específico:

a. Todos los números que es posible asignar a la variable x de manera que f existe (o tiene sentido), constituyen el dominio de la función, y lo representaremos como $dom(f)$.

b. Si el número real x (que se llama preimagen) pertenece al $dom(f)$, entonces el número real $f(x)$ es la imagen de x bajo f.

c. El conjunto de todas las imágenes se llama conjunto imagen (también suele llamársele rango o recorrido) y lo representaremos por $img(f)$.

d. La forma de "transformar" la asignación x es la regla de correspondencia o regla de asociación f.

e. La regla correspondencia es determinista, esto significa que la asignación x a la variable independiente, en dos o más ocasiones, arroja la misma imagen $f(x)$.

f. Las funciones se representan por letras, en la práctica las letras más usadas para ello son f, g y h, pero cualquiera otra también se puede utilizar. Si f es una función y x es un número que está en su dominio, la relación entre éstas se representa por $f(x)$ (se lee "f de x", o de forma más específica "f evaluada en x").

NOTA

Se atribuye a Euler ser el primer matemático que usó por primera vez la notación $f(x)$ para indicar una función f en una variable x.

Las seis observaciones previas son formalizadas con *la definición 1.2., vea la figura 1.4.*

Definición 1.2 (PARTES DE UNA FUNCIÓN Y FUNCIÓN)

Sean A y B dos conjuntos de números reales y f la regla que asigna a cada número x del conjunto A un único número en el conjunto B, entonces:

a. f es la regla de correspondencia de la función.

b. El conjunto A se denomina dominio de la función y se representa por $A = dom(f)$.

c. El conjunto B se conoce como contradominio o codominio.

d. Si x pertenece a $dom(f)$, entonces $f(x)$ es la imagen de x bajo f.

e. El conjunto de todas las imágenes es el recorrido (rango o conjunto imagen; lo representaremos por $img(f)$.

f. Una función es una relación entre dos variables, tal que a cada asignación a la variable independiente corresponde exactamente un valor de la variable dependiente.

La *figura 1.4* presenta un esquema de los elementos antes definidos.

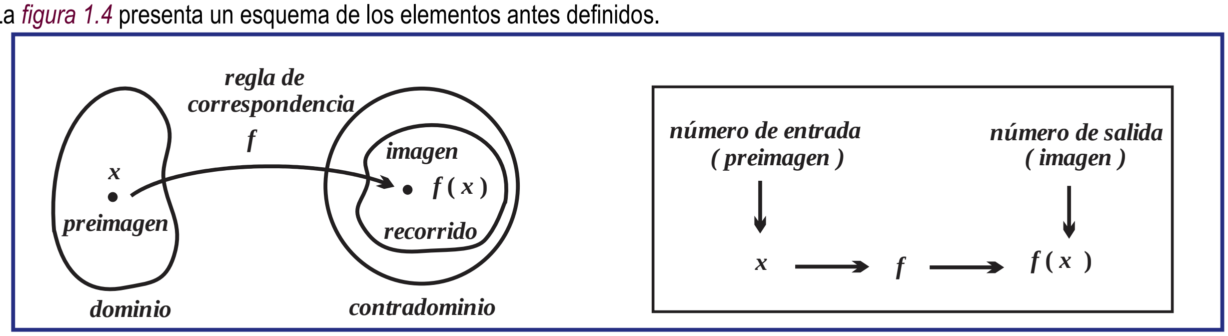


FIGURA 1.4

NOTA

Las propiedades de una función dependen de su regla de correspondencia y de su dominio, así dos funciones con distintos dominios son diferentes aunque tengan la misma regla de correspondencia.

EJEMPLO 1.4 (Dominio e imagen de una función)

a. La función con regla de correspondencia $f(x) = x^2 + 5$ tiene como dominio $dom(f) = IR$ (puesto que cualquier número real se puede elevar al cuadrado y posteriormente se puede sumarle cinco), su imagen (o rango o recorrido) son los números reales mayores o iguales que 5, ¿por qué? (la frase los números reales mayores o iguales que 5 se representa simbólicamente por $\{x \mid x \geq 5\}$, posteriormente ahondaremos sobre esta notación).

b. El área de un círculo depende de la longitud r de su radio, la relación entre ambas variables es $A(r)=\pi r^2$; por tanto, el dominio está constituido por los números reales no negativos, (lo que simbólicamente representamos por $dom(A)=\{r \mid r \geq 0\}$), la imagen (recorrido o rango) es el conjunto de los números reales no negativos (simbólicamente $img\ (A)=\{A \mid A \geq 0\}$tenga en cuenta que un área es un número no negativo que ha sido asignado a una superficie).

Observación: En un contexto general en el que $A(r)=\pi r^2$ no se interprete como el área asignada a un círculo y la variable r no represente una longitud, el dominio correspondiente a $A(r)=\pi r^2$ son todos los números reales, lo que se representa por $dom(A)=IR$.

c. En un cubo cuyos lados miden x unidades, la relación $V(x)=x^3$ representa su volumen, puesto que las longitudes de los lados del cubo son positivas, dominio es $dom(V)=\{x \mid x \geq 0\}$, la imagen (rango o recorrido) lo constituyen todos los números no negativos (lo que se escribe como $img(V)=\{V \mid V \geq 0\}$).

Observación: Si x es sólo una variable y no representa una longitud, entonces $dom(V)=IR$ e $img(V)=IR$

□

1. La expresión $\{x \mid p(x)\}$ se interpreta como “el conjunto de los números x que satisfacen la condición $p(x)$”.
2. El símbolo $\geq$ se denomina relación de orden total y se lee “mayor o igual que”.

EJEMPLO 1.5 (Imagen de una asignación a la variable independiente)

a. El volumen de una esfera (globo, balón, canica, etc.) cuyo radio mida r unidades, se calcula con $V(r)=\frac{4}{3}\pi(r)^3$. La imagen (volumen) correspondiente a una esfera de radio $r=1$ es $V(1)=\frac{4}{3}\pi(1)^3=\frac{4}{3}\pi$ unidades cúbicas.

b. El área asociada al cuadrado de lado de longitud x se calcula con $A(x)=x^2$. El área asociada al cuadrado de lado 2 unidades, es $A(2)=2^2=4$ unidades cuadradas.

c. La imagen de $x=3.5$ bajo $t(x)=8.5x$ es $t(3.5)=8.5(3.5)=29.75$.

□

En lo sucesivo, cuando definamos una función utilizando una relación algebraica, asumiremos que su dominio es el mayor conjunto de números reales para los que la relación algebraica tiene sentido (a menos que se indique otra cosa). Como consecuencia de esta observación es justificable la *definición 1.3*.

Definición 1.3 (Igualdad de funciones)

Dos funciones f y g son iguales si y sólo si $f=g$ y $dom(f)=dom(g)$.

NOTA

No basta con que dos funciones tengan la misma regla de correspondencia para ser iguales, ¡también se requiere que tengan el mismo dominio!

1. La expresión $[a\ ,\ b]$ se refiere a “todos los números contenidos entre los números a y b (incluyendo los extremos a y b) y se denomina “intervalo cerrado”.
2. La expresión $(a\ ,\ b)$ se refiere a “todos los números contenidos entre los números a y b (no incluye a los números a y b) y se denomina “intervalo abierto”.
3. Las expresiones $[a\ ,\ b)$ y $(a\ ,\ b]$ se refieren a “todos los números contenidos entre los números a y b (no incluye al extremo adyacente al paréntesis) y se denominan “intervalos semiabiertos (o semicerrados)”.

EJEMPLO 1.6 (Funciones diferentes con la misma regla de correspondencia)

a. Las funciones $f(x)=x$ tal que $dom(f)=[0\ ,\ 100]$ y $g(x)=x$ tal que $dom(f)=[-100\ ,\ 100]$ tiene la misma regla de correspondencia pero distinto dominio, por tanto son diferentes.

b. La función $f(x)=\sqrt{x-4}$ tiene dominio $dom(f)=[4\ ,\ +\infty)$, por otra parte, la función y $g(x)=\sqrt{x-4}$ tal que $dom(g)=(4\ ,\ +\infty)$ tiene la misma regla de correspondencia pero tiene distinto dominio, por tanto $f \neq g$.

c. La función $f(x)=x^2$ tiene dominio $dom(f)=(-\infty,+\infty)$ y la función $g(x)=x^2$ definida sobre $dom(g)=(0,+\infty)$, tienen la misma regla de correspondencia pero tiene distinto dominio, por tanto $f\neq g$.

□

EJEMPLO 1.7 (Funciones diferentes con regla de correspondencia equivalente)

a. Sean las funciones con regla de correspondencia $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ y $g(x)=x+1$.

Observe que $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}=\dfrac{(x+1)(x-1)}{x-1}=x+1$, sin embargo $f\neq g$ puesto que $dom(f)=IR-\{1\}\neq dom(g)=IR$.

b. Las funciones $f(x)=x^2+3$ definida sobre $[-3,4]$ y $g(x)=x^2+3$ definida sobre $[-2,2]$ son distintas por tener diferente dominio.

c. Si $f(x)=\dfrac{3x^2}{3x}$ y $g(x)=x$, puede pensarse que ambas funciones son iguales puesto que "algebraicamente son equivalentes", observe que $f(x)=\dfrac{3x^2}{3x}=x=g(x)$, sin embargo $dom(f)=IR-\{0\}\neq dom(g)=IR$, entonces $f\neq g$.

□

Si "simplifica" la regla de correspondencia de una función su dominio no cambia.

En varios de los ejemplos previos hemos utilizado símbolos especiales para representar los dominios y las imágenes de funciones (por ejemplo $\geq$, $[a,b]$, entre otros), formalicemos esta notación.

1. La expresión "$x>a$", se lee y hace referencia a "los números reales que son mayores al número a".
2. La expresión "$x\geq a$", se lee y se refiere a "los números que son mayores o iguales al número a".
3. El símbolo IR representa a todos los números reales.

Así, "el conjunto de los números reales menores o iguales que b" y "el conjunto de los números reales mayores o iguales que b", tienen una representación simbólica, representación que incluye el símbolo $\geq$ que se denomina relación de orden parcial, así:
"El conjunto de los números menores o iguales que b" se representa simbólicamente por $x\leq b$".
"El conjunto de los números mayores o iguales que b" se representa simbólicamente por $x\geq b$".
Por otro lado, el símbolo $>$ se conoce como relación de orden total (o estricta), las frases:
"El conjunto de los números menores que b", se representa simbólicamente por $x<b$".
"El conjunto de los números mayores que b", se representa simbólicamente por $x>b$".

El conjunto de los números reales se representa por el símbolo IR y en términos de la relación de orden total es $-\infty<x<+\infty$, expresión que equivale al "intervalo" $(-\infty,+\infty)$ (los símbolos $-\infty$ y $+\infty$ se llaman infinitos y no representan a un número en específico, sólo los utilizaremos para referirnos a cantidades "extremadamente grandes e indefinidas" ya sea positivas o negativas), su representación gráfica es la recta real, vea la *figura 1.5*.

El intervalo $(-\infty,+\infty)$ no tiene extremos, o en su caso, se encuentran indefinidos.

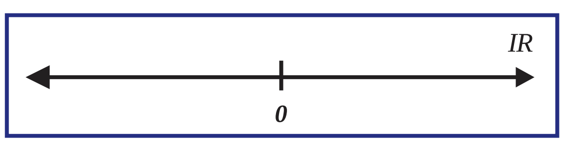


FIGURA 1.5

El lector debe tener en cuenta que:
a. La interpretación del símbolo (relación de orden total) "$>$" depende de cómo se efectúa la lectura, así:

si $x>a$ se lee de izquierda a derecha como "los números reales mayores que el número a".

si $x>a$ se lee de derecha a izquierda como "a es menor que el número x".

b. La relación de orden total "$>$" se asocia al símbolo "$)$" e indica que un intervalo no contiene al número extremo.
c. La relación de orden $\geq$ se relaciona con el símbolo "$]$" e indica que un intervalo contiene al número extremo.
d. El conjunto de los números reales se considera abierto (es decir no tiene extremos).

La *tabla 1.1* incluye los distintos intervalos (subconjuntos de números reales) y sus principales características como son: su significado, su representación como conjunto y su representación en la recta real.

TIPO DE INTERVALO	REPRESENTACIÓN COMO INTERVALO	REPRESENTACIÓN COMO CONJUNTO	REPRESENTACIÓN EN LA RECTA REAL
ABIERTO (NO CONTIENE LOS EXTREMOS)	(a,b)	$\{x\in IR \mid a<x<b\}$	
SEMIABIERTO (NO CONTIENE UNO DE LOS EXTREMOS)	$(a,b]$	$\{x\in IR \mid a<x\le b\}$	
	$[a,b)$	$\{x\in IR \mid a\le x<b\}$	
CERRADO (CONTIENE LOS EXTREMOS)	$[a,b]$	$\{x\in IR \mid a\le x\le b\}$	

TABLA 1.1

PARA REFLEXIONAR

¿? ¿Por qué el intervalo $(-\infty,+\infty)$ es abierto?

EJEMPLO 1.8 (Lectura de intervalos)

a. El intervalo $(-3,6)$, se lee "x es mayor que -3 y menor que 6".
b. El intervalo $(4,10]$, se lee "x es mayor que 4 y menor o igual que 10".
c. El intervalo $[-2.18,-1)$, se lee "x es mayor o igual que -2.18 y menor que -1".
d. El intervalo $[2,17]$, se lee "x es mayor o igual que 2 y menor o igual que 17".
e. El intervalo $(-\infty\ ,\ 6)$, se lee "los números reales menores que 6.
f. El intervalo $(-4\ ,\ +\infty)$, se lee "los números reales mayores que -4".

PARA REFLEXIONAR

¿?
1. ¿Cómo representaría un número real (específico como un intervalo)?
2. ¿Qué significa $5\le x\le 5$?

Para indicar que el número x_0 se ha suprimido del conjunto de los números reales escribiremos $IR-\{x_0\}$, o en términos de intervalos, $(-\infty\ ,\ x_0)\cup(x_0\ ,\ +\infty)$.

Es posible combinar dos o más intervalos para así generar otro intervalo. Para unir dos intervalos se utiliza el símbolo "$\cup$" que se interpreta "unión".

EJEMPLO 1.9 (Dominio escrito en forma de intervalo)

a. Si $f(x)=x^2+2x+1$, entonces cualquier número x_0 puede evaluarse en f de modo que el dominio son todos los números reales, esto se escribe como $dom(f)=(-\infty\ ,\ +\infty)$ o bien $dom(f)=IR$.

b. Si $f(x)=x^8-10x-12$, entonces cualquier número x_0 puede evaluarse en f de modo que el dominio son todos los números reales, lo que se representa por $dom(f)=(-\infty\ ,\ +\infty)$ o bien $dom(f)=IR$.

c. En $f(x)=\frac{x}{x-3}$ cualquier número real puede ser asignado a x excepto el número 3 (recuerde que no es posible dividir por cero), en consecuencia el dominio es $dom(f)=IR-\{3\}$ o bien $dom(f)=(-\infty\ ,\ 3)\cup(3\ ,\ +\infty)$.

d. El dominio de la función $f(x)=\dfrac{x+4}{(x-2)(x+4)}$ es $dom(f)=IR-\{-4,\ 2\}$ o escrito en términos de intervalos como $dom(f)=(-\infty\ ,\ -4)\cup(-4\ ,\ 2)\cup(2\ ,\ +\infty)$.

e. El dominio de la función $f(x)=\sqrt{x}$ es $dom(f)=\{x\,|\,x\geq 0\}$, escrito en forma de intervalo $dom(f)=[0\ ,\ +\infty)$.

f. En $f(x)=\sqrt{x-2}$, la variable x sólo admite asignaciones de números mayores o iguales que 2, entonces $dom(f)=\{x\,|\,x\geq 2\}$ o bien $dom(f)=[2\ ,\ +\infty)$.

g. El dominio de la función $f(x)=\sqrt{3-x}$ es $dom(f)=\{x\,|\,x\leq -3\}$, escrito como un intervalo es $dom(f)=(-\infty\ ,\ 3]$.

□

En las próximas unidades trataremos con diversos tipos de funciones y estableceremos diferentes técnicas para determinar su dominio, y en algunos casos, su imagen (recorrido o rango), sin embargo, en principio las primeras consideraciones que debemos tener en cuenta para ello son:

i. "En los números reales está indefinida la división por el número cero".
ii. "En los números reales están indefinidas las raíces de índice par de números negativos.

NOTA

En la determinación del dominio de una función no deben incluirse los números que anulan el denominador o generan raíces de índice par con radicando negativo.

Por tanto,

Las funciones (reales de variable real) tienen asociada una representación en el plano cartesiano, esta representación pone de manifiesto muchas de sus propiedades. En principio, para trazar la gráfica asociada a una función se requieren técnicas que estudiaremos más adelante.

Definición 1.4 (GRÁFICA DE UNA FUNCIÓN)

a. La gráfica de la función f, es el conjunto $G_f=\{(x,\ y)\ :\ x\in dom(f)\ \text{ y }\ y=f(x)\}$.

b. La representación del conjunto $G_f=\{(x,\ y)\ :\ x\in dom(f)\ \text{ y }\ y=f(x)\}$ en el plano cartesiano es "la representación gráfica de la función f.

En la literatura es común llamar gráfica de la función a una figura y no al conjunto inherente a la *definición 1.4*.

La *definición 1.4* asocia a la función f una representación en el plano cartesiano, representación compuesta por un conjunto de puntos del plano cartesiano y que en las funciones que trataremos se manifestarán como una línea que llamaremos curva, vea la *figura 1.6*.

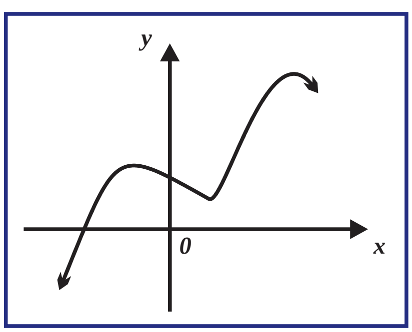


FIGURA 1.6

EJEMPLO 1.10 (Representaciones gráficas de funciones)

a. La función constante, con regla de correspondencia $f(x)=b$ donde b es un número real. Sí $f(x)=b$, $dom(f)=IR$, e $img(f)=\{b\}$, vea la *figura 1.7.*

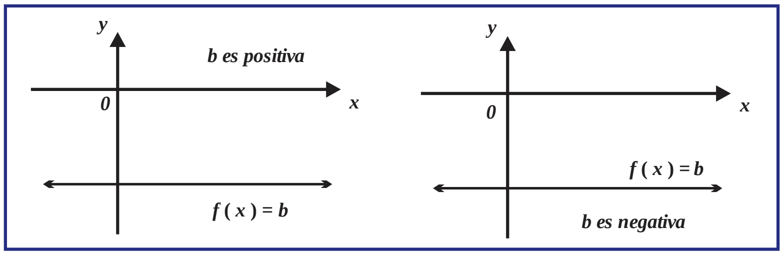


FIGURA 1.7

b. La función lineal, su regla de correspondencia puede escribirse como $f(x)=mx+b$ dónde m y b son números reales. $m\neq 0$ e $img(f)=IR$, vea la *figura 1.8.*

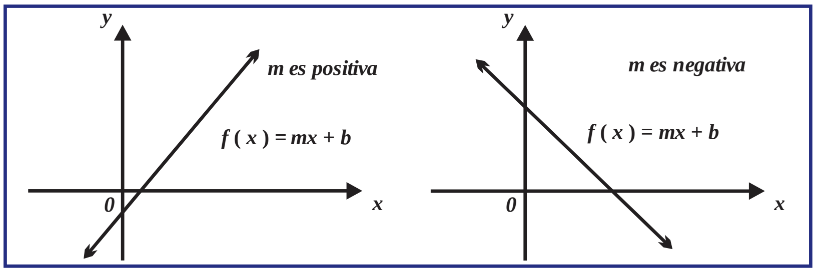
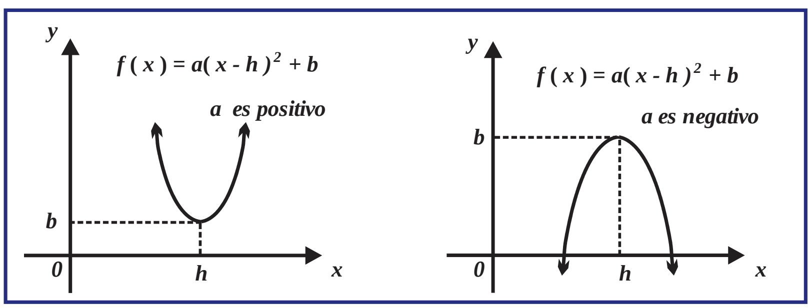


FIGURA 1.8

c. La función cuadrática con regla de correspondencia $f(x)=a(x-h)^2+c$ donde a, h y c son números reales y $a\neq 0$, tiene asociada una curva llamada parábola. En el primer caso $dom(f)=IR$ y conjunto imagen $img(f)=[b,+\infty)$, vea la *figura 1.9*.a. En el segundo caso $dom(f)=IR$ y conjunto imagen $img(f)=(-\infty,b]$, vea la *figura 1.9.b.*



a. b.

FIGURA 1.9

□

Utilizando la representación gráfica de la función f, es posible (entre otras cosas) determinar su dominio y su imagen (recorrido o rango), esto se consigue "proyectando los puntos $(x, f(x))$ de la curva en los ejes coordenados", así, el intervalo que genera la proyección de la curva asociada a f sobre el eje x es el dominio de f, y el intervalo generado al proyectar la curva asociada a f sobre el eje y es el recorrido (o rango) de la función, vea la *figura 1.10.*

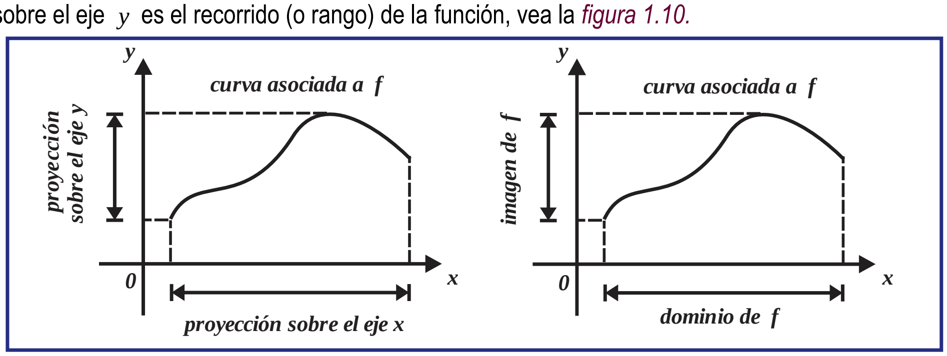


FIGURA 1.10

EJEMPLO 1.11 (Dominio e imagen utilizando la curva asociada a una función)
En cada caso, la curva corresponde a una función, proyectando sobre los ejes coordenados se obtiene el dominio y el recorrido, mismos que luego son representados en términos de intervalos.

a. $dom(f)=[-8,8]$, imagen (recorrido o rango) es el intervalo $img(f)=[0,8]$.

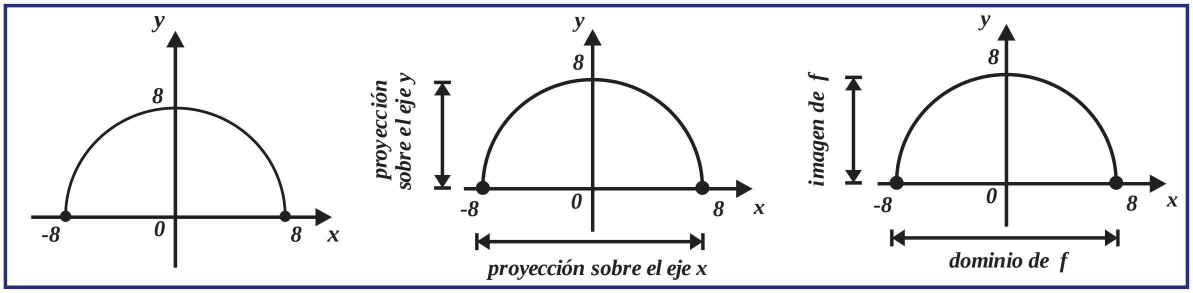


FIGURA 1.11

b. $dom(f)=(-4,5)$ e imagen (recorrido o rango) $img(f)=(-2,5)$.

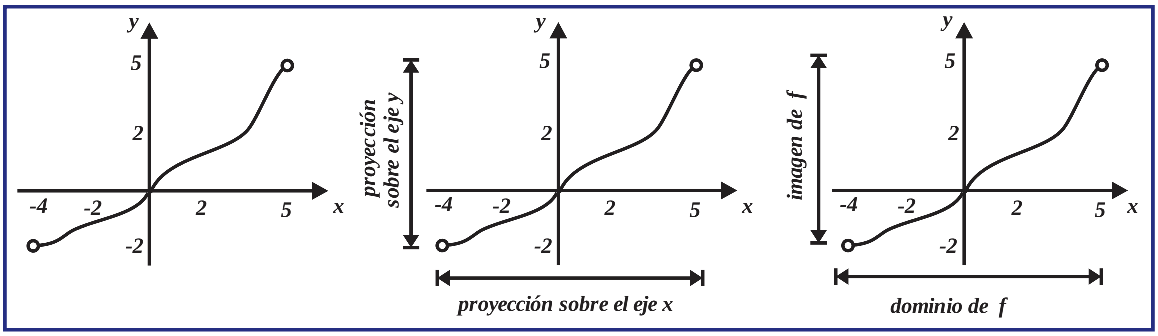


FIGURA 1.12

c. $dom(f)=[-14,12]$ e imagen $img(f)=[-4,8]$.

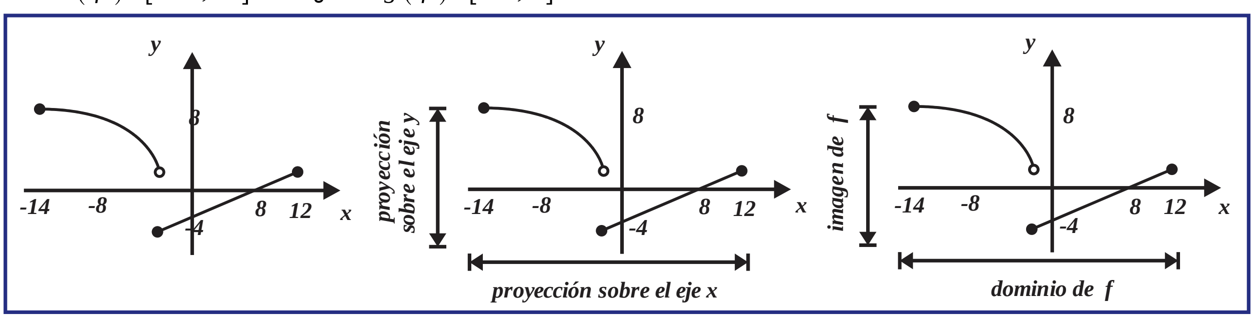


FIGURA 1.13

□

No todas las relaciones entre dos variables (numéricas) corresponden a funciones (recuerde que en una función, a cada elemento de su dominio le corresponde una única imagen).

EJEMPLO 1.12 (Relaciones que no son funciones)

a. La relación entre las variables x y y dada por $(y-1)^2=3(x-2)$, por ejemplo, si asignamos a la variable x el valor de 3 obtenemos $y=1\pm\sqrt{3}$, es decir, le corresponden dos imágenes.

b. La relación entre las variables x y y dada por $x^2+y^2=25$, no es una función puesto que: si $x=3$ obtenemos $3^2+y^2=25$, de donde $y=-4$ y $y=4$, es decir le corresponden dos imágenes.

□

La representación gráfica de una relación entre dos variables resulta ser un elemento (herramienta) para decidir si una curva pertenece o no pertenece a una función. Si en la representación gráfica de una relación, desplazamos una línea recta a través del dominio y sólo interseca a su curva asociada en un único punto, entonces pertenece a una función. Esta característica fundamenta la *"prueba de la recta vertical"* para identificar curvas asociadas a funciones, vea la *figura 1.14*.

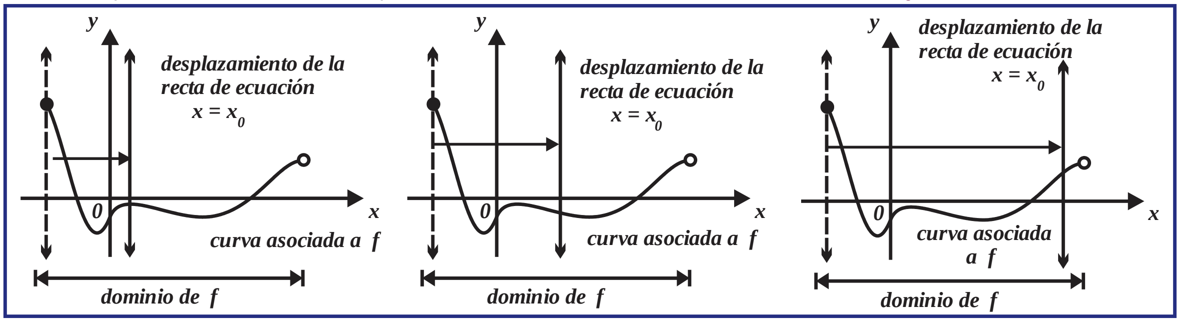


FIGURA 1.14

ALGORITMO 1.1

RECONOCIMIENTO DE LA CURVA ASOCIADA A UNA FUNCIÓN
"Una curva, en el plano cartesiano, corresponde a una función si y sólo si cualquier recta de ecuación de la forma $x = x_0$, para x_0, en el dominio de la función, interseca a la curva asociada a f en sólo un punto".

En la curva de la izquierda de la *figura 1.15*, la recta de ecuación $x = x_0$ interseca a la curva asociada a la relación R en los puntos (x_0 , y_0) y (x_0 , y_1), en consecuencia la curva no corresponde a una función. En la curva de a derecha de la *figura 1.15* imagine que la recta vertical de ecuación $x = x_0$ es móvil y que es posible desplazarla sobre todo dominio de R, observe que conforme es desplazada sólo la interseca a la curva en un solo punto (el punto (x_0 , y_0)), en consecuencia la relación R es una función.

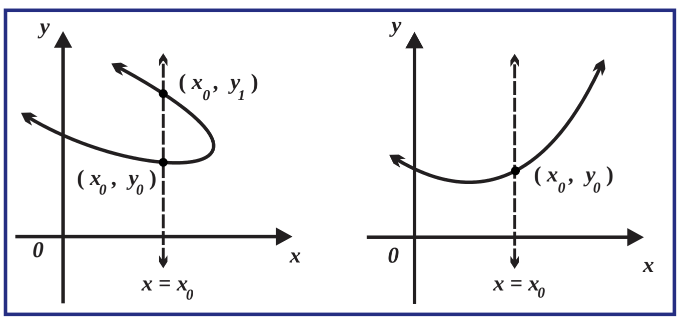


FIGURA 1.15

El *ejemplo 1.13* muestra la forma de uso del *algoritmo 1.1*.

EJEMPLO 1.13 (Identificación de curvas asociadas a funciones)
a. En la *figura 1.16*., si desplazamos la recta vertical de ecuación $x = x_0$ a lo largo del eje de las abscisas sólo interseca a la curva asociada a f en un punto, por tanto las curvas pertenecen a funciones.

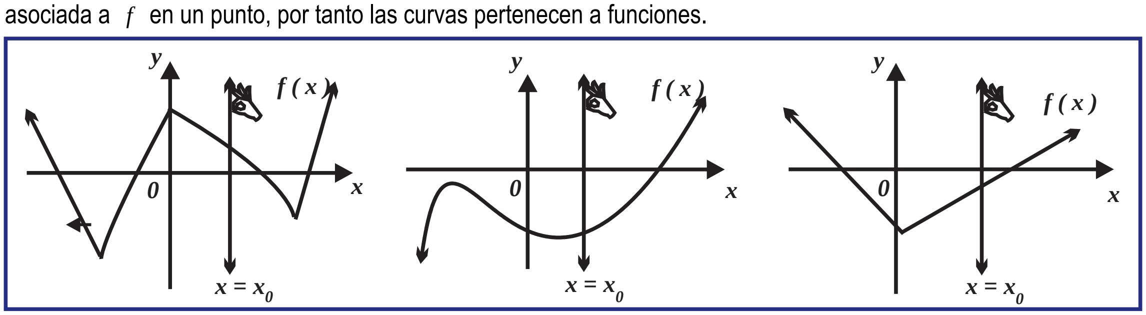


FIGURA 1.16

b. En la *figura 1.17*., si desplazamos la recta vertical de ecuación $x = x_0$ a lo largo del eje de las abscisas, interseca a la curva asociada a f en más de un punto, por tanto las curvas no pertenecen a funciones.

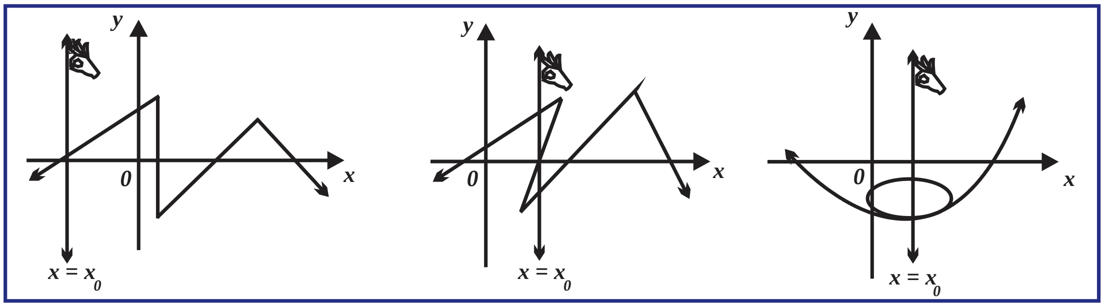


FIGURA 1.17

¿Qué conceptos aprendí?

PARA COMPLETAR

1. A una variable a la que le son asignados números se denomina ______________________________.

2. Los elementos de una función real de variable real son ____.

3. El dominio de una función son aquellas asignaciones a la variable independiente de manera que ________________________________ tiene sentido.

4. Un intervalo es _______________________________________ de números reales.

5. Los intervalos de números reales se clasifican en las tres siguientes categorías: _________________________________ ____.

6. Una ____________________________ es una asignación a la variable independiente.

7. El conjunto imagen también se denomina ____________________________ o ______________________________.

8. Si la curva asociada a una función se proyecta sobre el eje de las abscisas, esta proyección coincide con _________________________________ de la función.

CIERTO O FALSO (Justifique su respuesta)

1. Una función puede tener dominio sin asignaciones.

2. Dos funciones con el mismo dominio son iguales.

3. Dos funciones con la misma regla de correspondencia son iguales.

4. Una función también se denomina variable dependiente.

5. La gráfica de una función es una figura.

6. Una función también se denomina variable independiente.

7. El conjunto imagen de una función también se denomina rango de la función.

8. Los intervalos de números de la recta real, son abiertos o son cerrados.

9. El dominio de una función siempre es un intervalo.

10. Si una recta vertical que se desplaza a lo largo de una curva la “corta” a esta siempre en en un solo punto, entonces la relación entre las dos variables involucradas se denomina función.

11. Si la curva asociada a una función se proyecta sobre el eje de las ordenadas, la proyección es el dominio de la función.

PROBLEMAS PROPUESTOS 1.1

1. (Volumen de un envase)
Se desea construir un envase cilíndrico de manera que la razón de la altura al radio sea 4.
a. Determine la función que describe el volumen del envase en términos del radio (regla de correspondencia y dominio).
b. Determine la función que describe el volumen del envase en términos de la altura (regla de correspondencia y dominio).

2. (Volumen de una caja)
Se quiere construir un caja con forma de un prisma rectangular, sí el largo debe ser el doble que el ancho y la altura el doble que el largo.
a. Determine la función que describe el volumen de la caja en función de la longitud del ancho.
b. Determine la función que describe el área de la caja en función de la longitud del ancho.
c. Determine la función que describe la longitud de una de las diagonales en función de la longitud del ancho.

3. (Rectángulo circunscrito)
Un rectángulo está limitado por el eje x y la semicircunferencia de ecuación $x^2+y^2=9$ con $0\le y\le 3$.
a. Determine la función que describe el área del rectángulo como en términos de su base (regla de correspondencia y dominio).
b. Determine la función que describe el área del rectángulo como función de su la altura (regla de correspondencia y dominio).

4. (Longitud de un paquete)
Un servicio de paquetería tiene como norma sólo enviar paquetes en forma de prisma cuadrangular (ortoedro) que cumplen con la condición: altura de 30 centímetros y el largo del paquete más la suma del perímetro de la sección transversal es de 1.2 metros.
a. Trace una figura adecuada.
b. Determine la función que describe el volumen del paquete como función de la longitud del largo del paquete (regla de correspondencia y dominio).
c. Determine la función que describe el área del paquete como función del ancho del paquete (regla de correspondencia y dominio).

5. (Escalas de temperatura)
Se han inventado muchos instrumentos para medir la temperatura de forma precisa. Todo empezó con el establecimiento de una escala de temperaturas. Una escala de temperaturas asigna un número (en grados) a cada medida de temperatura. Las escalas de temperatura de mayor uso son las denominadas: Fahrenheit, Celsius y la Kelvin. Como se presenta en la siguiente tabla, estas escalas proporcionan diferentes lecturas para un mismo fenómeno específico.

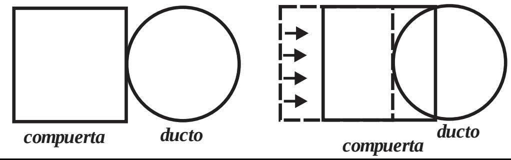
	$°F$	$°C$	$°K$
El agua hierve a	212	100	373
Temperatura ambiente	72	23	293
El agua se congela a	32	0	273
Cero absoluto	–460	–273	0

a. Determine la función que describe la temperatura en grados $°F$ en términos de grados $°C$.
b. Determine la función que describe la temperatura en grados $°C$ en términos de grados $°F$.
c. Determine la función que describe la temperatura en grados $°K$ en términos de grados $°F$.
d. Determine la función que describe la temperatura en grados $°K$ en términos de grados $°C$.

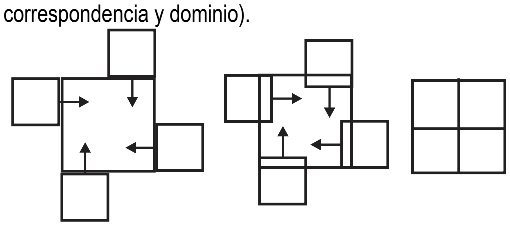
6. (Hoja cuadrada)
Se cortan las esquinas de una hoja cuadrada de lado 10 unidades, las esquinas cortadas son "triángulos isósceles en los que la longitud de los lados iguales mide x unidades.
a. Trace la figura adecuada.
b. Determine la función que describe el área de las esquinas recortadas como función de x (regla de correspondencia y dominio).
c. Determine la función que describe el área de la región que queda al ser recortadas las esquinas (regla de correspondencia y dominio).

7. (Puerta de un elevador)
Un elevador tiene entrada rectangular y las dimensiones de sus lados son 2 metros de base y 3.5 metros de altura, las puertas también son rectangulares y se abren del centro hacia afuera y se cierran de los extremos al centro (vea la figura).
a. Determine la función que describe el área libre en la entrada del elevador, en función de la distancia entre las puertas, representada por x, cuando éstas se abren (regla de correspondencia y dominio).
b. Determine la función que describe el área cubierta por las puertas, cuando cada una de ellas se ha desplazado x metros (regla de correspondencia y dominio).

8. (Compuerta circular)
a. Un ducto tiene forma circular y su radio mide 4 unidades. La compuerta que lo cierra es cuadrada y se desplaza horizontalmente a través del ducto (vea la figura anexa). Nota: área de un segmento circular $A=\frac{1}{2}\left(x-\operatorname{sen}x\right)r^2$, x en radianes.
b. Determine la función que describe el área cubierta del ducto por la compuerta una vez que esta se ha desplazado x unidades.
b. Determine la función que describe el área libre del ducto cubierta por la compuerta una vez que esta se ha desplazado x unidades.



9. (Ducto y compuerta)
La sección transversal de un ducto tiene forma cuadrada y su lado mide 10 unidades. La compuerta que lo cierra lo hace a partir de las esquinas, tal como lo muestra la siguiente figura.
a. Determine la función que describe el área cubierta por la compuerta del ducto conforme se desplazan sus partes (regla de correspondencia y dominio).
b. Determine la función que describe el área descubierta por la compuerta del ducto conforme se desplazan sus partes (regla de correspondencia y dominio).



10. El Ingeniero Pérez gerente de la compañía "*Gas Butano S.A. de C.V.*", desea construir un tanque de acero para almacenar gas L. P. El tanque tiene forma de cilindro circular recto de 12 metros de largo con una semiesfera en cada base. Él desea controlar el volumen del tanque proporcionando valores al radio.
Exprese el volumen del tanque en función del radio.

11. Un ingeniero en diseño desea construir una bacinica efectuando una oquedad semiesférica sobre un bloque en forma prisma cuadrangular de base cuadrada de lado con longitud de lado de 40 centímetros y altura de 20 centímetros.
Exprese la capacidad de la bacinica en función del radio de la semiesfera.

12. Se desea construir un silo (almacén) en forma de cilindro circular recto de 20 metros de altura coronado con un cono en la parte superior, suponga que la altura del cono mide el doble que su radio.
a. Exprese el volumen del silo en función del radio de la base de la parte cónica.
b. Exprese el volumen del silo en función de la altura de la parte cónica.

13. Determine la relación que proporciona la distancia de los puntos de la parábola de ecuación $y = 16 - x^2$ al punto $(6, 18)$ en función de x.

14. Determine la función que proporcione la distancia de la semi circunferencia positiva de ecuación $x^2 + y^2 = 25$ al punto $(6, 16)$ en función de x.

15. Una caja, sin tapa, se construye recortando un pequeño cuadrado de cada esquina de una hoja de aluminio que mide 90 por 180 centímetros y luego doblando hacia arriba los lados. ¿Cuál es la función que describe el volumen de la caja?

16. ¿Es posible que y sea función de x? Explique.
a. $y =$ Calificación final de un curso.
$x =$ Número de horas de estudio.
b. $y =$ Probabilidad de contraer cáncer pulmonar.
$x =$ Número de cigarrillos fumados al día.
c. $y =$ Peso de una persona.
$x =$ Cantidad de comida consumida al día.
d. $y =$ Tiempo transcurrido en el transporte de casa a la escuela. $x =$ hora de salida.

17. Determine una relación que describa cada función y luego calcule $f(2)$.
a. Cinco veces x.
b. Tres veces x más dos.
c. El cubo de x más uno.
d. La longitud del perímetro de un cuadrado de lado de longitud x.
e. El perímetro de un rectángulo de base de longitud 5 y altura de longitud h.

18. Determine las imágenes indicadas para la función.
a. $f(x) = x^2 - 2x - 2$; $f(0)$, $f(2)$, $f(-3)$, $f\left(\frac{1}{8}\right)$.
b. $f(p) = \sqrt{p+3}$; $f(2)$, $f(-2)$, $f(-3)$.
c. $f(w) = w^2 - w - 1$; $f(-1)$, $f(2)$, $f(-3)$, $f\left(\frac{1}{2}\right)$.
d. $g(z) = \dfrac{z+3}{z-3}$; $g(-4)$, $g(2)$, $g(-3)$, $g\left(\frac{2}{5}\right)$.
e. $f(x) = \dfrac{x}{1-x}$; $f(-1)$, $f(-3)$, $f(4)$, $f\left(-\frac{1}{7}\right)$.
f. $f(x) = \sqrt{2x-1}$; $f(1)$, $f(2)$, $f(-3)$.
g. $f(x) = \dfrac{1}{x}$; $f(10)$, $f(100)$, $f(-5)$.

19. Sea $f(u) = u^2 + u$, determine y simplifique.
a. $f(4) - f(2)$.
b. $f(u) - f(5)$.
c. $\dfrac{f(u) - f(2)}{u-2}$.
d. $\dfrac{f(u+h) - f(h)}{h}$.

20. Sea $f(u) = u^2 + u$, determine y simplifique.
a. $f(-2)$.
b. $f(2x)$.
c. $f(x^2)$.
d. $f(1-x)$.
e. $f(\sqrt{a})$.
f. $f(a+b)$.

21. Determine el dominio.
a. $f(x) = 5x - 2$.
b. $f(x) = 5$.
c. $f(x) = 1 - 6x^2$.
d. $f(x) = -3x + 1$.
e. $f(x) = \sqrt{x-6}$.
f. $f(x) = \sqrt{x+12}$.
g. $f(x) = \sqrt{1-x}$.
h. $f(x) = \sqrt{1-5x}$.
i. $f(x) = \dfrac{x^2}{1+x}$.
j. $f(x) = \dfrac{3}{2x-8}$.
k. $f(x) = \dfrac{2x}{(x+3)(x-4)}$.
l. $f(x) = \dfrac{x+1}{(x-4)(x+1)}$.

m. $f(x)=\dfrac{x+1}{x^2-9}$.

o. $f(x)=\dfrac{1}{(x-2)^2}$.

n. $f(x)=\dfrac{2x+16}{x^2+6x+5}$.

p. $f(x)=\dfrac{1}{x^2+2x+20}$.

ñ. $f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$.

q. $f(x)=\dfrac{x}{x(x-5)}$.

22. Dibuje en el plano cartesiano las curvas asociadas a las relaciones. ¿Es y función de x ?

a. $y=5x-2$.

f. $y-2x-4=0$.

b. $y=5$.

g. $y=-x^2+5$.

c. $y=\dfrac{1}{2}x^2$.

h. $x^2+y^2=16$.

d. $x=-6$.

i. $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}=1$.

e. $x^2+y=0$.

23. Determine el dominio y dibuje la curva correspondiente.

a. $f(x)=\dfrac{x}{x}$.

d. $i(x)=\dfrac{x^2+2x+1}{x+1}$.

b. $g(x)=\dfrac{3x+1}{3x+1}$.

e. $k(x)=\dfrac{x^2-4x+4}{x-2}$.

c. $h(x)=\dfrac{x^2-1}{x+1}$.

24. Determine el dominio, la imagen y dibuje la curva correspondiente.

a. $f(x)=x^2+3$.

d. $i(x)=-x^2-1$.

b. $g(x)=-x^2+5$.

e. $k(x)=\dfrac{1}{4}x^2$.

c. $h(x)=x^2-2$.

25. Trace la curva correspondiente sobre el intervalo indicado.

a. $f(x)=x^2+3$, $[0,5]$.

b. $g(x)=-x^2+5$, $[-3,3]$.

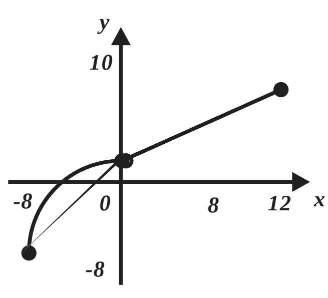
c. $h(x)=x^2-2$, $[-8,1]$.

d. $i(x)=-x^2-1$, $[3,6]$.

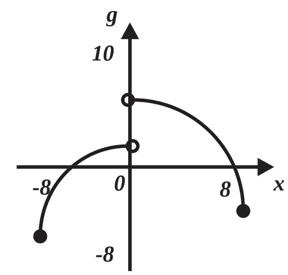
e. $k(x)=\dfrac{1}{4}x^2$, $[-2,8]$.

26. Obtenga la imagen correspondiente, el dominio, el recorrido y las imágenes indicadas.

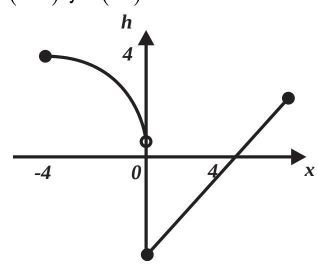
a. $y(0)$, $y(14)$ y $y(-8)$. $g(0)$, $g(10)$ y $g(-8)$.



b. $y(0)$, $y(14)$ y $y(-8)$. $g(0)$, $g(10)$ y $g(-8)$.



c. $i(-4)$, $i(10)$ y $i(0)$.



27. Igualdad de funciones.
¿Bajo qué condiciones $f(x)=g(x)$?

a. $f(x)=\dfrac{x^3+x}{x}$ y $g(x)=x^2+1$.

b. $f(x)=\dfrac{3x-6}{x-2}$ y $g(x)=3$.

c. $f(x)=x-5$ y $g(x)=\dfrac{x^2-8x+15}{x-3}$.

d. $f(x)=\dfrac{3x^2}{x}$ y $g(x)=3x$.

e. $f(x)=\dfrac{1}{x-1}$ y $g(x)=\dfrac{x+1}{x^2-1}$.

f. $f(x)=\dfrac{x^2+2x+1}{x+1}$ y $g(x)=x+1$.

28. Considere un triángulo equilátero cuyo lado tiene longitud de x unidades. Construya la función que describe el área en términos de la longitud de la altura.

29. Se inscribe un triángulo rectángulo en una circunferencia de radio x unidades. Determine la función que describe el comportamiento del área del triángulo en función de la longitud del radio de la circunferencia (suponga que la hipotenusa coincide con un diámetro).

30. Se inscribe un rectángulo en una circunferencia de radio de longitud r unidades. Determine la función que describe el comportamiento del área del rectángulo en función de la longitud de uno de los lados del rectángulo.

31. Determine la función que describe el área de la región limitada por:

a. El eje x, el eje y, la recta de ecuación $y=8$ y la recta vertical de ecuación $x=t$ con $t>0$.

b. El eje x, el eje y, la recta de ecuación $y=x+1$ y la recta vertical de ecuación $x=t$ con $t>0$.

c. El eje x, la recta de ecuación $y=x+1$ y las rectas verticales con ecuaciones $x=2$ y $x=t$ con $t>0$.

32. Determine la función que describe la longitud de un arco de circunferencia, de radio 6, en términos del ángulo subtendido por el arco.

33. Determine la función que describe el área de un sector circular de radio 6, en términos del ángulo subtendido por el arco correspondiente.

34. ¿Son iguales los pares de funciones? Explique su respuesta.

a. $f(x)=\frac{x^2+x}{x^2+1}$ y $g(x)=x$.

b. $f(x)=\sqrt{x}$ y $g(x)=\frac{x}{\sqrt{x}}$.

c. $f(x)=\frac{\sqrt{x}}{x}$ y $g(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$.

d. $f(x)=\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}$ y $g(x)=\frac{x^2+1}{x\sqrt{x^2+1}}$.

e. $f(x)=\sqrt{x^4+x^2}$ y $g(x)=x\sqrt{x^2+1}$.

f. $f(x)=\sqrt{x^4-x^2}$ y $g(x)=x\sqrt{x^2-1}$

AUTOEVALUACIÓN

1. ¿Cuáles son las partes que componen a una función real de variable real? ¿En qué consisten?

2. Proporcione ejemplos de funciones que se encuentran en situaciones de la vida real.

3. Explique, ¿por qué dos funciones con la misma regla de correspondencia pueden ser diferentes?

4. ¿Qué otros nombres recibe el conjunto imagen de una función?

5. Destaque la diferencia entre la gráfica de una función y la curva asociada a una función.

6. ¿En qué consiste la regla para determinar si una curva pertenece o no pertenece a una función?

7. Determine el dominio y expréselo en términos de intervalos.

a. $f(x)=\frac{x-1}{x}$. **b.** $f(x)=\frac{2x+3}{4x+6}$. **c.** $f(x)=\frac{x}{x^2+1}$. **d.** $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x}}$. **e.** $f(x)=\frac{2x}{\sqrt{x}}$.

8. Dibuje la gráfica de una función de manera que:

a. Su dominio sea el intervalo $[1,5]$ y su conjunto imagen el intervalo $[-3,6]$.

b. Su dominio sea el intervalo $[1,5]$ y su conjunto imagen el intervalo $[-3,6]$.

9. Construya una función de forma que:

a. Su dominio sea el intervalo $[-2,10]$ y su conjunto imagen el intervalo $[-6,30]$.

b. Su dominio sea el intervalo $dom(f)=(-\infty,2)\cup(2,+\infty)$ y su conjunto imagen el intervalo $dom(f)=(-\infty,3)\cup(3,+\infty)$.

c. Su dominio sea el intervalo $dom(f)=(-\infty,0)\cup(0,4)\cup(4,+\infty)$ y su conjunto imagen el intervalo $dom(f)=(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$.

1.2 FUNCIONES POLINOMIALES Y PROPIEDADES

APRENDIZAJES

En el estudio de la presente sección usted:

3. Comprenderá el significado de la notación funcional y lo utilizará para representar y evaluar funciones polinomiales.

4. Aplicará la división sintética, el teorema del residuo, el teorema del factor y su recíproco para determinar los ceros de f y su gráfica.

5. Construirá una función polinomial a partir de las raíces reales de su ecuación y bosquejará su gráfica.

6. A partir de una función polinomial calculará los ceros y realizará su gráfica.

Las funciones polinomiales se utilizan frecuentemente en la modelación y estudio de situaciones relacionas con nuestro entorno, por ejemplo, en problemas que involucran volúmenes de estructuras (arquitectónicas, de máquinas, esculturas, etc.) y problemas de resistencia de materiales, entre otros. También con base en ellas pueden ser definidas otro tipo de funciones (como las racionales, las exponenciales y las logarítmicas), suelen utilizarse para aproximar valores (concretamente imágenes) de funciones trigonométricas y de funciones algebraicas. Las funciones polinomiales reciben este nombre puesto que su regla de correspondencia es un polinomio.

Definición 1.5 (FUNCIÓN POLINOMIAL)

$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x^1 + a_0$ es la regla de correspondencia de una función polinomial en la variable x, y se caracteriza por:

a. n es un número entero positivo, es la mayor de las potencias de la variable x, y también es el grado de la función.

b. $a_n,\ a_{n-1},\ \ldots,\ a_3,\ a_2,\ a_1,\ a_0$, donde $a_n \neq 0$ son números reales y se denominan coeficientes.

c. $a_nx^n,\ a_{n-1}x^{n-1}, \cdots,\ a_3x^3,\ a_2x^2,\ a_1x$ y a_0 son los términos de la función polinomial.

d. a_nx^n es el término dominante y a_0 es el término independiente.

e. Su dominio son todos los números reales o una parte de ellos.

En la práctica, en $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x^1 + a_0$ se aplican las simplificaciones:

Se escribe: a_0 en lugar de a_0x^0, x y no x^1, x^n por $1x^n$ y no se escriben los términos con coeficiente cero. Vea el *ejemplo 1.14*.

EJEMPLO 1.14 (Funciones polinomiales y características)

	Regla de correspondencia	Variable	Términos	Grado	Coeficientes
a.	$p(x) = x^4 + x^2 - 10x + 25$	x	x^4, x^2, $-10x$ y 25	4	$1,\ 1,\ -10,\ 25$.
b.	$g(z) = z^3 - 460z^2 + 1200z$	z	$4z^3$, $-460z^2$ y $1200z$	3	$4,\ -460,\ 1200$.
c.	$h(w) = \frac{1}{2}w^6 - 13$	w	$\frac{1}{2}w^6$ y -13	6	$\frac{1}{2},\ -13$.
d.	$i(r) = r^4 - \dfrac{1}{3}r$	r	r^4 y $-\frac{1}{3}r$	4	$1,\ -\frac{1}{3}$.
e.	$k(s) = -5s + 9$	s	$-5s$ y 9	1	-5, 9.

□

Las funciones polinomiales tienen como dominio a todos los números reales ($dom(p) = IR$), lo que garantiza (junto con algunas otras de sus propiedades que se estudian en otro tipo de cursos) que la curva que tienen asociada es suave y no presenta "saltos" y/o "picos".

¡Si se redefine el dominio de una función polinomial es posible que no se cumplan una o más de las observaciones del párrafo anterior!

PARA REFLEXIONAR

¿? Clasifique y determine los características de una función cuadrática en el contexto de las funciones polinomiales.

En la *figura 1.18*, solo las curvas mostradas en *los incisos a. y b.* pueden asociarse a un funciones polinomiales (en la función correspondiente asociada a la curva *del inciso b.* se ha prescindido de un número del dominio).

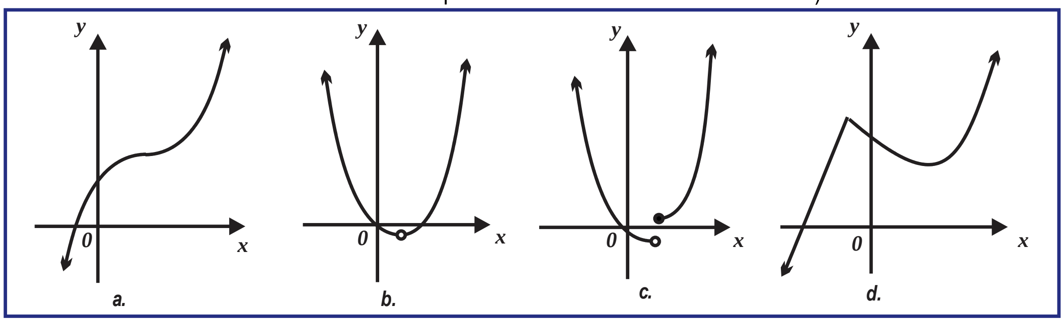


FIGURA 1.18

Como lo señalamos en la sección previa, para obtener la imagen asociada a la asignación $x = x_0$ bajo la función de regla de correspondencia f , basta calcular $f\,(x_0)$.

□ **EJEMPLO 1.15** (Imágenes bajo funciones polinomiales)

a. La imagen de $x=5$ bajo $p\,(x)=x^4-10x-25$ es $p\,(5)=5^4-10(5)-25=550$.

b. La imagen de $x=0$ bajo $p\,(x)=2x^3-10x-2$ es $p\,(0)=-2$.

□

A continuación estableceremos algunos de los elementos teórico – prácticos imprescindibles en el trazo de la curva asociada a una función polinomial. Los puntos en los que la curva asociada a una función polinomial cruza a los ejes coordenados presentan gran utilidad en su caracterización, la fundamentación teórica de la existencia de estos puntos se basa en la propiedad del valor intermedio, esta propiedad afirma:

Si a la variable x le son asignados todos los números desde a hasta b $(a<b)$, entonces la función f asume todas las imágenes comprendidas entre $f\,(a)$ y $f\,(b)$, vea la *figura 1.19*.

Bajo una función polinomial p , la imagen de un intervalo cerrado es un intervalo cerrado.

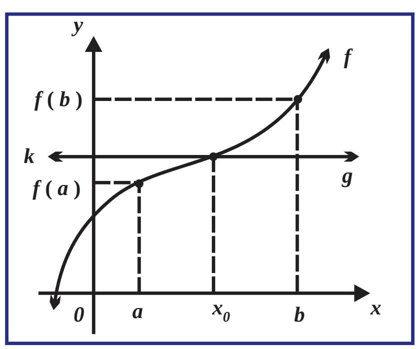


FIGURA 1.19

Así, la curva asociada a la función polinomial f con dominio en el intervalo cerrado $[\,a\,,\,b\,]$, interseca al menos una vez a todas las rectas horizontales de ecuación $g\,(x)=k$ donde $f\,(a)<k<f\,(b)$, en la *figura 1.20*, la propiedad del valor intermedio garantiza la existencia de los números x_{01} y x_{02} .

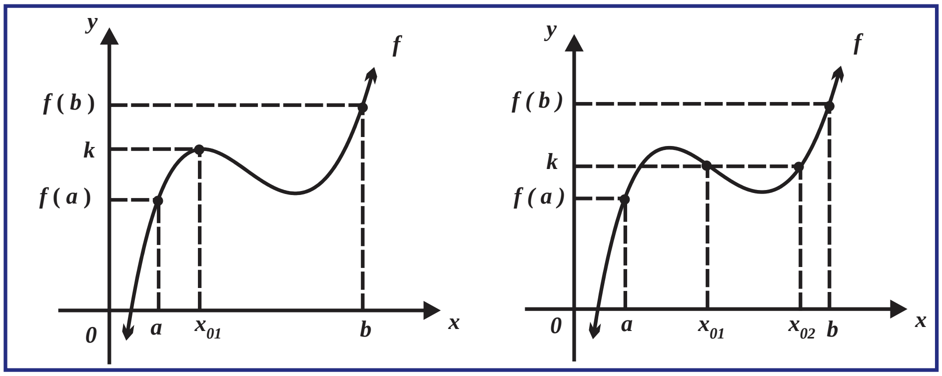


FIGURA 1.20

□ **EJEMPLO 1.16** (Intersección de curvas asociadas a funciones polinomiales)

a. Los puntos de intersección de las curvas de las funciones $g(x)=3$ y $f(x)=x^4+x^2+3$, se obtienen resolviendo la ecuación $x^4+x^2+3=3$. Simplificamos y factorizamos la ecuación $x^4+x^2+3=3$ y obtenemos $x^2(x^2+1)=0$, así la única solución real es $x=0$, La curva asociada a $p(x)=x^4+x^2+3$ interseca a la recta de ecuación $f(x)=3$ en el punto $I(0,3)$.

b. Los puntos en que se intersecan las curvas asociadas a las funciones $g(x)=1$ y $p(x)=x^3-2x^2-x+3$, son las soluciones de la ecuación $x^3-2x^2-x+3=1$, ecuación que es equivalente a $x^3-2x^2-x+2=0$, y que tiene como soluciones a los números $x=1$, $x=-1$ y $x=2$. Los puntos de intersección de ambas curvas se obtienen calculando las imágenes de las raíces, observe que $f(1)=1$, $f(-1)=1$ y también que $f(2)=1$, por tanto los puntos de intersección de las curvas son $I_1(1,1)$, $I_2(-1,1)$ e $I_3(2,1)$.

USO DE SOFTWARE DE MATEMÁTICAS

Verifique los resultados anteriores.

□

Un caso particular de la propiedad del "valor intermedio", se da cuando $g(x)=k=0$, es decir, cuando la curva asociada a la función $g(x)=k=0$ coincide con el eje x. Si f es una función polinomial con dominio en el intervalo cerrado $[a,b]$, las imágenes $f(a)$ y $f(b)$ tienen signos opuestos, entonces una de las funciones $g(x)=k$ es cero, vea la *figura 1.21*. Los números x_0, x_{01} y x_{02} en (a,b), *mostrados en la figura 1.21* son de gran utilidad en el trazo de la gráfica de una función polinomial y se denominan "ceros".

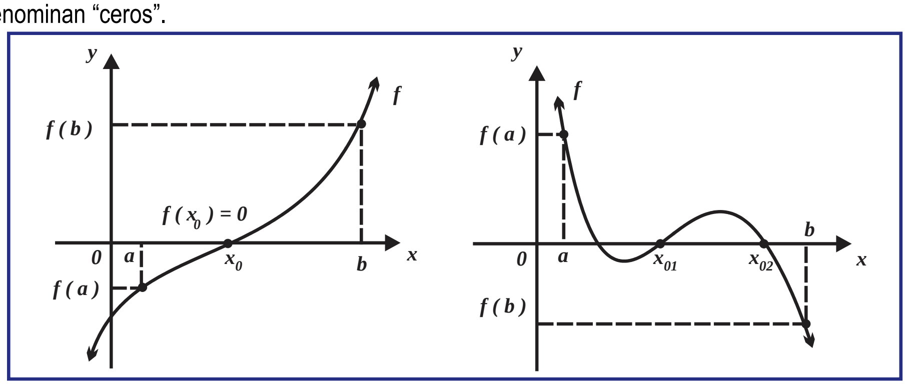


FIGURA 1.21

Definición 1.6 (CEROS Y RAÍCES)

Sean: la función polinomial $p(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$ y x_0 un número real tal que $p(x_0)=0$, entonces:

a. x_0 se denomina cero real (o simplemente cero) de p.

b. Si x_0 es tal que si al ser sustituido en la ecuación $a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0=0$ genera una identidad, se denomina raíz.

¡Los ceros (reales) se refieren a los números reales en que la curva asociada a una función interseca al eje de las abscisas!
¡Las raíces se refieren a las soluciones de la ecuación que se obtiene al igualarla regla de correspondencia de una función a cero!

En la *figura 1.22* los números x_{01}, x_{02}, x_{03} y x_{04} son los ceros de la función $p(x)=a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1 x + a_0$. Los puntos $A(x_{01}, 0)$, $B(x_{02}, 0)$, $C(x_{03}, 0)$ y $D(x_{04}, 0)$ son las intersecciones de la curva asociada a $p(x)=a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1 x + a_0$ con el eje x.

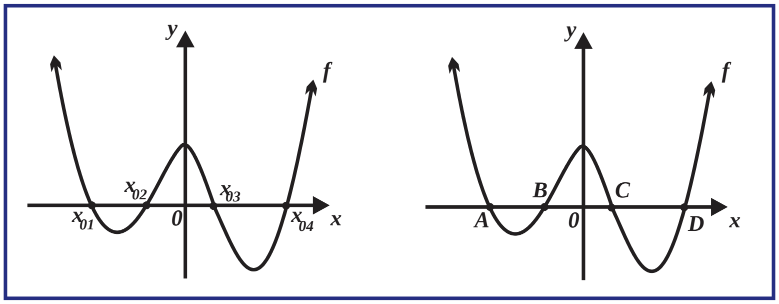


FIGURA 1.22

PARA REFLEXIONAR

¿? Proporcione una función cuadrática que carezca de ceros.

EJEMPLO 1.17 (Ceros y raíces)

a. Sea la función polinomial $p(x)=x^3+x^2-4x-4$:

i. Si igualamos a cero la regla de correspondencia obtenemos la ecuación polinomial $x^3+x^2-4x-4=0$, misma que es equivalente a $(x-2)(x+2)(x+1)=0$, y en consecuencia sus raíces son $x=2$, $x=-2$ y $x=-1$.

ii. Los ceros de $p(x)=x^3+x^2-4x-4$, son las raíces de $x^3+x^2-4x-4=0$, es decir $x=2$, $x=-2$ y $x=-1$.

iii. la curva correspondiente interseca al eje x en los puntos $I_1(2, 0)$, $I_2(-2, 0)$ e $I_3(-1, 0)$.

b. Sea la función polinomial $p(x)=6x^3-x^2-12x$.

i. Las raíces de $6x^3-x^2-12x=0$ son: $x=0$, $x=\frac{3}{2}$ y $x=-\frac{4}{3}$ (verifíquelo).

ii. $p(x)=6x^3-x^2-12x$ tiene ceros en $x=0$, $x=\frac{3}{2}$ y $x=-\frac{4}{3}$, puesto que $p(0)=0$, $p\left(\frac{3}{2}\right)=0$ y $f\left(-\frac{4}{3}\right)=0$.

iii. La curva asociada a $p(x)=6x^3-x^2-12x$ interseca al eje x en $I_1(0, 0)$, $I_2\left(\frac{3}{2}, 0\right)$ e $I_3\left(-\frac{4}{3}, 0\right)$.

USO DE SOFTWARE DE MATEMÁTICAS

Verifique los resultados anteriores.

□

Otra propiedad de gran utilidad en el trazo de la gráfica de una función polinomial es el punto en que interseca al eje y. La asignación $x=0$ genera el punto $I_y(0, a_0)$ en la función polinomial $p(x)=a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_2x^2+a_1 x + a_0$, este punto representa en plano cartesiano la intersección de la curva asociada a f con el eje y (eje de las ordenadas), vea la *figura 1.23*.

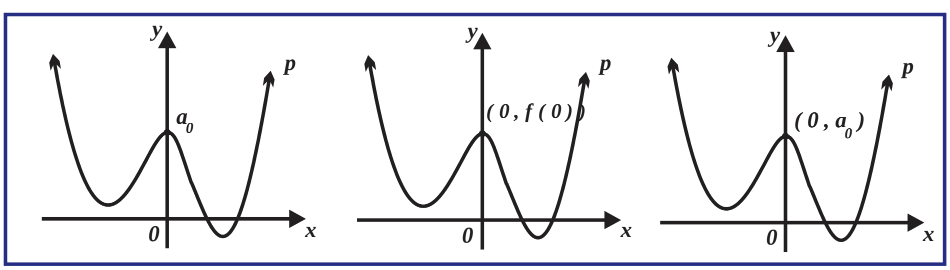


FIGURA 1.23

¡La intersección de la curva asociada a $p(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$ con el eje "y", es el punto $I_y\ (0\ ,\ a_0)$!

EJEMPLO 1.18 (Intersección con el eje "y")

a. La ordenada del punto, donde la curva asociada a $p(x)=x^4+x^2-10x+25$ interseca al eje "y", es $p(0)=(0)^4+(0)^2-10(0)+25=25$, el punto de intersección es $I_y\ (0\ ,\ 25)$.

b. Si $g(z)=z^3-460z^2+1200z-2$, entonces $a_0=-2$ y la curva asociada a ésta función interseca al eje "y" en $I_y\ (0\ ,\ -2)$.

c. La ordenada del punto en donde la curva asociada a $i(r)=r^4-\frac{1}{3}r$ interseca al eje "y" es $i(0)=(0)^4-\frac{1}{3}(0)=0$, el punto de intersección es $I_y\ (0\ ,\ 0)$.

d. Si $k(s)=s^3-5s+9$, entonces $a_0=9$, entonces la curva correspondiente interseca al eje "y" en $I_y\ (0\ ,\ 9)$.

USO DE SOFTWARE DE MATEMÁTICAS

Verifique los resultados anteriores.

□

PARA REFLEXIONAR

¿Existen funciones polinomiales cuya curva no interseque al eje y? Explique.

La determinación de los ceros de una función polinomial (equivalentemente las intersecciones de la curva correspondiente con el eje x o en su caso las raíces de la ecuación polinomial correspondiente) no siempre es un proceso sencillo, sin embargo, existen ciertas herramientas algebraicas que brindan un gran apoyo para ello. En el *ejemplo 1.16* factorizamos la ecuación $x^3+x^2-4x-4=0$ y luego determinamos sus raíces, obtuvimos $x=2$, $x=-2$ y $x=-1$. También comprobamos que $x^3+x^2-4x-4=(x-2)(x+2)(x+1)=0$, por tanto, cuando una ecuación polinomial se encuentra factorizada (y sus factores son lineales), la determinación de sus ceros (en caso de existir) es inmediata. Estas observaciones nos conducen a establecer métodos para factorizar ecuaciones polinomiales para luego determinar sus raíces. Una de las ideas básicas de la factorización de polinomios consiste en determinar una de sus raíces (o en su caso un cero), para posteriormente efectuar una división de polinomios, esto es, si $x=x_0$ es una raíz de $a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0=0$, entonces $x-x_0$ es uno de sus factores. Establezcamos los elementos para dividir polinomios. Sea p el polinomio dividendo (el polinomio que va a ser dividido), el polinomio divisor $d(x)$ (el polinomio que divide) el cociente c (polinomio resultante) y el residuo r, la *figura 1.24* muestra los elementos mencionados.

$$\begin{array}{r|l} & \quad c(x) \\ \hline d(x) & \ p(x) \\ & \\ \hline & \quad r \end{array} \qquad p(x)=c(x)\,d(x)+r$$

FIGURA 1.24

La operación $\frac{p}{d}$ (donde el grado del polinomio p es mayor o igual que el grado de d) puede expresarse de la forma $p=c\,d+r$, cuando $r=0$ se dice que d divide exactamente a p.

PARA REFLEXIONAR

En $p=c\,d+r$, ¿puede ocurrir que $d=0$?

Formalización de la propiedad anterior.

Propiedad 1.1 (ALGORITMO DE LA DIVISIÓN PARA POLINOMIOS)

Si $d(x)$ y $p(x) \neq 0$ son polinomios, entonces existen los polinomios únicos $c(x)$ y $r(x)$ tales que $p(x) = c(x)d(x) + r(x)$, $r(x) = 0$, o bien, $r(x)$ tiene un grado menor que $p(x)$. El polinomio $c(x)$ es el cociente y $r(x)$ es el residuo que resulta de dividir $p(x)$ por $d(x)$.

EJEMPLO 1.19 (Identificación de los elementos de una división)

a. En $\dfrac{3x^3 + 6x^2 - 9x - 12}{x-2} = 3x^2 + 12x + 15 + \dfrac{18}{x-2}$:

Dividendo $p(x) = 3x^3 + 6x^2 - 9x - 12$, divisor $d(x) = x - 2$, cociente: $c(x) = 3x^2 + 12x + 15$ y residuo $r = 18$.

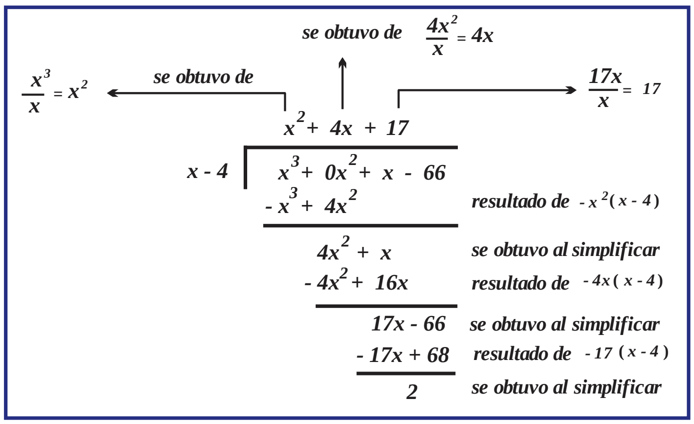
b. Observe que $p(x) = c(x)d(x) + r(x) = (3x^2 + 12x + 15)(x - 2) + 11 = 3x^3 + 6x^2 - 9x - 12$.

□

A continuación revisaremos el algoritmo para dividir polinomios.

EJEMPLO 1.20 (Algoritmo en la división de polinomios)

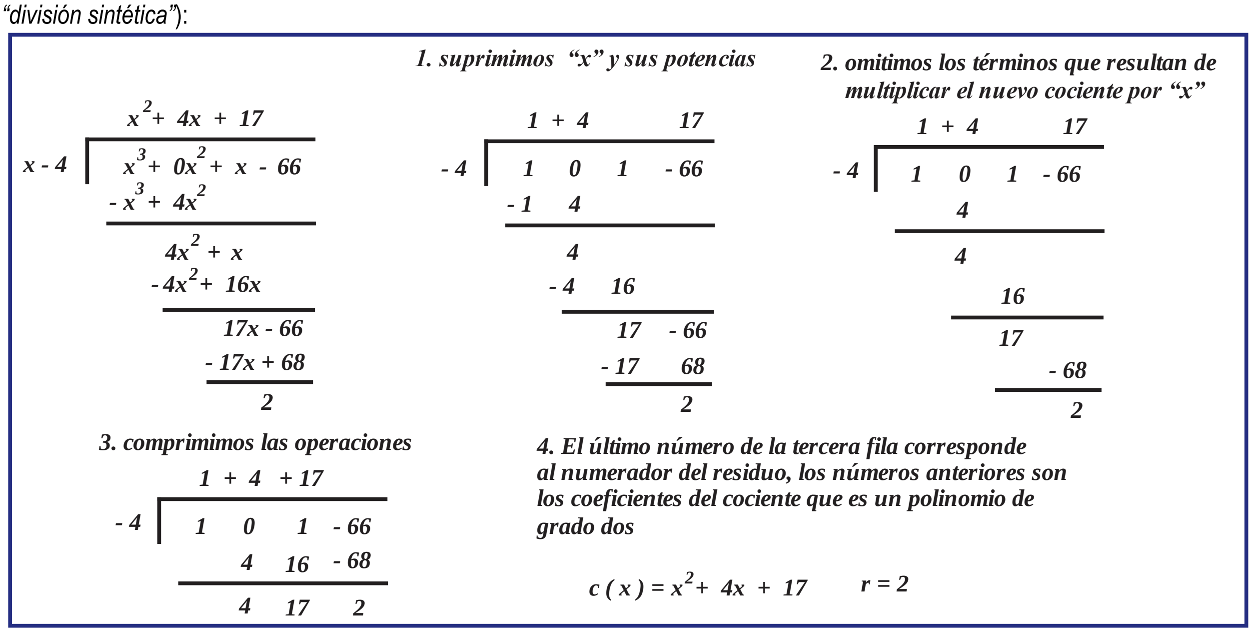
Para dividir $p(x) = x^3 + x - 66$ por $d(x) = x - 4$ se procede como sigue:



La división $\dfrac{-66 + x + x^3}{x-4}$ tiene por cociente $c(x) = x^2 + 4x + 17$ y residuo $r = 2$.

□

El proceso mostrado en el *ejemplo 1.20* puede simplificarse y posteriormente generalizarse para así obtener el algoritmo conocido como "división sintética". Ahora simplificaremos el método antes descrito (y a la vez presentar el algoritmo conocido como *"división sintética"*):



El proceso anterior da origen al *"algoritmo de la división sintética"*, *algoritmo* que en muchos casos reduce (simplifica) la operación $\frac{p}{x-x_0}$ a unas cuantas operaciones aritméticas.

ALGORITMO 1.2 (DE LA DIVISIÓN SINTÉTICA)

Para efectuar la división

$$x-x_0 \,\overline{\big)\, a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x^1 + a_0}$$

1. Ordene los términos del polinomio dividendo p en forma descendente y ponga en una primera fila los coeficientes, sustituya con un cero el coeficiente del término que falte.

2. Escriba x_0, "el divisor sintético", en la primera fila y a la izquierda de los coeficientes.

3. Ponga el coeficiente del término de mayor grado a_n al inicio de la tercera fila.

4. Multiplique a_n por x_0; escriba el producto $a_n \cdot x_0$ en la segunda fila, exactamente debajo de a_{n-1}, sume con a_{n-1} y escriba la suma $a_n\, x_0 + a_{n-1}$ en la tercera fila bajo a_{n-1}.

5. Multiplique la suma del paso cuatro por x_0; escriba el producto en la segunda fila bajo a_{n-2}, súmelo a a_{n-2} y escriba la suma en la tercera fila debajo de a_{n-2}.

6. Repita el proceso del paso cinco hasta que haya sumado un producto al término constante del polinomio a_0.

Los primeros n números de la tercera fila son los coeficientes del cociente, que es un polinomio de grado $n-1$, y el último número r de la tercera fila es el residuo.

La *figura 1.25* es un esquema que indica la forma de usar del algoritmo de la división sintética.

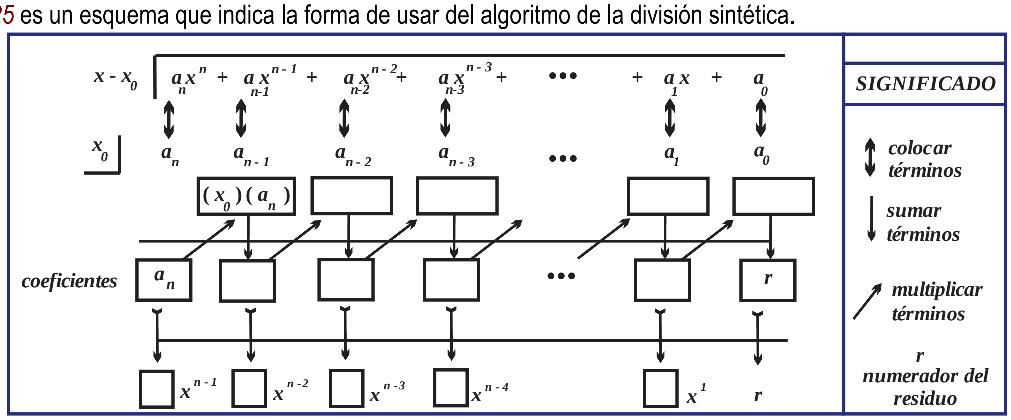


FIGURA 1.25

EL *ejemplo 1.21* ilustra el algoritmo de la división sintética en la división de polinomios.

EJEMPLO 1.21 (División sintética de polinomios)

a. Resolvamos por división sintética

$$x-4 \,\overline{\big)\, 5x^3 - 8x^2 + 2x - 6}$$

1. Los términos de los polinomios ya están ordenados de forma decreciente.

2. Listamos los coeficientes.

$$\begin{array}{c|cccc} 4 & 5 & -8 & 2 & -6 \\ & & & & \\ \hline & & & & \end{array}$$

3. Bajamos el primer coeficiente a la fila tres.

$$\begin{array}{c|cccc} 4 & 5 & -8 & 2 & -6 \\ & & & & \\ \hline & 5 & & & \end{array}$$

4. Multiplicamos el primer coeficiente de la fila tres por 4 y colocamos el resultado abajo del siguiente coeficiente, efectuamos la suma.

$$\begin{array}{c|cccc} 4 & 5 & -8 & 2 & -6 \\ & & 20 & & \\ \hline & 5 & 12 & & \end{array}$$

5. Repetimos el paso anterior utilizando todos los coeficientes.

$$\begin{array}{c|cccc} 4 & 5 & -8 & 2 & -6 \\ & & 20 & 48 & 200 \\ \hline & 5 & 12 & 50 & 194 \longleftarrow \textit{residuo}. \end{array}$$

6. Los primeros tres números de la tercera fila son los coeficientes del cociente $c(x)$, el último término es el residuo, entonces $c(x) = 5x^2 + 12x + 50$ y $r = 194$, por tanto

$$\frac{5x^3 - 8x^2 + 2x - 6}{x-4} = 5x^2 + 12x + 50 + \frac{194}{x-4}.$$

a. Resolvamos por división sintética

$x - 4 \,\overline{\big)\, 5x^3 - 8x^2 + 2x - 6}$

1. Los términos de los polinomios ya están ordenados de forma decreciente.

2. Listamos los coeficientes.

$$\begin{array}{r|rrrr} 4 & 5 & -8 & 2 & -6 \\ & & & & \\ \hline & & & & \end{array}$$

3. Bajamos el primer coeficiente a la fila tres.

$$\begin{array}{r|rrrr} 4 & 5 & -8 & 2 & -6 \\ & & & & \\ \hline & 5 & & & \end{array}$$

4. Multiplicamos el primer coeficiente de la fila tres por 4 y colocamos el resultado abajo del siguiente coeficiente, efectuamos la suma.

$$\begin{array}{r|rrrr} 4 & 5 & -8 & 2 & -6 \\ & & 20 & & \\ \hline & 5 & 12 & & \end{array}$$

5. Repetimos el paso anterior utilizando todos los coeficientes.

$$\begin{array}{r|rrrr} 4 & 5 & -8 & 2 & -6 \\ & & 20 & 48 & 200 \\ \hline & 5 & 12 & 50 & 194 \longleftarrow \textit{residuo} \end{array}$$

6. Los primeros tres números de la tercera fila son los coeficientes del cociente $c(x)$, el último término es el residuo, entonces $c(x) = 5x^2 + 12x + 50$ y $r = 194$, por tanto

$$\frac{5x^3 - 8x^2 + 2x - 6}{x - 4} = 5x^2 + 12x + 50 + \frac{194}{x - 4}.$$

b. Resolvamos por división sintética

$x + 2 \,\overline{\big)\, 2x^4 - x^3 - 11x^2 + 4x + 14}$

1. Los términos de los polinomios ya están ordenados de forma decreciente.

2. Listamos los coeficientes.

$$\begin{array}{r|rrrrr} -2 & 2 & -1 & -11 & 4 & 14 \\ & & & & & \\ \hline & & & & & \end{array}$$

3. Bajamos el primer coeficiente a la fila tres.

$$\begin{array}{r|rrrrr} -2 & 2 & -1 & -11 & 4 & 14 \\ & & & & & \\ \hline & 2 & & & & \end{array}$$

4. Multiplicamos el primer coeficiente de la fila tres por -2 y colocamos el resultado abajo del siguiente coeficiente, efectuamos la suma.

$$\begin{array}{r|rrrrr} -2 & 2 & -1 & -11 & 4 & 14 \\ & & -4 & & & \\ \hline & 2 & -5 & & & \end{array}$$

5. Repetimos el paso anterior utilizando todos los coeficientes.

$$\begin{array}{r|rrrrr} -2 & 2 & -1 & -11 & 4 & 14 \\ & & -4 & 10 & 2 & -12 \\ \hline & 2 & -5 & -1 & 6 & 2 \longleftarrow \textit{residuo} \end{array}$$

6. Los primeros cuatro números de la tercera fila son los coeficientes del cociente $c(x)$, el último término es el residuo, entonces $c(x) = 2x^3 - 5x^2 - x + 6$ y $r = 2$, por tanto

$$\frac{2x^4 - x^3 - 11x^2 + 4x + 14}{x + 2} = 2x^3 - 5x^2 - x + 6 + \frac{2}{x + 2}.$$

□

Supongamos que la división $\dfrac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{x - x_0}$ tiene un residuo, es decir

$$\frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{x - x_0} = b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_1 x + b_0 + \frac{r}{x - x_0}.$$

Ahora multiplicamos ambos miembros de la ecuación anterior por $x - x_0$ y obtenemos

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = \left(b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_1 x + b_0\right)(x - x_0) + r.$$

Así, $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = \left(b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_1 x + b_0\right)(x - x_0) + r$ y

$$p(x_0) = \left(b_{n-1}x_0^{n-1} + \cdots + b_1 x_0 + b_0\right)(x_0 - x_0) + r = r \text{, en concreto } p(x_0) = r.$$

¡El hecho de que $p(x_0) = r$ significa que se puede evaluar una función polinomial por medio de una división de polinomios y que se puede obtener el denominador del residuo de una división de polinomios evaluando una función!

EJEMPLO 1.22 (Antecedentes del teorema del residuo)

a. En el *ejemplo 1.21.a.* obtuvimos $\frac{5x^3-8x^2+2x-6}{x-4}=5x^2+12x+50+\frac{194}{x-4}$, si multiplicamos por $x-4$ ambos miembros obtenemos $5x^3-8x^2+2x-6=(x-4)(5x^2+12x+50)+194$.

Así $p(x)=5x^3-8x^2+2x-6=(x-4)(5x^2+12x+50)+194$, donde $p(4)=194$.

¡ $p(4)$ es igual al residuo de la división $\frac{5x^3-8x^2+2x-6}{x-4}$!

b. En el *ejemplo 1.21.b.* obtuvimos $\frac{2x^4-x^3-11x^2+4x+14}{x+2}=2x^3-5x^2-x+6+\frac{2}{x+2}$, si multiplicamos por $x+2$ ambos miembros de esta ecuación se obtiene $2x^4-x^3-11x^2+4x+14=(x+2)(2x^3-5x^2-x+6)+2$.

Así, $p(x)=2x^4-x^3-11x^2+4x+14=(x+2)(2x^3-5x^2-x+6)+2$, donde $p(-2)=2$.

¡ $p(-2)$ es igual al residuo de la división $\frac{2x^4-x^3-11x^2+4x+14}{x+2}$!

$\square$

Las observaciones del *ejemplo 1.16* son casos particulares de la propiedad conocida como *teorema del residuo*.

Proposición 1.1 (TEOREMA DEL RESIDUO)

Si la función polinomial p se divide por $x-x_0$, entonces su residuo es $p(x_0)$.

¡Un uso correcto del teorema del residuo requiere que el numerador del residuo sea independiente de la variable (en nuestro caso x)!

EJEMPLO 1.23 (Obtención de una imagen utilizando una división)

a. Utilicemos una división para calcular $p(-2)$ cuando $p(x)=x^3+2x^2-3x-8$.

La división que tenemos que efectuar es $\frac{x^3+2x^2-3x-8}{x+2}$, utilizando el algoritmo de la división sintética se obtiene

$$\begin{array}{r|rrrr}
-2 & 1 & 2 & -3 & -8 \\
 & & -2 & 0 & 6 \\
\hline
 & 1 & 0 & -3 & -2 \leftarrow \textit{residuo}
\end{array}$$

Así, $p(-2)=-2$.

b. Utilicemos una división para calcular $p(2)$ sí $p(x)=5x^4-8x^2-15x-18$.

Esto es, $\frac{5x^4-8x^2-15x-18}{x-2}=\frac{5x^4+0x^3-8x^2-15x-18}{x-2}$.

Al utilizar el algoritmo de la división sintética se obtiene

$$\begin{array}{r|rrrrr}
2 & 5 & 0 & -8 & -15 & -18 \\
 & & 10 & 20 & 24 & 18 \\
\hline
 & 5 & 10 & 12 & 9 & 0 \leftarrow \textit{residuo}
\end{array}$$

Así, $p(2)=0$.

$\square$

Con el ***teorema del residuo***, también es posible obtener el residuo de la operación $x-x_0\,\overline{)\,p}$ (cuando p es una función polinomial) evitando efectuar la división.

EJEMPLO 1.24 (Cálculo del residuo evaluando en una función)

a. El residuo de $\frac{2x^4-x^3-8x^2+4x+8}{x-1}$ es $p(1)=2(1)^4-(1)^3-8(1)^2+4(1)+8=5$.

b. El residuo de $\dfrac{x^5+x^3-8x^2+4}{x+1}$ es $p(-1)=(-1)^5+(-1)^3-8(-1)^2+4=-6$.

□

Si en la división $\dfrac{p}{x-x_0}$, el residuo es cero y el cociente es el polinomio $c(x)$, entonces $\dfrac{p(x)}{x-x_0}=c(x)+0$, o bien, $\dfrac{p(x)}{x-x_0}=c(x)$, es decir $p(x)=(x-x_0)c(x)$, esto significa que $(x-x_0)$ es un factor de la función polinomial p.

EJEMPLO 1.25 (Antecedentes del teorema del factor)

Sea $p(x)=x^4-7x^2+6x$.

a. $\dfrac{x^4-7x^2+6x}{x-1}=x^3-x^2+6x$ y tiene residuo cero, por tanto $p(x)=x^4-7x^2+6x=(x-1)(x^3+x^2-6x)$.

b. $\dfrac{x^4-7x^2+6x}{x-2}=x^3-2x^2-3x$ y tiene con residuo cero, entonces $p(x)=x^4-7x^2+6x=(x-2)(x^3-2x^2-3x)$.

c. Resumiendo, si $p(x)=x^4-7x^2+6x$, entonces

FORMA	FACTOR	CERO (O RAÍZ)	RESIDUO
$p(x)=(x-1)(x^3+x^2-6x)$	$x-1$	$x=1$	$r=0$
$p(x)=(x-2)(x^3-2x^2-3x)$	$x-2$	$x=2$	$r=0$

□

Estas observaciones son válidas para cualquier función polinomial y su formalización se conoce como ***"teorema del factor".***

Proposición 1.2 (TEOREMA DEL FACTOR)

La función polinomial $p(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$ tiene un factor $x-x_0$ si y sólo si $p(x_0)=0$.

PARA REFLEXIONAR

¿? Rescriba el teorema del factor en términos del teorema del residuo.

El *teorema del factor* es útil para decidir cuándo el número (en el dominio de la función polinomial) $x=x_0$ es un cero de una función polinomial. Veamos el *ejemplo 1.26.*

¡ $x-x_0$ es un factor de la función polinomial p sí y sólo sí la división $x-x_0\overline{)\,p}$ tiene como residuo $r=0$!

EJEMPLO 1.26 (Uso del teorema del factor)

a. ¿Es $x-3$ un factor de la función $p(x)=2x^3-3x^2-5x-12$?

Sí puesto que $p(3)=2(3)^3-3(3)^2-5(3)-12=54-27-15-12=0$.

b. ¿Es $x+1$ un factor de $p(x)=2x^3-3x^2-5x-12$?

No puesto que $p(-1)=2(-1)^3-3(-1)^2-5(-1)-12=-12$.

□

El teorema del factor, el teorema del residuo y los ceros de una función polinomial se relacionan de la siguiente forma:

Proposición 1.3 (EL TEOREMA DEL FACTOR, EL TEOREMA DEL RESIDUO Y LOS CEROS)

Sean: p una función polinomial y r es el residuo de la operación $\dfrac{p}{x-x_0}$, entonces:

a. El residuo es la imagen del número x_0 bajo p, es decir $p(x_0)=r$.
b. Si $r=0$, entonces $x-x_0$ es un factor de p y viceversa, si $x-x_0$ es un factor de p, entonces $r=0$.
c. Si $r=0$, entonces $x=x_0$ es un cero de p y viceversa, si $x=x_0$ es un cero de p, entonces $r=0$.

EJEMPLO 1.27 (El teorema del factor y el teorema del residuo)

a. Sea $p(x)=2x^4-7x^3-8x^2+14x+8$, se desea evaluar $p(4)$, para ello utilizaremos el algoritmo de la división sintética, así

$$\begin{array}{r|rrrrr} 4 & 2 & -7 & -8 & 14 & 8 \\ & & 8 & 4 & -16 & -8 \\ \hline & 2 & 1 & -4 & -2 & 0 \end{array}$$

Entonces el residuo es $r=p(4)=0$, por tanto $x=4$ es un cero de p y $x-4$ es uno de sus factores.

b. Si $p(x)=2x^4-7x^3-8x^2+14x+8$, para obtener $p(1)$ puede utilizarse división sintética, así

$$\begin{array}{r|rrrrr} 1 & 2 & -7 & -8 & 14 & 8 \\ & & 2 & -5 & -13 & 1 \\ \hline & 2 & -5 & -13 & 1 & 9 \end{array}$$

Entonces $p(1)=9$.

$\square$

¡Para verificar que $x=x_0$ es un cero (equivalentemente, $x-x_0$ es un factor) de p, la operación $x-x_0\overline{)\,p}$ debe tener residuo cero!

EJEMPLO 1.28 (El teorema del factor y el teorema del residuo)

Evaluemos $p(x)=2x^4-x^3-11x^2+4x+12$ en: -2 y 1, para luego determinar cuáles de estas asignaciones corresponden a ceros.

a. Para $x=-2$, $p(-2)=2(-2)^4-(-2)^3-11(-2)^2+4(-2)+12=32+8-44-8+12=0$, entonces $x=-2$ es un cero de p y $x+2$ es uno de sus factores.

Estos resultados también se obtienen empleando una división sintética y luego el teorema del residuo

$$\begin{array}{r|rrrrrl} -2 & 2 & -1 & -11 & 4 & 12 & \\ & & -4 & 10 & 2 & -12 & \\ \hline & 2 & -5 & -1 & 6 & 0 & \longleftarrow \textit{residuo} \end{array}$$

en consecuencia $p(-2)=0$ y $x=-2$ es un cero de $p(x)=2x^4-x^3-11x^2+4x+12$, también $x+2$ es uno de sus factores.

b. Por sustitución directa $p(1)=2(1)^4-(1)^3-11(1)^2+4(1)+12=2-1-11+4+12=6$. Se obtiene el mismo resultado utilizando división sintética y luego el teorema del residuo:

$$\begin{array}{r|rrrrrl} 1 & 2 & -1 & -11 & 4 & 12 & \\ & & 2 & 1 & -10 & -6 & \\ \hline & 2 & 1 & -10 & -6 & 6 & \longleftarrow \textit{residuo} \end{array}$$

en consecuencia $p(1)=6$ y $x=1$ no es un cero de $p(x)=2x^4-x^3-11x^2+4x+12$.

$\square$

Es posible que una función polinomial tenga ceros repetidos, si éste es el caso se dice que el cero que se repite tiene cierta multiplicidad.

Definición 1.7 (MULTIPLICIDAD DE UN CERO (O UNA RAÍZ)

Si $x = x_0$ es un cero de p y $(x - x_0)^k$ es un factor de p, se dice que el cero (o raíz) $x = x_0$ tiene multiplicidad k.

¡Los ceros de una función polinomial se pueden repetir, la multiplicidad de una cero (o raíz) indica el número de veces que el cero (o la raíz) se repite!

EJEMPLO 1.29 (Multiplicidad)

a. Si $p(x) = (x+1)^3(x+2)^2$, los ceros son $x_{01} = -1$ y $x_{02} = -2$ con multiplicidades respectivas 3 y 2 (note que las multiplicidades coinciden con las potencias de los factores).

b. En $p(x) = x^2(x+3)^3(x-9)$, las multiplicidades de los ceros $x_{01} = 0$, $x_{02} = -3$ y $x_{03} = 9$ son 2, 3 y 1 respectivamente.

□

Como seguramente el lector lo ha notado, el número de ceros de $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ está relacionado con la potencia n, así la función $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ tiene a lo más n ceros reales (algunos se pueden repetir), esta propiedad es un caso particular del *teorema Fundamental del Álgebra* mismo que enunciamos (en términos de funciones polinomiales) a continuación.

Proposición 1.4 (TEOREMA FUNDAMENTAL DEL ÁLGEBRA)

La función polinomial $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ tiene al menos un cero.

¡El número de ceros de la función polinomial f no supera su grado!
¡Los ceros de la función polinomial f no necesariamente son números reales!

EJEMPLO 1.30 (Ceros y grado de una función polinomial)

a. La función $p(x) = x - 8$ tiene exactamente un cero, este es $x = 8$.

b. La función $p(x) = x^3 - 6x^2 - 27x = x(x+3)(x-9)$ tiene exactamente tres ceros, estos son $x = 0$, $x = -3$ y $x = 9$.

c. La función $p(x) = x^4 + 1$ no tiene ceros reales.

□

La combinación de los teoremas: *fundamental del álgebra, del residuo* y *del factor*, garantizan que la función polinomial $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ puede ser rescrita como el producto de n factores lineales (algunos de ellos pueden estar repetidos, otros pueden no ser números reales y por tanto carecer de interés en este curso), es decir en la forma $p(x) = a_n(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)\cdots(x - x_n)$ donde $x_1, x_1, x_1, \cdots, x_n$ son los ceros de $p(x)$, esta propiedad se conoce como "*Teorema de factorización lineal*".

Proposición 1.5 (TEOREMA DE LA FACTORIZACIÓN LINEAL)

Si p es una función polinomial de grado n, entonces p tiene n factores lineales.

EJEMPLO 1.31 (Uso del teorema de factorización lineal)

a. Para "factorizar linealmente" $p(x) = 2x^3 - x^2 - 8x + 4$, note que uno de sus ceros es $x_0 = 2$, que el cociente $\dfrac{p}{x-2} = \dfrac{2x^3 - x^2 - 8x + 4}{x-2}$ es $c(x) = 2x^2 + 3x - 2$.

Ahora bien, sea $g(x) = 2x^2 + 3x - 2$, sus ceros son $x = -2$ y $x = \dfrac{1}{2}$ (verifíquelo), en consecuencia $2x^2 + 3x - 2 = (x+2)\left(x - \dfrac{1}{2}\right)$, por lo que $p(x) = (x-2)(x+2)\left(x - \dfrac{1}{2}\right)$.

b. En $p\,(x)=9x^3+3x^2-2x$ uno de los ceros es $x_0=0$, por tanto $\dfrac{p}{x-x_0}=\dfrac{9x^3+3x^2-2x}{x-0}=9x^2+3x-2$. Pero $g(x)=9x^2+3x-2$ tiene como ceros a $x=\dfrac{1}{3}$ y $x=-\dfrac{2}{3}$ (¡verifíquelo!), luego $9x^2+3x-2=x\left(x+\dfrac{2}{3}\right)\left(x-\dfrac{1}{3}\right)$, finalmente $p(x)=9x^3+3x^2-2x=x\left(x+\dfrac{2}{3}\right)\left(x-\dfrac{1}{3}\right)$.

□

NOTA

El teorema fundamental del álgebra y el teorema de la factorización lineal, no proporcionan un método (o algoritmo) para determinar los ceros de una función polinomial (por lo que se denominan teoremas de existencia).

La propiedad, conocida como "*prueba de los ceros racionales*" (que se fundamenta en ellos) es un algoritmo que contribuye para determinar una lista de todos los posibles ceros racionales de $p\,(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$ (con coeficientes enteros) relacionándolos con los coeficientes a_n y a_0 (dominante e independiente, respectivamente).

NOTA

Recuerde que los números racionales son de la forma $\dfrac{a}{b}$ con la condición $b\neq 0$, en particular los números enteros, son números racionales.

Proposición 1.6 (TEOREMA DE LOS CEROS RACIONALES)

Sea f una función polinomial, con coeficientes enteros, coeficiente dominante $a_n\neq 0$, coeficiente independiente $a_0\neq 0$, si la fracción irreducible $\dfrac{p}{q}$ es uno de los ceros de f, entonces el número p es divisor de a_0 y el número q es divisor de a_n.

En la proposición anterior, el hecho de que el número p sea divisor del número a_0 significa que la división $\dfrac{a_0}{p}$ tiene por resultado un número entero (lo mismo ocurre para la división $\dfrac{a_n}{q}$).

PARA REFLEXIONAR

¿? Rescriba el teorema de los ceros racionales sí $a_n=1$.

Así, para $p\,(x)=x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$ (donde todos sus coeficientes son números enteros), los posibles ceros racionales de p son los factores del término independiente a_0.

¡Los ceros de la función polinomial p no necesariamente son números racionales!

La *proposición 1.6* proporciona y justifica el *algoritmo 1.3* que es un método para determinar los ceros racionales de una función polinomial.

PARA REFLEXIONAR

¿? Proporcione una función polinomial de grado tres con un sólo cero racional y dos ceros que no sean números racionales.

ALGORITMO 1.3 (RECONOCIMIENTO DE LOS CEROS RACIONALES)

1. Identifique el coeficiente independiente $a_0 \neq 0$ de la función polinomial p y haga una lista de todos sus factores.
2. Identifique el coeficiente dominante (líder) $a_n \neq 0$ de la función polinomial y enliste todos sus factores.
3. Forme todas las divisiones: $\dfrac{factores \;\; del \;\; coeficiente \;\; independiente}{factores \;\; del \;\; coeficiente \;\; dominante}$.
4. Sustituya directamente (también puede utilizar una división sintética) los posibles ceros racionales en la función polinomial y determine cuáles son ceros.
5. Si el coeficiente del término dominante es 1, los posibles ceros racionales de p son los factores del coeficiente independiente.

El *ejemplo 1.32* muestra la forma de uso del *algoritmo 1.4.*

EJEMPLO 1.32 (Posibles ceros racionales)

a. En $p(x) = x^4 - 3x^3 + x^2 + 4$, $a_4 = 1$ y $a_0 = 4$, entonces posibles ceros racionales, son los divisores de 4, es decir: -1, -2, -4, 1, 2 y 4.

b. En $p(x) = 2x^3 + 2x - 3$, el coeficiente independiente es $a_0 = -3$ y tiene como divisores a -1, -3, 1 y 3. El coeficiente dominante es $a_3 = 2$ y tiene como divisores a -1, -2, 1 y 2. Los posibles ceros racionales son las entradas mostradas en la *tabla 1.2*.

a_0 \ a_3	-1	-2	1	2
-1	$x = 1$	$x = \frac{1}{2}$	$x = -1$	$x = -\frac{1}{2}$
-3	$x = 3$	$x = \frac{3}{2}$	$x = -3$	$x = -\frac{3}{2}$
1	$x = -1$	$x = -\frac{1}{2}$	$x = 1$	$x = \frac{1}{2}$
3	$x = -3$	$x = -\frac{3}{2}$	$x = 3$	$x = \frac{3}{2}$

TABLA 1.2

c. En $p(x) = 5x^3 + 4x^2 - 3x + 3$, $a_3 = 5$ y sus divisores son -1, -5, 1 y 5. Por otra parte $a_0 = 3$ tiene divisores -1, -3, 1 y 3. Los posibles ceros racionales son las entradas mostradas en la *tabla 1.3.*

a_0 \ a_3	-1	-5	1	5
-1	$x = 1$	$x = \frac{1}{5}$	$x = -1$	$x = -\frac{1}{5}$
-3	$x = 3$	$x = \frac{3}{5}$	$x = -3$	$x = -\frac{3}{5}$
1	$x = -1$	$x = -\frac{1}{5}$	$x = 1$	$x = \frac{1}{5}$
3	$x = -3$	$x = -\frac{3}{5}$	$x = 3$	$x = \frac{3}{5}$

TABLA 1.3

$\square$

¡Si $p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, entonces $a_n = 1$ y los posibles ceros racionales son los factores de a_0!

Parte del problema de determinación de los ceros (o raíces) de una función polinomial p consiste en aplicar el *teorema del residuo* a los posibles ceros (o raíces racionales), si $x = x_0$ y $p(x_0) = 0$, entonces $x = x_0$ es un "*cero*" de p; como alternativa puede efectuarse la división $\dfrac{p}{x - x_0}$ verificando que el residuo sea cero.

EJEMPLO 1.33 (Determinación de los ceros racionales)

a. En $p(x)=x^3-5x^2+2x+8$, los posibles ceros racionales son: -1, -2, -4, -8, 1, 2, 4 y 8, así:

si $x=-1$, entonces $p(-1)=(-1)^3-5(-1)^2+2(-1)+8=0$ y $x=-1$ es un cero de p.

si $x=-2$, entonces $p(-2)=(-2)^3-5(-2)^2+2(-2)+8=-24$ y $x=-2$ no es un cero de p.

si $x=-4$, entonces $p(-4)=(-4)^3-5(-4)^2+2(-4)+8=-144$ y $x=-4$ no es un cero de p.

si $x=-8$, entonces $p(-8)=(-8)^3-5(-8)^2+2(-8)+8=-840$ y $x=-8$ no es un cero de p.

si $x=1$, entonces $p(1)=(1)^3-5(1)^2+2(1)+8=6$ y $x=1$ no es un cero de p.

si $x=2$, entonces $p(2)=(2)^3-5(2)^2+2(2)+8=0$ y $x=2$ es un cero de p.

si $x=4$, entonces $p(4)=(4)^3-5(4)^2+2(4)+8=0$ y $x=4$ es un cero de p.

si $x=8$, entonces $p(8)=(8)^3-5(8)^2+2(8)+8=216$ y $x=8$ no es un cero de p.

Por consiguiente, los ceros racionales de $f(x)=x^3-5x^2+2x+8$ son $x=-1$, $x=2$ y $x=4$.

También es posible verificar si un número $x=x_0$ es o no un cero de la función polinomial p utilizando la "división sintética".

b. En $p(x)=x^3-4x^2-3x+18$, el término independiente es $a_0=18$ y tiene como divisores enteros: -1, -2, -3, -6, -9, -18, 1, 2, 3, 6, 9 y 18, números que son sus posibles ceros racionales. Se empleará el algoritmo de la división sintética para determinar cuáles de las asignaciones anteriores corresponden a los ceros racionales; si éste es el caso el residuo debe ser cero.

Si $x=-1$, entonces $\begin{array}{r\|rrrr} -1 & 1 & -4 & -3 & 18 \\ & & -1 & 5 & -2 \\ \hline & 1 & -5 & 2 & 16 \end{array}$ $r=16$ y $x=-1$, por tanto no es un cero de p.	Si $x=1$, entonces $\begin{array}{r\|rrrr} 1 & 1 & -4 & -3 & 18 \\ & & 1 & -3 & -6 \\ \hline & 1 & -3 & -6 & 12 \end{array}$ $r=12$ y $x=1$, por tanto no es un cero de p.	Si $x=-2$, entonces $\begin{array}{r\|rrrr} -2 & 1 & -4 & -3 & 18 \\ & & -2 & 12 & -18 \\ \hline & 1 & -6 & 9 & 0 \end{array}$ $r=0$ y $x=-2$, por tanto es un cero de p.	Si $x=2$, entonces $\begin{array}{r\|rrrr} 2 & 1 & -4 & -3 & 18 \\ & & 2 & -4 & -14 \\ \hline & 1 & -2 & -7 & 4 \end{array}$ $r=4$ y $x=2$, por tanto no es un cero de p.
Si $x=-3$, entonces $\begin{array}{r\|rrrr} -3 & 1 & -4 & -3 & 18 \\ & & -3 & 21 & -54 \\ \hline & 1 & -7 & 18 & -36 \end{array}$ $r=-36$ y $x=-3$, por tanto no es un cero de p.	Si $x=3$, entonces $\begin{array}{r\|rrrr} 3 & 1 & -4 & -3 & 18 \\ & & 3 & -3 & -18 \\ \hline & 1 & -1 & -6 & 0 \end{array}$ $r=0$ y $x=3$, por tanto es un cero de p.	Si $x=-6$, entonces $\begin{array}{r\|rrrr} -6 & 1 & -4 & -3 & 18 \\ & & -6 & 60 & -342 \\ \hline & 1 & -10 & 57 & -324 \end{array}$ $r=-324$ y $x=-6$, por tanto no es un cero de p.	Si $x=6$, entonces $\begin{array}{r\|rrrr} 6 & 1 & -4 & -3 & 18 \\ & & 6 & 12 & 54 \\ \hline & 1 & 2 & 9 & 72 \end{array}$ $r=72$ y $x=6$, por tanto no es un cero de p.
Si $x=-9$, entonces $\begin{array}{r\|rrrr} -9 & 1 & -4 & -3 & 18 \\ & & -9 & 117 & -1026 \\ \hline & 1 & -13 & 114 & -1008 \end{array}$ $r=-1008$ y $x=-9$, por tanto no es un cero de p.	Si $x=9$, entonces $\begin{array}{r\|rrrr} 9 & 1 & -4 & -3 & 18 \\ & & 9 & 45 & 378 \\ \hline & 1 & 5 & 42 & 396 \end{array}$ $x=9$ y $r=396$, por tanto no es un cero de p.	Si $x=-18$, entonces $\begin{array}{r\|rrrr} -18 & 1 & -4 & -3 & 18 \\ & & -18 & 396 & -7074 \\ \hline & 1 & -22 & 393 & -7056 \end{array}$ $r=-7056$ y $x=-18$, por tanto no es un cero de p.	Si $x=18$, entonces $\begin{array}{r\|rrrr} 18 & 1 & -4 & -3 & 18 \\ & & 18 & 252 & 4482 \\ \hline & 1 & 14 & 249 & 4500 \end{array}$ $r=4500$ y $x=18$, por tanto no es un cero de p.

Los ceros racionales de $p(x)=x^3-4x^2-3x+18$ son $x=-2$ y $x=3$ (multiplicidad dos).

□

Una función polinomial de p, también puede tener ceros irracionales.

EJEMPLO 1.34 (Ceros irracionales)

a. El único cero racional de $f(x)=x^3-x^2-2x+2$ es $x=1$ (verifíquelo), por tanto f puede factorizarse como $p(x)=(x-1)(x^2-2)=(x-1)(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})$ y los dos ceros irracionales de p son $x=-\sqrt{2}$ y $x=\sqrt{2}$.

b. La función polinomial $p(x)=x^4-5x^2+6$ no tiene ceros racionales (verifíquelo), sin embargo $p(x)=x^4-5x^2+6=(x^2-3)(x^2-2)=(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})$, por tanto p tiene cuatro ceros irracionales $x=-\sqrt{3}$, $x=\sqrt{3}$, $x=-\sqrt{2}$ y $x=\sqrt{2}$.

□

Las propiedades de las funciones polinomiales, previamente estudiadas, constituyen parte del proceso a seguir para construir un "bosquejo" (aproximación a la forma real de curva asociada) de la gráfica de una función polinomial. Para la construcción del "bosquejo de la curva asociada a una función polinomial", es conveniente rescribir la regla de correspondencia apropiadamente, y para esto, las propiedades que estableceremos a continuación son de gran apoyo.
Entenderemos que una función f es positiva (o positiva sobre una parte de su dominio) si y sólo si todas las imágenes de los puntos del intervalo son positivas, similarmente, una función polinomial f es negativa (o negativa sobre un intervalo de su dominio) si y sólo si todas las imágenes de los puntos del intervalo son negativas. Las funciones polinomiales positivas (o negativas), no tienen ceros, su curva asociada no interseca al eje "x". Una función polinomial no positiva (o no negativa) interseca al eje x por lo menos en un punto de la forma $I_x(x_0, 0)$ donde x_0 es un cero de la función y alrededor de estos puntos el signo de f puede no cambiar.

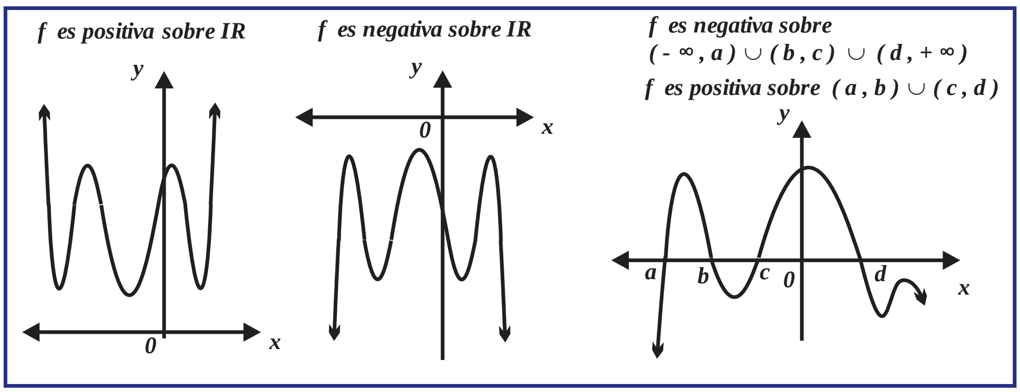


FIGURA 1.26

En *la figura 1.26* la parte positiva correspondiente de la curva se encuentra en los ***cuadrantes I y II*** del plano cartesiano ("arriba del eje "x"), si f es negativa (en un intervalo de su dominio) la parte de la curva correspondiente se encuentra en los ***cuadrantes III y IV*** del plano cartesiano.

¡Si una función polinomial tiene un cero x_0, entonces es no negativa o es no positiva!

La *figura 1.27* muestra la curva asociada a una función no negativa y la curva asociada a una función no positiva, ¡observe que el signo de f no cambia!, si éste es el caso, entonces el cero tiene multiplicidad par.

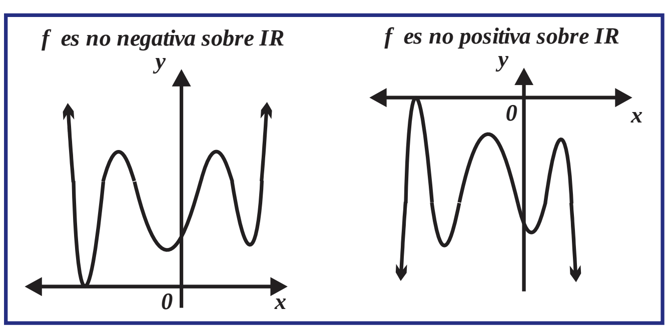


FIGURA 1.27

ALGORITMO 1.4 (DETERMINACIÓN DEL SIGNO DE f ALREDEDOR DE LOS CEROS)

1. Determine los ceros y en caso de existir represéntelos en la recta real.
2. Construya los intervalos en los que los ceros seccionan a la recta real.
3. Seleccione un número de prueba x_p de cada uno de los intervalos (mientras más próximo esté a uno de los ceros proporcionará mejor información).
4. Calcule $f(x_p)$
5. Con base al signo de $f(x_p)$ decida si la parte de la curva correspondiente a f se encuentra por encima o por abajo del eje "x".
6. Si el cero x_0 tiene multiplicidad par, la curva correspondiente a f no cambia de signo y es tangente al eje "x".

El *ejemplo 1.35* muestra el uso de *algoritmo 1.4*.

EJEMPLO 1.35 (Comportamiento alrededor de los ceros)

a. Signo de $p(x) = x^3 - 2x^2 - 3x$ alrededor de sus ceros.

Puesto que $p(x) = x^3 - 2x^2 - 3x = x(x^2 - 2x - 3) = x(x-3)(x+1)$ los ceros son $x=-1$, $x=0$ y $x=3$. Los puntos de intersección con el eje "x" son $I_{x1}(-1,0)$, $I_{x2}(0,0)$ y $I_{x3}(3,0)$, mismos que seccionan a la recta real en los intervalos $(-\infty,-1)$, $(-1,0)$, $(0,3)$ y $(3,+\infty)$, vea la *figura 1.28*.

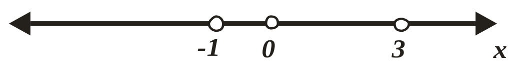


FIGURA 1.28

En la siguiente tabla se organiza la información obtenida y se consideran los puntos de prueba, también obtenemos las imágenes respectivas y se asigna signo a p.

INTERVALO	x_p	$p(x_p)$	p
$(-\infty,-1)$	-2	-10	**Negativa**
$(-1,0)$	-0.5	0.875	**Positiva**
$(0,3)$	1	-4	**Negativa**
$(3,+\infty)$	4	20	**Positiva**

Por tanto, la curva asociada a p se comporta alrededor de los cercos como lo muestra la *figura 1.29*.

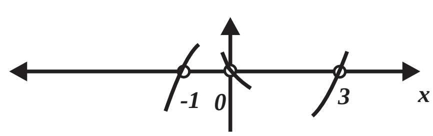


FIGURA 1.29

b. $p(x) = \frac{1}{8}(x^3 - 3x + 2) = \frac{1}{8}(x-1)^2(x+2)$ tiene ceros en $x_{01} = -2$ y $x_{02} = 1$ de multiplicidad dos, (verifíquelo). Los puntos en que la curva asociada a p interseca al eje "x" son: $I_{x1}(-2,0)$ y $I_{x2}(1,0)$, mismos que seccionan a la recta real en los intervalos $(-\infty,-2)$, $(-2,1)$ y $(1,+\infty)$, vea la *figura 1.30*.

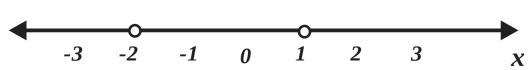


FIGURA 1.30

La siguiente tabla sistematiza la información sobre la función, los puntos de prueba y el respectivo signo de p.

INTERVALO	x_p	$p(x_p)$	p
$(-\infty,-2)$	-3	-1	**Negativa**
$(-2,1)$	0	$\frac{1}{4}$	**Positiva**
$(1,+\infty)$	2	$\frac{1}{2}$	**Positiva**

Por tanto, la curva asociada a p tiene el se comportamiento (alrededor de los ceros) que muestra la *figura 1.31*.

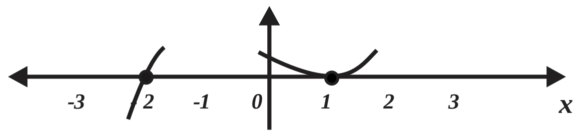


FIGURA 1.31

□

COMPORTAMIENTO EXTREMO

El comportamiento “extremo” (asignaciones a la variable x de valores extremadamente grandes, ya sea positivas, negativas o ambas) de la función polinomial $p(x)=a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0$ depende de la combinación del signo de a_n (coeficiente del término dominante) y de la paridad del grado n (par o impar) de la función polinomial.

Si a la variable x le asignamos valores extremadamente grandes (ya sean positivos o negativos), entonces la curva correspondiente presenta uno de los comportamientos mostrados en la *figura 1.32*. Tal comportamiento se conoce como “comportamiento extremo”.

PARA REFLEXIONAR

¿? Fundamente la afirmación hecha en el párrafo anterior.

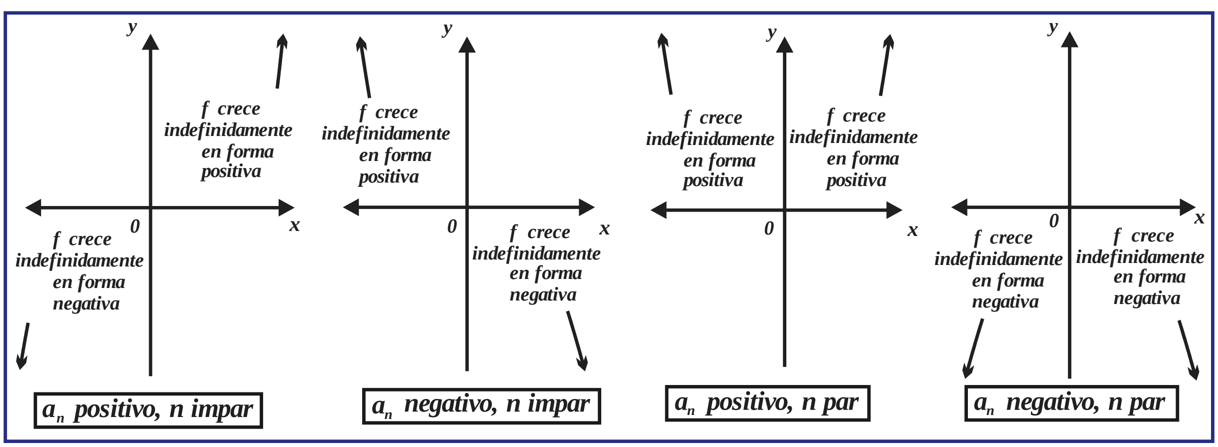


FIGURA 1.32

EJEMPLO 1.36 (Comportamiento extremo)

a. $p(x)=-3x^3-9x^2-9x-10$ es de grado $n=3$ y tiene término dominante $a_3=-3$.

Si asignamos a x “números positivos extremadamente grandes”, p asume “números negativos extremadamente grandes”.
Si asignamos a x “números negativos extremadamente grandes”, p asume “números positivos extremadamente grandes”.
Vea la *figura 1.33*.

b. $p(x)=-\frac{8}{15}x^4-6x^2-x+2$ es de grado $n=4$ y tiene término dominante $a_3=-\frac{1}{18}$, por tanto:

Si asignamos a x “números positivos extremadamente grandes”, p asume “números negativos extremadamente grandes”.
Si asignamos a x “números negativos extremadamente grandes”, p asume “números negativos extremadamente grandes”.
Vea la *figura 1.34*.

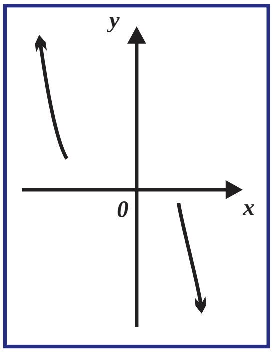


FIGURA 1.33

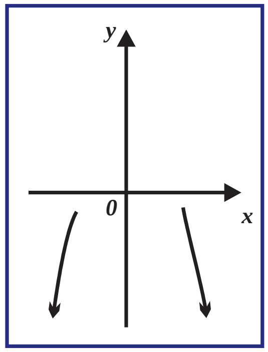


FIGURA 1.34

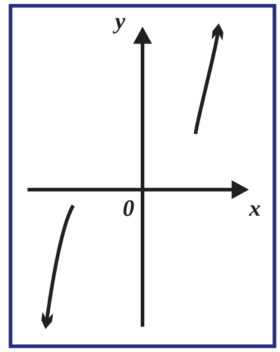


FIGURA 1.35

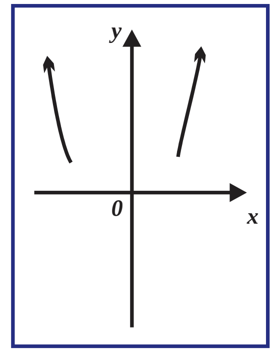


FIGURA 1.36

c. En $p(x)=x^3-108x^2-9x-7$, entonces $a_3=1$ y $n=3$.
Si asignamos a x "números positivos extremadamente grandes", p asume "números positivos extremadamente grandes".
Si asignamos a x "números negativos extremadamente grandes", p asume "números negativos extremadamente grandes".
Vea la *figura 1.35*.

d. Si $p(x)=\frac{1}{100}x^4-5x^3-90$, $a_6=\frac{1}{100}$ y $n=4$, entonces:
Si asignamos a x "números positivos extremadamente grandes", p asume "números positivos extremadamente grandes".
Si asignamos a x "números negativos extremadamente grandes", p asume "números positivos extremadamente grandes".
Vea la *figura 1.36*.

□

Todos los elementos antes estudiados se utilizan en el bosquejo (trazo aproximado) de la curva asociada a una función polinomial, en el ***algoritmo 1.5*** resumimos estas propiedades.

ALGORITMO 1.5 (BOSQUEJO DE LA CURVA ASOCIADA A UNA FUNCIÓN POLINOMIAL)

i. Determinar la intersección de p con el eje "y".
ii. Determinar los ceros reales de p y luego los puntos de intersección con el eje "x".
iii. Verificar el comportamiento de p alrededor de los ceros.
iv. A partir del término dominante determinar el comportamiento extremo de p.
v. Unir los puntos de la forma $(x, p(x))$, obtenidos en los pasos anteriores por medio de una curva "*suave y continua*".

EJEMPLO 1.37 (Bosquejo de curvas polinomiales)

a. Bosquejo de la curva asociada a $p(x)=\frac{1}{4}(x^3-2x^2-3x)$.

i. $a_0=0$ y el punto de intersección con el eje "y" es $I_y(0,0)$.

ii. Puesto que $p(x)=\frac{1}{4}(x^3-2x^2-3x)=\frac{1}{4}x(x^2-2x-3)=\frac{1}{4}x(x-3)(x+1)$ los ceros son $x=-1$, $x=0$ y $x=3$. Los puntos de intersección con el eje "x" son $I_{x1}(-1,0)$, $I_{x2}(0,0)$ y $I_{x3}(3,0)$.

iii. Comportamiento alrededor de los ceros.

INTERVALO	x_p	$p(x_p)$	p
$(-\infty,-1)$	-2	-2.5	Negativa
$(-1,0)$	-0.5	0.21875	Positiva
$(0,3)$	1	-1	Negativa
$(3,+\infty)$	4	5	Positiva

iv. En p, $a_3=\frac{1}{4}$ (coeficiente del término dominante) y $n=3$ (potencia del término dominante) es impar, entonces:
Si a x le asignamos "números positivos extremadamente grandes", p asume "números positivos extremadamente grandes". Si a x le asignamos "números negativos extremadamente grandes", p asume "números negativos extremadamente grandes". Vea la *figura 1.37*.

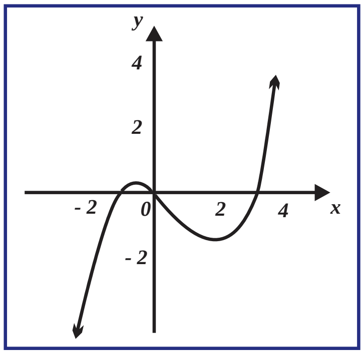


FIGURA 1.37

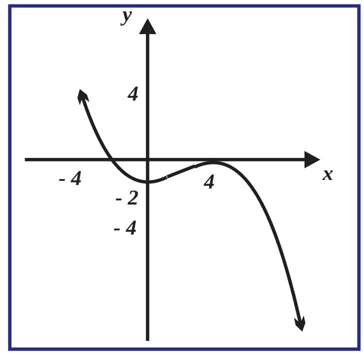


FIGURA 1.38

USO DE SOFTWARE DE MATEMÁTICAS

Trace la curva asociada a $p(x)=\frac{1}{4}\left(x^3-2x^2-3x\right)$ y verifique que coincide con lo antes descrito.

b. Bosquejo de la curva asociada a $p(x)=-\frac{1}{16}\left(x^3-6x^2+32\right)$.

i. $a_0=-2$ y el punto de intersección con el eje "y" es $I_y\left(0,-2\right)$.

ii. Puesto que $p(x)=-\frac{1}{16}\left(x^3-6x^2+32\right)=-\frac{1}{16}\left(x+2\right)\left(x-4\right)^2$, entonces los ceros son $x=-2$ y $x=4$ (con multiplicidad 2) y los puntos de intersección con el eje "x" son $I_{x1}\left(-2,0\right)$ y $I_{x3}\left(4,0\right)$.

iii. Comportamiento alrededor de los ceros.

INTERVALO	x_p	$p\left(x_p\right)$	p
$\left(-\infty,-2\right)$	-4	$+1.75$	Positiva
$\left(-2\ ,\ 4\right)$	0	-2	Negativa
$\left(4\ ,\ +\infty\right)$	6	-1	Negativa

iv. En p, $a_3=-\frac{1}{16}$ (coeficiente del término dominante) y $n=3$ (potencia del término dominante) es impar, entonces:

Si a x le asignamos "números positivos extremadamente grandes", p asume "números negativos extremadamente grandes".
Si a x le asignamos "números negativos extremadamente grandes", p asume "números positivos extremadamente grandes". Vea la *figura 1.38*.

USO DE SOFTWARE DE MATEMÁTICAS

Trace la curva asociada a $p(x)=-\frac{1}{16}\left(x^3-6x^2+32\right)$ y verifique que coincide con lo antes descrito.

c. Bosquejo de la curva asociada a $p(x)=2x^4-x^3-19x^2+9x+9$.

i. $a_0=9$ y el punto de intersección con el eje "y" es $I_y\left(0,9\right)$.

ii. $a_4=2$ y $a_0=9$, entonces los posibles ceros racionales de p se encuentran entre ±1, ±3, ±9, $\pm\frac{1}{2}$, $\pm\frac{3}{2}$ y $\pm\frac{9}{2}$, de ellos sólo son ceros de $p(x)$ $x=-3$, $x=-\frac{1}{2}$, $x=1$ y $x=3$ (¡verifíquelo!), por tanto, los puntos de intersección con el eje "x" son $I_{x1}\left(-3,0\right)$, $I_{x2}\left(-\frac{1}{2},0\right)$, $I_{x3}\left(1,0\right)$ y $I_{x4}\left(3,0\right)$.

iii. Comportamiento alrededor de los ceros.

INTERVALO	x_p	$p\left(x_p\right)$	p
$\left(-\infty,-3\right)$	-4	265	Positiva
$\left(-3\ ,\ -\frac{1}{2}\right)$	-2	-45	Negativa
$\left(-\frac{1}{2}\ ,\ 1\right)$	0	9	Positiva
$\left(1\ ,\ 3\right)$	2	-45	Negativa
$\left(3\ ,\ +\infty\right)$	4	189	Positiva

iv. En p, $a_4=2$ (coeficiente del término dominante) y $n=4$ (grado de la función) es par.

Si a x le asignamos "números positivos extremadamente grandes", entonces p asume "números positivos extremadamente grandes".
Si a x le asignamos "números negativos extremadamente grandes", entonces p asume "números positivos extremadamente grandes". Vea la *figura 1.39*.

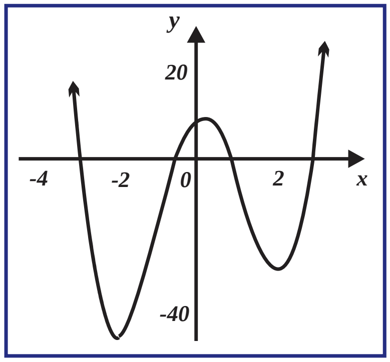


FIGURA 1.39

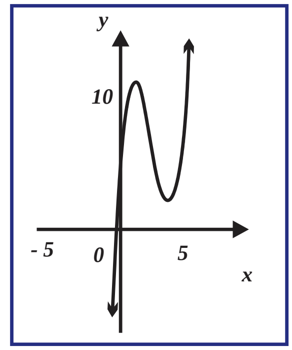


FIGURA 1.40

USO DE SOFTWARE DE MATEMÁTICAS

Trace las curvas asociada a $p(x) = 2x^4 - x^3 - 19x^2 + 9x + 9$ y verifique que coincide con lo antes descrito.

d. Bosquejo de la curva asociada a $p(x) = 3x^3 - 14x^2 + 15x + 6$.

i. $a_0 = 6$ y el punto de intersección con el eje "y" es $I_y(0, 6)$.

ii. $a_3 = 3$ y $a_0 = 6$, entonces los posibles ceros racionales se encuentran entre los números ± 1, ± 2, ± 3, ± 6, $\pm \frac{1}{3}$ y $\pm \frac{2}{3}$. Sólo $x = -\frac{1}{3}$ lo es (¡verifíquelo!). El punto de intersección con el eje "x" es $I_{x1}\left(-\frac{1}{3}, 0\right)$.

iii. Comportamiento alrededor de los ceros.

INTERVALO	x_p	$p(x_p)$	p
$\left(-\infty, -\frac{1}{3}\right)$	–4	265	Positiva
$\left(-\frac{1}{3}, +\infty\right)$	2	–45	Negativa

También, si $x = -1$, $p(-1) = 3(-1)^3 - 14(-1)^2 + 15(-1) + 6 = -26$.

$$p(1) = 3(1)^3 - 14(1)^2 + 15(1) + 6 = 10.$$
$$p(2) = 3(2)^3 - 14(2)^2 + 15(2) + 6 = 4.$$
$$p(4) = 3(4)^3 - 14(4)^2 + 15(4) + 6 = 34.$$

iv. En p, $a_3 = 3$ (coeficiente del término dominante) y $n = 3$ (grado de la función) es impar, entonces:

Si a x le asignamos "números positivos extremadamente grandes", p asume "números positivos extremadamente grandes".

Si a x le asignamos "números negativos extremadamente grandes", p asume "números negativos extremadamente grandes".

Vea la *figura 1.40*.

USO DE SOFTWARE DE MATEMÁTICAS

Trace la curva asociada a $p(x) = 3x^3 - 14x^2 + 15x + 6$ y verifique que coincide con lo antes descrito.

e. Bosquejo de la curva asociada a $p(x) = -\frac{1}{6}\left(x^4 - 5x^3 + 5x^2 + 5x - 6\right)$.

i. $a_0 = 1$ y el punto de intersección con el eje "y" es $I_y(0, 1)$.

ii. Los ceros de p son $x = -1$, $x = 1$, $x = 2$ y $x = 3$ (verifíquelo), entonces los puntos de intersección de la curva asociada a p con el eje "x" son: $I_{x1}(-1, 0)$, $I_{x2}(1, 0)$, $I_{x3}(2, 0)$ y $I_{x4}(3, 0)$.

iii. Comportamiento alrededor de los ceros.

INTERVALO	x_p	$p(x_p)$	p
$(-\infty, -1)$	–2	–10	Negativa
$(-1, 1)$	0	1	Positiva
$(1, 2)$	1.5	–0.16	Negativa
$(2, 3)$	2.5	0.225	Positiva
$(3, +\infty)$	4	–5	Negativa

iv. En p: $a_4 = -\frac{1}{6}$ y $n = 4$ es par, entonces:

Si asignamos a x "números positivos extremadamente grandes", p asume "números negativos extremadamente grandes".

Si asignamos a x "números negativos extremadamente grandes", p asume "números negativos extremadamente grandes". Vea la *figura 1.41*.

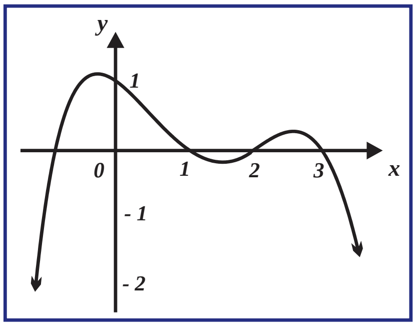


FIGURA 1.41

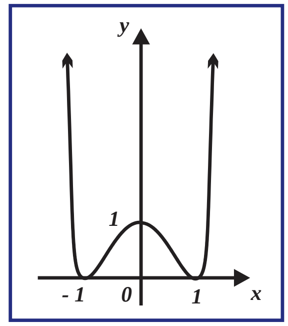


FIGURA 1.42

USO DE SOFTWARE DE MATEMÁTICAS

Trace la curva asociada a $p(x) = -\frac{1}{6}\left(x^4 - 5x^3 + 5x^2 + 5x - 6\right)$ y verifique que coincide con lo antes descrito.

f. Bosquejo de la curva asociada a $p(x) = x^4 - 2x^2 + 1$.

i. $a_0 = 1$ y el punto de intersección con el eje "y" es $I_y\,(0, 1)$.

ii. Los ceros de p son $x = -1$ y $x = 1$, ambos con multiplicidad 2 (verifíquelo), entonces los puntos de intersección de la curva asociada a p con el eje "x" son: $I_{x1}\,(-1, 0)$ y $I_{x2}\,(1, 0)$.

iii. Comportamiento alrededor de los ceros.

INTERVALO	x_p	$p(x_p)$	p
$(-\infty, -1)$	-2	9	Positiva
$(-1, 1)$	0	1	Positiva
$(1, +\infty)$	2	9	Positiva

iv. En p: $a_4 = 1$ y $n = 4$ es par, así:

Si asignamos a x "números positivos extremadamente grandes", p asume "números positivos extremadamente grandes".

Si asignamos a x "números negativos extremadamente grandes", p asume "números positivos extremadamente grandes".

Vea la *figura 1.42*.

USO DE SOFTWARE DE MATEMÁTICAS

Trace las curvas asociada a $p(x) = x^4 - 2x^2 + 1$ y verifique que coincide con lo antes descrito.

□

Fundamentándonos en el teorema del factor, e interpretando un conjunto (finito) de números como los ceros de una función, es posible construir la regla de correspondencia de al menos una función polinomial (en realidad existen un número indeterminado de funciones cuyos ceros coinciden).

EJEMPLO 1.38 (Construcción de funciones polinomiales)

a. Para construir la regla de correspondencia de una función polinomial con ceros en $x_{01} = 2$, $x_{02} = -2$, $x_{03} = 1$ y $x_{04} = -1$, generamos los factores $x_{01} - 2 = 0$, $x_{02} + 2 = 0$, $x_{03} - 1 = 0$ y $x_{04} + 1 = 0$, luego los multiplicamos $f(x) = (x-2)(x+2)(x-1)(x+1)$, finalmente desarrollamos y simplificamos, obtenemos $f(x) = x^4 - 5x^2 + 4$ (**evidentemente existen más funciones polinomiales con estas características**). Si deseamos bosquejar su gráfica:

i. $a_0 = 4$ y el punto de intersección con el eje "y" es $I_y\,(0, 4)$.

ii. Los ceros son $x_{01}=2$, $x_{02}=-2$, $x_{03}=1$ y $x_{04}=-1$. Los puntos de intersección con el eje "x" son: $I_{x1}(2,0)$, $I_{x2}(-2,0)$, $I_{x3}(1,0)$, $I_{x4}(-1,0)$.

iii. Comportamiento alrededor de los ceros.

INTERVALO	x_p	$f(x_p)$	f
$(-\infty,-2)$	–2.5	–2.1875	Negativa
$(-2,-1)$	–1.5	2.8125	Positiva
$(-1,1)$	0	4	Positiva
$(1,2)$	1.5	2.8125	Positiva
$(2,+\infty)$	2.5	–2.1875	Negativa

iv. En f, $a_4=1$ y $n=4$ es par, entonces:

Si asignamos a x "números positivos extremadamente grandes", f asume "números positivos extremadamente grandes".

Si asignamos a x "números negativos extremadamente grandes", f asume "números positivos extremadamente grandes".

Vea la *figura 1.43.*

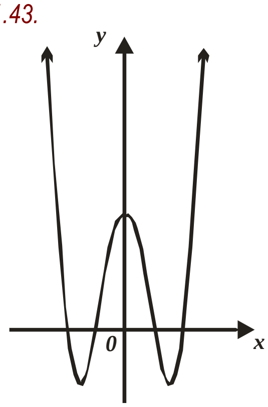


FIGURA 1.43

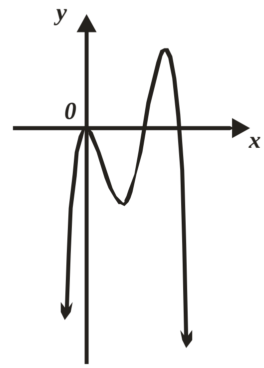


FIGURA 1.44

b. En la construcción de una función polinomial f con ceros en: $x_{01}=0$, $x_{02}=2$ y $x_{03}=4$, de grado cuatro.

Construimos los factores lineales $x_{01}-0=0$, $x_{02}-2=0$ y $x_{03}-4=0$, uno de ellos debe ser de grado dos, por tanto $f(x)=-\frac{1}{3}(x-0)^2(x-2)(x-4)$, al desarrollar se obtiene $f(x)=-\frac{1}{3}x^4+2x^3-\frac{8}{3}x^2$ (existen más funciones polinomiales con estas características), para trazar su curva asociada procedemos como sigue:

i. $a_0=0$, el punto de intersección con el eje "y" es $I_y(0,0)$.

ii. Los ceros de $f(x)=-\frac{1}{3}(x-0)^2(x-2)(x-4)$ son $x_{01}=0$, $x_{02}=2$, $x_{03}=4$. Los puntos de intersección con el eje "x" son $I_{x1}(0,0)$, $I_{x2}(2,0)$ y $I_{x3}(4,0)$.

iii. Si $x=1$, $f(1)=-1$; si $x=3$, entonces $f(3)=3$.

iv. En $f(x)$: $a_4=-\frac{1}{3}$ y $n=4$ es par, así:

Si a x le asignamos "números positivos extremadamente grandes", f asume "números negativos extremadamente grandes".

Si a x le asignamos "números negativos extremadamente grandes", f asume "números negativos extremadamente grandes".

Vea la *figura 1.44.*

c. Deseamos conocer la regla de correspondencia de una función polinomial con las siguientes características: grado 3, ceros en $x_{01}=2$, $x_{02}=-1$ y $x_{03}=3$, e interseque al eje y en $f(0)=4$.

La función polinomial, una vez que ha sido factorizada tiene la forma $f(x)=a(x-2)(x+1)(x-3)$. Puesto que se cumple $f(0)=4$, entonces $4=a(0-2)(0+1)(0-3)$, es decir $4=6a$ o $a=\frac{2}{3}$. La regla de correspondencia de la función es $f(x)=\frac{2}{3}(x-2)(x+1)(x-3)=\frac{2}{3}x^3-\frac{8}{3}x^2+\frac{2}{3}x+4$.

d. Deseamos conocer la regla de correspondencia de una función polinomial f con las siguientes características: grado 3, ceros en $x_{01}=-3$ con multiplicidad 2 y $x_{02}=4$, además que contenga al punto $A(0,72)$. La función polinomial tiene factores $(x+3)^2$ y $(x-4)$, por tanto su regla de correspondencia es $f(x)=a(x+3)^2(x-4)$. Para determinar el valor de a utilizamos el hecho de que contiene al punto $A(0, 72)$, es decir $f(0)=72$. Entonces $72=a(0+3)^2(0-4)=-36a$, por tanto $a=-2$.

La regla de correspondencia de la función es $f(x)=-2(x+3)^2(x-4)=-2x^3-4x^2+30x+72$.

□

¿Qué conceptos aprendí?

PARA COMPLETAR

1. El grado de una función polinomial es ____.

2. En una función polinomial el término dominante(o término líder) se caracteriza por ______________________________________.

3. Los ceros de una función polinomial coinciden con las ______________________________________de los puntos en que la curva correspondiente interseca al eje de las ______________________________.

4. En caso de existir, el coeficiente independiente de una función polinomial coincide con _________________ ________________________ de la curva asociada con el eje de las ordenadas.

5. Los ceros del polinomio denominador de una función racional reducible se manifiestan como ______________en la curva correspondiente.

6. La propiedad: si $d(x)$ y $p(x)\neq 0$ son polinomios, entonces existen los polinomios únicos $c(x)$ y $r(x)$ tales que $p(x)=c(x)d(x)+r(x)$, $r(x)=0$, o bien, $r(x)$ tiene un grado menor que $p(x)$, recibe el nombre de ______________________________________.

7. La ____ tiene un factor $x-x_0$ si y sólo si $p(x_0)=0$.

8. Si $p(x_0)=0$, entonces ____________________________ es un factor de $p(x)$.

9. Si $p(x_0)=m$, entonces m es _______________________de _________________.

10. Si el cero de la función polinomial se repite n veces se dice que su _______________________es n.

11. Si p es una función polinomial ______________________, entonces p tiene n factores lineales.

12. Sea f una función polinomial, con coeficientes enteros, coeficiente dominante $a_n\neq 0$, coeficiente independiente $a_0\neq 0$; si la fracción irreducible $\frac{p}{q}$ es uno de los sus ceros, entonces____.

13. El comportamiento extremo de una función polinomial lo determina el _________________________________.

CIERTO O FALSO (Justifique su respuesta)

1. Todas las funciones polinomiales tienen término independiente.

2. EL grado de una función polinomial es superior al número de sus ceros.

3. Todas las funciones polinomiales tienen como dominio al conjunto de los números reales.

4. Todas las funciones polinomiales tienen como dominio al conjunto de los números reales.

5. Existen funcione polinomiales que no tienen ceros.

6. La curva asociada a una función polinomial interseca al eje de las abscisas.

7. Todas las funciones polinomiales tienen ceros racionales.

8. Todas las funciones polinomiales tienen asociada una curva que interseca al eje de las abscisas.

9. El comportamiento para asignaciones extremas en una función polinomial es extremo.

PROBLEMAS PROPUESTOS 2.2

1. Determine: la variable, el grado, los coeficientes y los términos de las siguientes funciones.

a. $f(x)=\frac{1}{4}x^4+6x^2-x+2$.

b. $g(w)=-2w^{10}-4w^2-15$.

c. $h(z)=\pi z^6-13z^3-2$.

d. $i(x)=x^7-\frac{x}{2}-mx$.

e. $j(x)=9ax^5-10x^3$

f. $p(x)=x^{n+2}-26x^n-x+a_0$.

g. $q(r)=r^{41}-2r^8-br+b_0$.

2. Evalúe la función en la “variable señalada, describa las características de la función obtenida (variable, grado, términos, coeficiente dominante, término independiente).

a. $f(x)=x^2-2x$ en $x=z^2+2$.

b. $f(x)=x^3+1$ en $x=w^2-1$.

c. $f(x)=2x^4-x$ en $x=2m-1$.

d. $f(x)=x^2-2x$ en $x=4z+5$.

3. Desarrolle y describa las características de la función (variable, grado, coeficiente dominante y coeficiente independiente).

a. $f(x)=(x-1)(x+1)(2x-1)$.

b. $f(x)=(x-11)(2x+4)(6x-1)$.

c. $f(x)=(x^2-1)(x^2+3x+2)$.

d. $f(x)=(x^2-4x+3)(x^2+8x+7)$.

e. $f(t)=\left(t^2-\frac{1}{4}\right)\left(t^2-\frac{1}{9}\right)$.

f. $f(t)=(3t-1)(2t+1)\left(t-\frac{1}{2}\right)$.

4. Sea $f(x)=x^2$ desarrolle y simplifique:

a. $f(f(x))$.

b. $f(f(f(x)))$.

5. Sea $f(x)=x^2+1$ desarrolle y simplifique:

a. $f(f(x))$.

b. $f(f(f(x)))$.

6.

a. Si $f(x)=a_3x^3+a_1x^1$, verifique $f(x)=-f(-x)$

b. Si $f(x)=a_8x^8+a_6x^8+a_4x^4+a_2x^2+a_0$, verifique $f(x)=-f(-x)$.

7. Determine los valores de x en los que se intersecan las curvas asociadas a los pares de funciones:

a. $f(x)=x^3-x^2+2$ y $g(x)=2$. **b.** $f(x)=x^3-3x^2+3x+1$ y $g(x)=1$.

c. $f(x)=x^4-2x^2$ y $g(x)=-1$.

d. $g(x)=2x^4+4x^2$ y $g(x)=0$.

8. ¿Cuáles de los siguientes pares de funciones tienen curvas que se intersecan?

a. $p(x)=x^3-2x$ y $r(x)=4x$.

b. $p(x)=4x^3-x$ y $r(x)=2x^3$.

c. $p(x)=x^4+2x^2-1$ y $r(x)=-2$.

d. $p(x)=-2x^4-4$ y $r(x)=0$.

9. ACTIVIDAD (Uso de las funciones polinomiales)
El número “e” es uno de los números más importantes en matemáticas y su valor puede aproximarse utilizando funciones polinomiales.

a. La aproximación al número “e” por medio de la función polinomial $f(x)=e^x\approx 1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{2}$ se llama “aproximación cuadrática”. Determínela.

b. La aproximación al número “e” por medio de la función polinomial $f(x)=e^x\approx 1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}$ se llama “aproximación cubica”. Determínela.

c. La aproximación al número “e” por medio de la función polinomial $f(x)=e^x\approx 1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{24}$ se llama “aproximación cuartica”. Determínela.

10. ACTIVIDAD (Uso de las funciones polinomiales)
Considere que $f(x)=e^x\approx 1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{24}$

a. Aproxime “e^{-1}” por medio de la función polinomial $f(x)=e^x\approx 1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{2}$ (“aproximación cuadrática”).

b. Aproxime "e^{-1}" por medio de la función polinomial $f\left(x\right)=e^{x}\approx 1+\frac{x}{1}+\frac{x^{2}}{2}+\frac{x^{3}}{6}$ se llama "aproximación cúbica". Determínela.

c. Aproxime "e^{-1}" por medio de la función polinomial $f\left(x\right)=e^{x}\approx 1+\frac{x}{1}+\frac{x^{2}}{2}+\frac{x^{3}}{6}+\frac{x^{4}}{24}$ se llama "aproximación cuartica". Determínela.

11. ¿Cuál es el valor máximo de la función? Explique.

a. $f\left(x\right)=-6x^{4}-2x^{2}+4$.

b. $f\left(x\right)=-4x^{4}-8x^{2}+10$

c. $f\left(x\right)=-2x^{6}-4x^{2}+12$.

d. $f\left(x\right)=3-x^{6}$.

12. ¿Cuál es el valor mínimo? Explique.

a. $p\left(x\right)=\frac{2}{3}x^{4}+2x^{2}-2$. **b.** $p\left(x\right)=6x^{4}+x^{2}+10$.

c. $p\left(x\right)=\frac{1}{6}x^{6}+4x^{2}+12$. **d.** $p\left(x\right)=x^{8}+x^{6}$.

13. Determine todos los ceros. Verifique sus resultados evaluando directamente y luego utilizando una división.

a. $f\left(x\right)=\frac{1}{10}\left(x+2\right)\left(x-3\right)^{2}$.

b. $f\left(x\right)=\left(2x+2\right)\left(4x-8\right)^{2}$.

c. $f\left(x\right)=x^{2}\left(6x-12\right)\left(x-1\right)$.

d. $f\left(x\right)=\left(x+1\right)\left(x+3\right)\left(x-6\right)$.

e. $f\left(x\right)=\left(4-2x\right)\left(2x+6\right)\left(2x-1\right)$.

f. $f\left(x\right)=2x^{3}-3x^{2}-5x-12$.

g. $f\left(x\right)=2x^{3}+3x^{2}-8x+3$.

14. Utilice la división de polinomios y exprese el polinomio dividendo en la forma $p\left(x\right)=c\left(x\right)\cdot d\left(x\right)+r$.

a. $x+2\;\overline{\big)\,x^{3}+x^{2}-4x-4}$.

b. $x-2\;\overline{\big)\,8x^{3}+x^{2}-10x-4}$.

c. $x+3\;\overline{\big)\,x^{4}-3x^{3}+2x^{2}-7x-4}$.

d. $x+1\;\overline{\big)\,x^{5}-4x^{4}-x^{3}+x^{2}+2x-4}$.

e. $x+4\;\overline{\big)\,x^{4}+x^{3}+x^{2}-14x-4}$.

f. $x-1\;\overline{\big)\,4x^{5}-x^{4}+x^{3}-10x^{2}-4}$.

g. $x+2\;\overline{\big)\,x^{4}-3x^{3}+2x^{2}+17x-4}$.

h. $x-3\;\overline{\big)\,x^{5}-4x^{4}-x^{3}+x^{2}+2x-4}$.

i. $x-5\;\overline{\big)\,x^{4}-4}$.

j. $x-1\;\overline{\big)\,x^{8}-9}$.

k. $x+2\;\overline{\big)\,2x^{8}+32}$.

l. $x-2\;\overline{\big)\,4x^{5}-64}$.

m. $\frac{x^{4}+x^{3}+x^{2}-14x-4}{x+4}$.

n. $\frac{4x^{5}-8x^{3}+x^{2}-10x-4}{x-1}$.

o. $\frac{x^{4}-4}{x-1}$.

p. $\frac{x^{4}-3x^{3}+2x^{2}+17x-4}{x+2}$.

q. $\frac{x^{5}-4x^{4}-x^{3}+x^{2}+2x-4}{x-1}$.

r. $\frac{x^{8}-1}{x-1}$.

s. $x+1\;\overline{\big)\,x^{5}+1}$.

15. Utilice división sintética y exprese la función f en la forma $f\left(x\right)=c\left(x\right)\cdot d\left(x\right)+r$.

a. $f\left(x\right)=x^{4}-9x^{2}+4x+12$, $d\left(x\right)=x-2$.

b. $f\left(x\right)=2x^{4}-x^{3}-11x^{2}+4x+12$, $d\left(x\right)=2x+1$.

c. $f\left(x\right)=4x^{4}-3x^{3}-4x+3$, $d\left(x\right)=x-2$.

d. $f\left(x\right)=x^{3}+x^{2}-x-1$, $d\left(x\right)=x+3$.

e. $f\left(x\right)=x^{3}+\frac{11}{2}x^{2}+5x-4$, $d\left(x\right)=x+4$.

f. $f\left(x\right)=x^{3}+\frac{33}{4}x^{2}+14x+3$, $d\left(x\right)=x+6$.

g. $f\left(x\right)=x^{3}+4x^{2}+x-2$, $d\left(x\right)=x+1$.

h. $f\left(x\right)=-x^{4}+x^{3}+11x^{2}-9x-18$, $d\left(x\right)=-x-1$.

i. $f\left(x\right)=x^{4}-\frac{9}{2}x^{3}-2x^{2}+18x-8$, $d\left(x\right)=\frac{1}{2}x-2$.

16. Utilice el algoritmo de la división sintética y luego verifique que $f\left(x_{0}\right)=r$

a. $f\left(x\right)=x^{3}-x^{2}-14x+12$, sí $x_{0}=4$.

b. $f\left(x\right)=x^{3}-5x^{2}-11x+10$, sí $x_{0}=-2$.

c. $f\left(x\right)=15x^{4}+10x^{3}-6x^{2}+14$, sí $x_{0}=-\frac{2}{3}$.

17. Utilice la división sintética para verificar que el (los) número(s) indicado(s) es (son) raíz de la ecuación polinomial, posteriormente factorícela.

a. $2x^{3}-14x+12=0$, $x_{0}=2$.

b. $2x^{3}+6x^{2}-96x-288=0$, $x_{0}=-3$.

c. $x^{3}-14x+13=0$, $x_{0}=1$.

d. $x^{4}-4x^{3}-15x^{2}+58x-40=0$, $x_{01}=5$ y $x_{02}=-4$.

e. $8x^{4}-14x^{3}-71x^{2}-10x+24=0$, $x_{01}=-2$ y $x_{02}=4$.

18. Las asignaciones a x_{0} son ceros de f, determine los ceros restantes y de ser posible factorice linealmente.

a. $f\left(x\right)=x^{4}-9x^{2}+4x+12$, $x_{0}=-1$.

b. $f(x) = 2x^4 - x^3 - 11x^2 + 4x + 12$, si $x_{01} = 2$ y $x_{02} = -1$.

c. $f(x) = 4x^4 - 3x^3 - 4x + 3$, si $x_{01} = 1$ y $x_{02} = \frac{3}{4}$.

19. Factorice utilizando factores lineales.

a. $f(x) = 6x^3 - 22x^2 + 12x$.

b. $f(x) = x^3 - 5x^2 + 6$.**c.** $f(x) = x^3 - 36x$.

d. $f(x) = x^3 + 2x^2 - 109x - 110$.

e. $f(x) = x^3 - 4x^2 - 44x + 96$.

20. Determine las raíces reales.

a. $x^3 + 2x^2 - 5x - 6 = 0$.

b. $2x^3 + x^2 + 2x + 1 = 0$.

c. $2x^3 - 3x^2 - 2x + 3 = 0$.

d. $4x^4 + x^2 - 5 = 0$.

21. Determine los posibles ceros racionales.

a. $f(x) = x^4 - x^2 + 4x + 4$.

b. $f(x) = 2x^4 - 2x^3 - 4x^2 + 4x + 8$.

c. $f(x) = 2x^4 - x^3 - 4x + 4$.

d. $f(x) = x^7 - 2x^6 - 6x^5 + x^4 - 2$.

e. $f(x) = x^3 + x^2 - x - 1$.

f. $f(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 6x + 2$.

g. $f(x) = x^3 - 4x^2 + 4x - 1$.

h. $f(x) = x^3 + 3x^2 - 3x - 5$.

i. $f(x) = x^4 - 4x^3 - 2x^2 + 12x - 8$.

22. Bosqueje la gráfica.

a. $f(x) = (2 - x)(x - 2)(x - 1)$.

b. $f(x) = 3x(2x - 1)(3x + 3)$.

c. $f(x) = -x(4x - 3)(2x + 4)$.

d. $f(x) = (x + 1)^2(x - 3)$.

e. $f(x) = x^2(x - 1)^2$.

f. $f(x) = (x - 1)^2(x - 4)^2$.

23. Bosqueje la gráfica (Determine: las intersecciones con los ejes coordenados, el comportamiento para valores extremos y los intervalos donde es positiva e intervalos donde es negativa).

a. $f(x) = x^3 - x^2 - 6x$.

b. $f(x) = -4x^3 + 12x^2 - 12x$.

c. $f(x) = x^3 - 2x^2 - 11x + 12$.

d. $f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$.

e. $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 5x - 12$.

f. $f(x) = x^3 - 4x^2 - x + 4$.

g. $f(x) = x^3 + 12x^2 + 21x + 10$.

h. $f(x) = -x^3 + 4x^2 - 5x + 2$.

i. $f(x) = x^4 - 3x^2 + 2$.

j. $f(x) = -x^4 - \frac{9}{4}x^3 + \frac{13}{2}x^2 - \frac{9}{4}x - 1$.

k. $f(x) = 3x^4 - \frac{28}{5}x^3 - 46x^2 - \frac{28}{5}x + 3$.

l. $p(x) = -3x^4 - 4x^3 + 3x + 4$.

m. $p(x) = 2x^4 - 11x^3 - 6x^2 + 64x + 32$.

n. $f(x) = x^4 - \frac{16}{3}x^3 - \frac{1}{3}x^2 + \frac{74}{3}x - 8$.

o. $f(x) = x^4 + \frac{3}{4}x^3 - \frac{41}{4}x^2 - \frac{21}{2}x - 2$.

24. Construya una función polinomial que satisfaga las condiciones (hay muchas respuestas correctas).

a. Grado tres y único cero $x = -1$.

b. Ceros en $x = 1$ y $x = \frac{1}{4}$ con multiplicidades uno y tres respectivamente.

c. Ceros en $x = \frac{1}{2}$, $x = 0$ y $x = 2$ con multiplicidades uno, uno y dos respectivamente.

d. Ceros en $x = -1$, $x = 1$ y $x = -3$ con multiplicidades uno, dos y dos respectivamente.

25. Construya una función polinomial que satisfaga las condiciones (hay muchas respuestas correctas)

a. Grado tres, con ceros en $x = -2$, $x = 0$ y $x = 2$, que interseque al eje de las ordenadas en $y = -2$.

b. Grado tres, con ceros en $x = 5$, $x = 8$ y $x = 2$, que interseque al eje de las ordenadas en $y = 4$.

c. Grado cuatro, con ceros en $x = -4$, $x = 6$ y $x = 2$ que interseque al eje de las ordenadas en $y = -1$.

d. Grado cuatro, con ceros en $x = -8$, $x = -3$, $x = 0$ y $x = 2$, que interseque al eje de las ordenadas en $A(0, 3)$.

e. Grado cuatro, con ceros en $x = -2$, $x = 1$, que interseque al eje de las ordenadas en $A(0, 1)$.

26. Determine la regla de correspondencia de una función polinomial con las siguientes características:

a. Grado tres, interseque al eje "y" en -4, tenga ceros en -2, 1 y 5.

b. Grado tres, interseque al eje en "y" en 3, tenga ceros en -3, 1 y 2.

c. Grado cuatro, interseque al eje "y" en 8, tenga ceros en -1 (de multiplicidad 2) y 2 (de multiplicidad 2).

27. Determine la regla de correspondencia de una función polinomial con las siguientes características:

a. Grado tres, contenga al punto $A(2, -1)$, tenga ceros en -1, 1 y 6.

b. Grado tres, contenga al punto $A(1, 3)$, tenga ceros en -2, 2 y 4.

c. Grado cuatro, contenga al punto $A(1, 3)$, tenga ceros en 2 (de multiplicidad 2) y 4 (de multiplicidad 2).

28. Utilice la información contenida en la tabla y responda las preguntas. Explique su respuesta.

INTERVALO	f
$(-\infty,-2)$	Positiva
$(-2\ ,\ 1)$	Negativa
$(1\ ,\ 2)$	Negativa
$(2\ ,\ +\infty)$	Positiva

a. ¿Cuáles son los ceros de f ?
b. ¿Cuál es el menor grado posible de f ?
c. ¿Qué puede decir del comportamiento de la curva asociada a f en $x_0 = 1$?
d. ¿Puede ser impar el grado de f ?
e. ¿Cuál es el signo del término dominante?
f. Trace una curva que satisfaga las condiciones de la tabla.

29. Utilice la información contenida en la tabla y responda las preguntas.

INTERVALO	f
$(-\infty,-5)$	Positiva
$(-5\ ,\ -1)$	Negativa
$(-1\ ,\ 1)$	Positiva
$(1\ ,\ 2)$	Negativo
$(2\ ,\ +\infty)$	Positiva

a. ¿Cuáles son los ceros de f ?
b. ¿Cuál es el menor grado posible de f ? Explique su respuesta.
c. ¿Cuál es el signo del término dominante? Explique su respuesta.
d. Trace una curva que satisfaga las condiciones de la tabla.

30. Utilice la información contenida en la tabla y responda las preguntas.

INTERVALO	$f(x)$
$(-\infty,-4)$	Negativa
$(-4\ ,\ 1)$	Positiva
$(1\ ,3)$	Negativa
$(3\ ,\ +\infty)$	Positiva

a. ¿Cuáles son los ceros de f ?
b. ¿Cuál es el menor grado posible de f ? Explique su respuesta.
c. ¿Cuál es el signo del término dominante? Explique su respuesta.
d. Trace una curva que satisfaga las condiciones de la tabla y que interseque al eje y en $I_y(0,3)$.

31. Una función polinomial de tercer grado interseca al eje de las abscisas en $I_{x1}(-4,0)$, $I_{x2}(1,0)$ y $I_{x3}(6,0)$, interseca al eje de las ordenadas en $I_y(0,8)$ y el signo del término dominante es positivo. ¿Cuál es su regla de correspondencia?

32. Una función polinomial de cuarto grado interseca al eje de las abscisas en $I_{x1}(2,0)$ y $I_{x2}(5,0)$, interseca al eje de las ordenadas en $I_y(0,-3)$ y el signo del término dominante es negativo. ¿Cuál es una posible regla de correspondencia?

33. ¿Cuál debe ser el valor de k para que la función $p(x) = 2x^3 + 6x^2 - k$, tenga un cero de multiplicidad dos en $x_0 = -2$ y un cero de multiplicidad uno en $x_0 = 1$, e interseque al eje de las ordenadas en $I_y(0,-8)$.

34. ¿Cuál debe ser el valor de a_3 para que la función $p(x) = a_3x^3 - 4x^2 - 20x - 12$, tenga un cero de multiplicidad uno en $x_{01} = 3$ y un cero de multiplicidad dos en $x_{02} = -1$ e interseque al eje de las ordenadas en $I_y(0,-12)$.

35. Trace la gráfica de una función polinomial de grado 3 ,tal que:
a. No tenga ceros.
b. Tenga un sólo cero.
c. Tenga sólo dos ceros.
d. Tenga tres ceros.

36. Trace la gráfica de una función polinomial de grado 4, que satisfaga la condición de que:
a. No tenga ceros.
b. Tenga un sólo cero.
c. Tenga sólo dos ceros.
d. Tenga tres ceros.
e. Tenga cuatro ceros.

AUTOEVALUACIÓN

1. Mencione las características básicas de una función polinomial.

2. Defina el término dominante de una función polinomial.

3. Enuncie el teorema del factor.

4. Establezca una relación entre el teorema del residuo y el teorema del factor.

5. Proporcione la regla de correspondencia de una función polinomial de grado tres y:
a. Sin ceros.
b. Con un cero.
c. Con dos ceros.

6. Proporcione una breve estrategia para trazar la gráfica de una función polinomial.

7. Proporcione la regla de correspondencia de una función polinomial de manera que su curva asociada crezca indefinidamente cuando la variable independiente crece indefinidamente, tanto positivamente como negativamente.

8. Trace un bosquejo de la curva asociada a la función polinomial de regla de correspondencia:
a. $f(x)=x^3-2x^2+x$. **b.** $f(x)=x^3+2x^2-x+2$. **c.** $f(x)=-x^3-2x^2+x-2$. **d.** $f(x)=x^4+x^2-2$.

9. Utilice la información contenida en la tabla y responda las preguntas.

INTERVALO	$f(x)$
$(-\infty,-2)$	Positiva
$(-2,1)$	Negativa
$(1,4)$	Positiva
$(4,+\infty)$	Negativa

a. ¿Cuáles son los ceros de f?
b. ¿Cuál es el menor grado posible de f? Explique su respuesta.
c. ¿Cuál es el signo del término dominante? Explique su respuesta.
d. Trace una curva que satisfaga las condiciones de la tabla y que interseque al eje y en $I_y(0,3)$.

10. Trace la curva a curva asociada a una función polinomial de grado 4, que satisfaga la condición de que:
a. No tenga ceros.
b. Tenga un solo cero.
c. Tenga sólo dos ceros.
d. Tenga tres ceros.
e. Tenga cuatro ceros.

1.3 FUNCIONES POLINOMIALES Y APLICACIONES

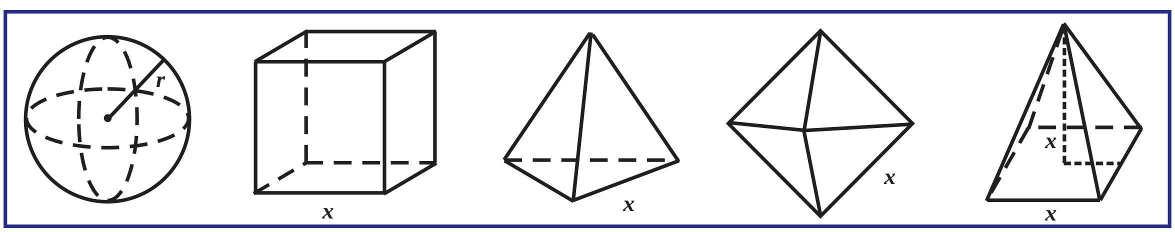
APRENDIZAJES

En el estudio de la presente sección usted:
8. Reconocerá a las funciones como modelos de variación de fenómenos naturales, económicos y sociales.
9. Resolverá problemas de aplicación.

¿Qué situaciones se modelan mediante funciones polinomiales?
Las funciones polinomiales describen, por ejemplo, el comportamiento del área y el volumen de cuerpos geométricos en términos de alguna de sus dimensiones. El *ejemplo 1.39* incluye figuras geométricas en las que el volumen está descrito por una función polinomial de grado tres.

EJEMPLO 1.39 (Funciones polinomiales y figuras geométricas)

a. La función polinomial $V(r)=\frac{4}{3}\pi r^3$ (donde $r>0$) describe el comportamiento del volumen de una esfera en función de la longitud de su radio, vea la *figura 1.46.a.*
b. La función polinomial $V(x)=x^3$ (siempre que $x>0$) describe el comportamiento del volumen de un cubo en función de la longitud de sus lados, vea la *figura 1.46.b.*
c. La función polinomial $V(x)=\frac{\sqrt{2}}{12}x^3$ (donde $x>0$) describe el comportamiento del volumen de un tetraedro en función de la longitud de sus lados, vea la *figura 1.46.c.*
d. La función polinomial $V(x)=\frac{\sqrt{2}}{4}x^3$ (donde $x>0$) describe el comportamiento del volumen de un octaedro en función de la longitud de sus lados, vea la *figura 1.46 d*.
e. La función polinomial $V(x)=\frac{1}{3}x^3$ (donde $x>0$) describe el comportamiento del volumen de una pirámide cuadrangular de altura con longitud igual a la longitud de lado de la base, vea la *figura 1.46.e.*



a. b. c. d. e.
FIGURA 1.46

□

Las combinaciones de los sólidos geométricos descritos en el *ejemplo 1.40* presentan gran utilidad en la fabricación de diversos componentes en la industria y de arquitectura.

EJEMPLO 1.40 (Funciones polinomiales y estructuras)
a. Algunas estructuras arquitectónicas (torres, almacenes, diques, etc.) están formadas por un cubo coronado por una pirámide. La función polinomial que describe el volumen de esta estructura, vea la *figura 1.47.a*, es: $V(x)=x^3+\frac{1}{3}ax^2$, donde a y x son números positivos.

b. Algunas estructuras (torres, columnas, lámparas, adornos, almacenes, etc.) están formadas por un cubo coronado por una semiesfera, vea la *figura 1.47.b.* La función polinomial que describe el volumen de estas estructuras es: $V(x)=x^3+\frac{2}{3}\pi\left(\frac{x}{2}\right)^2$, donde x representa un números positivo.

c. Estructuras arquitectónicas, remaches, envases para desodorantes, etc. Se diseñan tomando como base un cilindro coronado por una semiesfera, vea la *figura 1.47.c.* La función polinomial que describe el volumen de este tipo de estructuras es: $V(r)=\pi r^2h+\frac{2}{3}\pi\left(\frac{r}{2}\right)^3$.

d. Cajas, cofres, ataúdes, envases, etc. están formadas por un prisma rectangular coronado por un semicilindro, vea la *figura 1.47.d.* La función polinomial que describe el volumen de estas estructuras es: $V(x)=\frac{1}{2}\pi\left(\frac{x}{2}\right)^2h+x^3$, donde h y x son números positivos.

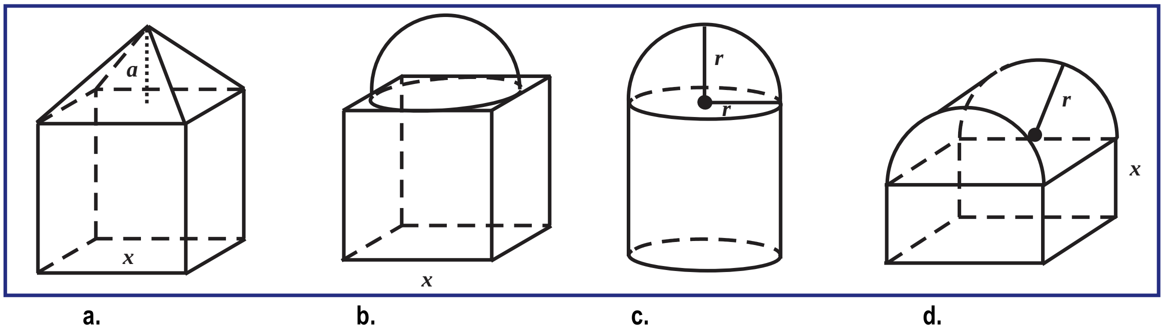


FIGURA 1.47

e. Torres, almacenes, proyectiles, adornos, etc., incluyen en su diseño un prisma triangular coronado por un tetraedro vea la *figura 1.47.e*. La función polinomial que describe el volumen de estos elementos es: $V(x)=\frac{\sqrt{2}}{12}x^3+\frac{1}{3}x^3$, donde x es un número positivo.

f. Casas, torres, cajas, etc., tienen la forma de prisma rectangular con dimensiones de medidas: x, ax y bx, coronado por un prisma triangular que tiene como base un triángulo equilátero. La función polinomial que describe el volumen de estos objetos es: $V(x)=abx^3+\frac{\sqrt{3}}{4}ax^3$, vea la *figura 1.47.f.*

g. Implementos en los que se da de comer al ganado, han sido diseñados construyendo un paralelepípedo con una concavidad en forma de prisma triangular. La función polinomial que describe el volumen de estos elementos es: $V(x)=abx^3-\frac{\sqrt{3}}{4}ax^3$, vea la *figura 1.47.g*.

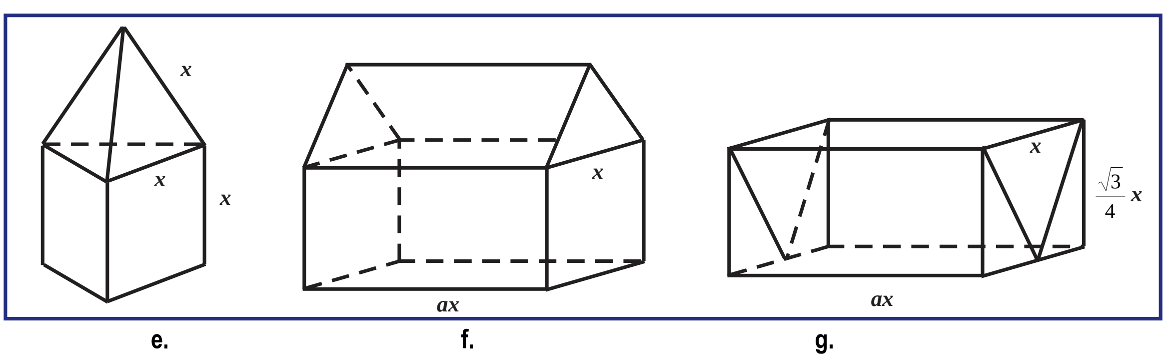


FIGURA 1.47

EJEMPLO 1.41 (Aproximaciones utilizando funciones polinomiales)
Las funciones polinomiales se utilizan en diversas ramas de las matemáticas como método de aproximación a otras funciones.

a. Aproximación de $f(x)=\frac{1}{1-x}$ en el intervalo $(-1, 1)$ por medio de una función polinomial. Al efectuar la operación

$\frac{1}{1-x}$

obtenemos $\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+\cdots$, por tanto $f(x)=\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+\cdots$, en otros cursos de matemáticas se demuestra que ésta expresión es válida cuando x pertenece al intervalo $(-1, 1)$.

b. La función "exponencial natural", que estudiaremos más adelante, cuya regla de correspondencia es $f(x)=e^x$, también puede ser escrita en términos de un función polinomial, así $f(x)=e^x=1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{24}+\cdots$.

El número representado por "e" es uno de los números más importantes en matemáticas y se denomina "número de Euler" o constante de Napier.

i. Aproximación del número "e" por medio de una función polinomial de tercer grado: $f(1)=e^1=1+1+\frac{1^2}{2}+\frac{1^3}{6}=2.666$.

ii. Aproximación del número "e" por medio de una función polinomial de cuarto grado

$$f(1)=e^1\approx 1+1+\frac{1^2}{2}+\frac{1^3}{6}+\frac{1^4}{24}\approx 2.70833\,.$$

□

EJEMPLO 1.42
a. Se pretende elaborar galletas con forma de prisma de base cuadrada. Las galletas deben tener un volumen de 9 centímetros cúbicos y su altura debe ser la tercera parte de la longitud de la base. ¿Cuáles deben ser las dimensiones del molde de la galleta?
i. La figura *1.48* muestra la forma del molde.

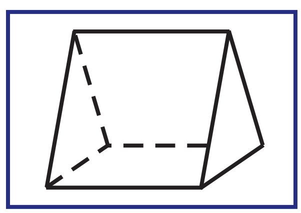


FIGURA 1.48

ii. Representemos por x la longitud de la base.
iii. Para determinar las dimensiones del molde, debemos tomar en cuenta que el volumen del prisma se calcula con la relación $V=B\cdot h$, Por tanto $9=x^2\left(\frac{1}{3}x\right)$, esta ecuación es equivalente a $x^3-27=0$. La ecuación $x^3-27=0$ tiene como única raíz real $x=3$. Por tanto el molde debe tener las siguientes dimensiones: base $x=3$ centímetros, altura $h=\frac{1}{3}(3)=1$ centímetros.
b. Se construirá un molde (en forma de pirámide, con base cuadrada) para fabricar caramelos que contengan un volumen de 25 centímetros cúbicos. La altura h de los caramelos debe medir 2 centímetros menos que la longitud de los lados de la base.
i. La *figura 1.49* muestra la forma del molde.
ii. Representemos por x la longitud de la base, $x-2$ representa la longitud de la altura.
iii. Para determinar las dimensiones del molde, debemos tomar en cuenta que el volumen de la pirámide se calcula con la relación $V=\frac{1}{3}B\cdot h$, entonces $25=\frac{1}{3}x^2(x-2)$, de donde obtenemos $x^3-2x^2-75=0$. La ecuación $x^3-2x^2-75=0$ tiene como única raíz real $x=5$. Por tanto el molde debe tener dimensiones: base $x=5$, altura $x-2=3$.

□

EJEMPLO 1.43 (Salchichas)
La compañía alimenticia desea elaborar salchichas. Deben tener forma de cilindro circular recto de 12 centímetros de largo con una semiesfera en cada extremo. La compañía desea controlar los volúmenes de las salchichas asignando valores al radio. **i.** La *figura 1.49* muestra un esquema de la salchicha.
ii. El volumen de la parte cilíndrica de la salchicha es el producto del largo del cilindro (que es de doce centímetros) y el área (πr^2) de la base, entonces $V_C = 12\pi r^2$ centímetros cúbicos. Los dos extremos semiesféricos forman una esfera de radio r cuyo volumen es $V_E = \frac{4}{3}\pi r^3$. Así, el volumen V_S de la salchicha, en función del radio, es $V_S(r) = \frac{4}{3}\pi r^3 + 12\pi r^2$ con $r > 0$ centímetros cúbicos.

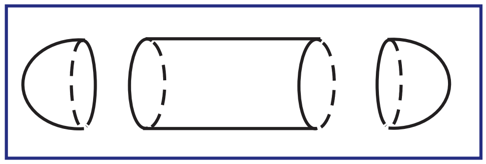


FIGURA 1.49

USO DE SOFTWARE DE MATEMÁTICAS

Trace la curva asociada a la función obtenida e identifique la parte positiva.

□

EJEMPLO 1.44 (Construcción de una caja)
Se construirá una caja (sin cubierta) cortando cuadrados (de las mismas dimensiones) de cada esquina de una lámina rectangular, las dimensiones de la lámina son: 80 centímetros de ancho por 150 centímetros de largo, posteriormente se doblarán perpendicularmente y hacia arriba los lados.
i. *Vea la figura 1.50*.
ii. Si x representa la longitud del lado del cuadrado recortado, el volumen de la caja está dado por la relación $V(x) = (150-2x)(80-2x)(x)$ bajo la condición $x \geq 0$.
iii. Si desarrollamos $V(x) = (150-2x)(80-2x)(x)$ y simplificamos obtenemos $V(x) = 4x^3 - 460x^2 + 12000x$, siempre que $0 \leq x \leq 40$.

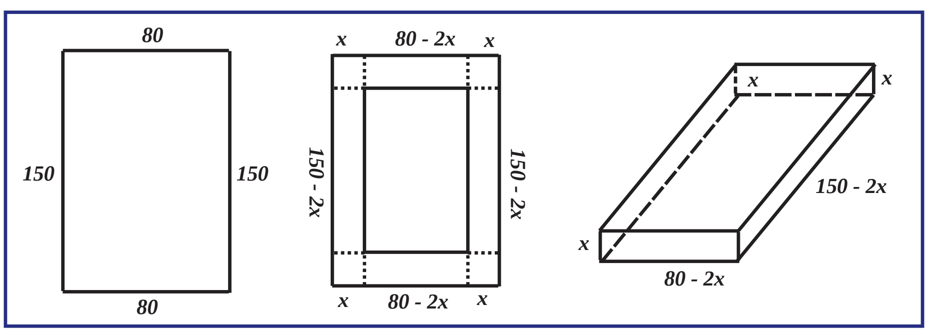


FIGURA 1.50

USO DE SOFTWARE DE MATEMÁTICAS

Trace la curva asociada a la función obtenida e identifique la parte positiva y que tiene sentido para esta situación.

□

EJEMPLO 1.45 (Problema geométrico)
Para expresar el volumen de un cilindro circular recto inscrito en un cono de 24 metros de altura y 8 metros de radio en la base (los ejes del cono y del cilindro coinciden) en función de la longitud del radio del cilindro, debemos tener en cuenta que el

volumen del cilindro está dado por $V_C = \pi r^2 h$ y que depende tanto de la longitud de la altura h como de la longitud del radio r.

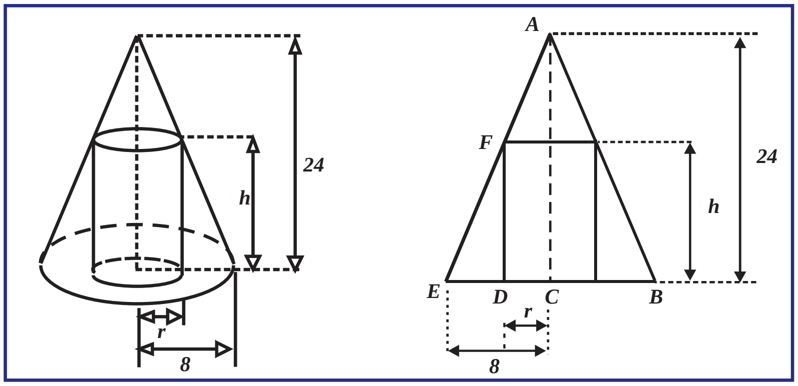


FIGURA 1.51

Para expresar el volumen del cilindro en términos de una sola variable, utilizamos el hecho de que los triángulos DFE y CAE de la *figura 1.51* son semejantes por lo que la relación de proporcionalidad entre sus lados es

$$\frac{h}{8-r} = \frac{24}{8} = 3 \text{, o bien, } h = 3(8-r).$$

De $V_C = \pi r^2 h$ y $h = 3(8-r)$ obtenemos que el volumen del cilindro en función del radio es $V_C(r) = 3\pi r^2 (8-r)$ con $r \geq 0$, o bien $V_C(r) = 24\pi r^2 - 3\pi r^3$ siempre que $r \geq 0$.

USO DE SOFTWARE DE MATEMÁTICAS

Trace la curva asociada a la función obtenida e identifique la parte positiva y que tiene sentido para esta situación.

□

EJEMPLO 1.46

Se pretende "engordar" cierta especie de jabalíes para posteriormente liberarlos y repoblar cierto lugar. El peso de los jabalís depende de la dieta que se utilice. Se han implementado dos dietas: una en base al alimento que encuentran normalmente en su hábitat y la segunda ha sido preparada en el laboratorio. Se ha encontrado que con la dieta preparada en el laboratorio, el aumento de peso en función del tiempo está dado por $p(x) = -2x^4 + 8x^2 + 4$ Kilogramos, donde x está en años. Si el jabalí sigue la dieta natural, su aumento de peso está dada por $q(x) = -2x^4 + 12x^2 + 4$.

Comentarios:

a. Note que inicialmente (cuando $x = 0$), ambos modelos indican que el jabalí tiene el mismo peso:

$$p(0) = -2(0)^4 + 8(0)^2 + 4 = 4 \text{ Kilogramos.}$$

$$q(0) = -2(0)^4 + 10(0)^2 + 4 = 4 \text{ Kilogramos.}$$

b. Los ceros de $p(x) = -2x^4 + 8x^2 + 4$ y $q(x) = -2x^4 + 12x^2 + 4$ son las raíces de las ecuaciones:

$$-2x^4 + 8x^2 + 4 = 0 \text{ y } -2x^4 + 12x^2 + 4 = 0,$$

Para

$p(x) = -2x^4 + 8x^2 + 4$,

$-2x^4 + 8x^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow x^4 - 4x^2 - 2 = 0$, entonces

$$x^2 = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4(1)(-2)}}{2}, \text{ de donde}$$

$$x^2 = 2 \pm \sqrt{6},$$

así:

$$x_1 = \sqrt{2+\sqrt{6}} \text{ y } x_2 = -\sqrt{2+\sqrt{6}}.$$

Para

$q(x) = -2x^4 + 12x^2 + 4$,

$-2x^4 + 12x^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow x^4 - 6x^2 - 2 = 0$, entonces

$$x^2 = \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4(1)(-2)}}{2}, \text{ de donde}$$

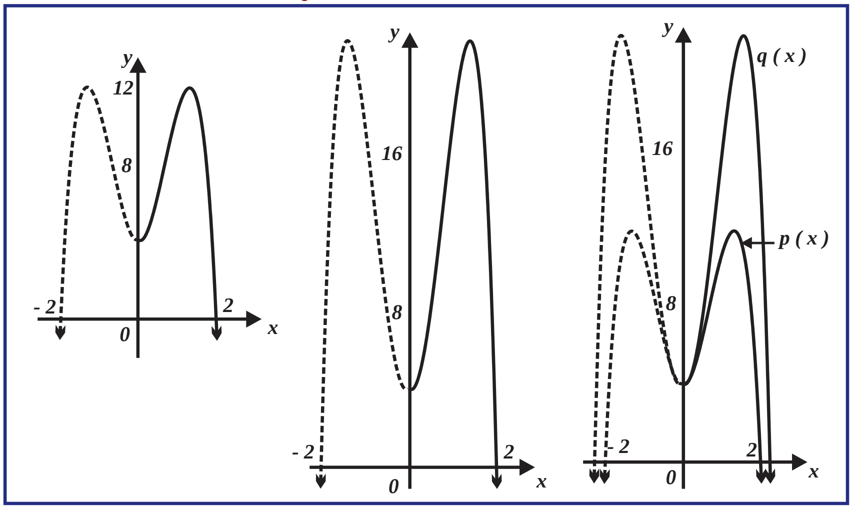
$$x^2 = 3 \pm \sqrt{11}$$

por tanto:

$$x_1 = \sqrt{3+\sqrt{11}} \text{ y } x_2 = -\sqrt{3+\sqrt{11}}.$$

Los ceros de las funciones "aumento de peso", indican que el "aumento de peso" es cero para esos tiempos.

c. Las curvas correspondientes se muestran en la *figura 1.52*.



a. **b.** **c.**

FIGURA 1.52

La parte punteada de las curvas carece de significado (puesto que la variable x representa tiempo. Por otra parte la dieta $q(x) = -2x^4 + 12x^2 + 4$ es más eficiente para engordar a los jabalís (las imágenes de x son mayores bajo $q(x)$ que bajo $p(x)$ en el intervalo de tiempo $\left(0\ ,\ \sqrt{3+\sqrt{11}}\right)$ años.

□

¿Qué conceptos aprendí?

PARA COMPLETAR

1. El ______________________________________ puede ser descrito por una función polinomial de grado tres.

2. Las funciones que describen alguna característica de una figura geométrica tienen dominio con signo ____________________.

3. La parte negativa de una ____ no tiene sentido si la situación o problema hace referencia a una dimensión medible.

CIERTO O FALSO (Justifique su respuesta)

1. Una función polinomial de grado tres (o superior) que modela una situación real tiene como dominio a todos los números reales.

2. Una función polinomial de grado tres (o superior) que modela una situación real no tiene ceros.

3. Sólo es posible modelar situaciones relacionadas con el volumen de un cuerpo por medio de funciones polinomiales de tercer grado.

PROBLEMAS PROPUESTOS 1.3

1. Se desea construir un tanque de acero para almacenar gas. El tanque tiene forma de cilindro circular recto de 12 metros de largo con una semiesfera en cada extremo. Exprese el volumen del tanque en términos del radio.

2. Se desea construir un tanque de acero para almacenar gas. El tanque tiene forma de cilindro circular recto con una semiesfera en cada extremo. La longitud de la parte cilíndrica debe ser cinco veces la longitud del radio. Exprese el volumen del tanque en términos del radio.

3. A partir de una lámina rectangular de ancho a y largo b se quiere construir un canal de sección transversal rectangular, para transportar aceite. Las paredes del canal se construirán doblando la lámina perpendicularmente a sus lados. Determine la función que describe el volumen de un tramo del canal de longitud igual a diez veces la base, en términos de la altura x del canal.

4. Se desea construir un silo (almacén) con forma de cilindro circular recto de 20 metros de largo, y coronado con un cono en la parte superior, la altura del cono mide el triple que su radio. Exprese el volumen del silo en términos de la longitud del radio.

5. Determine la función que describe el volumen de la figura que se obtiene conforme se perfora un cubo de lado de longitud de 4 centímetros. Suponga que la perforación tiene forma de prisma cuadrangular y la longitud de la altura es el doble que la longitud de la base.

6. Se construye una caja sin tapa recortando un pequeño cuadrado de cada esquina de una hoja rectangular (de aluminio) y luego doblando hacia arriba los lados. La hoja tiene dimensiones 90 por 180 centímetros. ¿Cuál es la función que describe el volumen de la caja?

7. Los paquetes que acepta cierta compañía de mensajería, deben tener forma de ortoedro, sus caras cuadradas deben tener longitud x y los costados rectangulares deben tener de longitud y. También, el perímetro máximo permitido debe cumplir que la suma de su longitud y su sección transversal debe ser 300 centímetros. ¿Cuál es la función que describe el volumen del paquete?

8. Exprese el volumen de un cono circular recto en función de su altura, si tiene base de longitud r y se encuentra inscrito en en una esfera de radio de longitud $R=1$.

9. Un cilindro circular recto se ha inscrito en una esfera de longitud de radio $R=1$. Exprese el volumen del cilindro en función de su radio.

10. La utilidad de cierta compañía se determina por la relación $U=I-G$, en donde I representa el ingreso total que generó la compañía y G los gastos totales de operación del negocio. Si $I(x)=0.0125x^2+412x$ modela el ingreso total y $G(x)=0.00135x^3+12.225$ modela el costo total, donde x es el número de clientes.
a. ¿Cuál es la función que describe el comportamiento de las utilidades?
b. ¿Cuántos clientes debe tener la compañía para tener utilidades?

11. Se ha encontrado que la población de cierta especie de roedores, puede modelarse por medio de la función $f(t)=-0.00001t^3+0.002t^2+1.5t+100$. Utilice un software graficador y:
a. Trace la curva correspondiente.
b. ¿Cuál es la población máxima de roedores y cuando ocurre?
c. De acuerdo a este modelo, ¿cuándo se extinguirá la población de roedores?

12. Suponga que la altura de cierta clase de pino se modela mediante la función $h(t)=-0.001t^3+0.044t^2-0.152t+0.26$, donde t es su edad en años. Utilice un software graficador y:
a. Trace la curva correspondiente.
b. Estime la edad del árbol en la que el crecimiento es más rápido.

13. Suponga que el ingreso total I (en millones de pesos) está relacionado con el gasto en publicidad por medio de $I(t)=-0.000001t^3+0.006t^2$, $0\le t\le 400$, donde t representa la cantidad (en miles de pesos). Utilice un software graficador y:
a. Trace la curva correspondiente.
b. Estime el punto en que el crecimiento de la función es más rápido.

AUTOEVALUACIÓN

1. Proporcione los nombres de diversos sólidos geométricos cuyo volumen sea una función polinomial de grado tres.

2. Una estructura está formada por un cubo en el que la cara superior está inscrita la base cuadrada de un cilindro circular recto de altura 10 unidades, ¿cuál es la función que describe el volumen de la estructura?

3. Una estructura, es tal que su parte central es un cubo y en cada cara hay una esfera tangente cuyo diámetro es igual a la longitud de la arista del cubo, ¿cuál es la función que describe el volumen de la estructura?

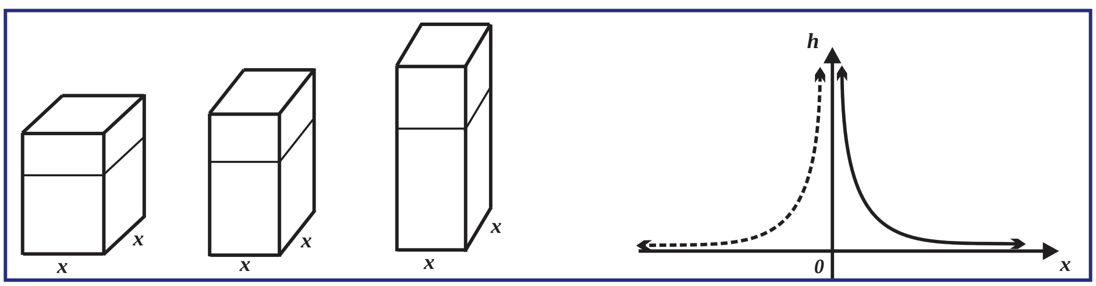
4. Una estructura, es tal que su parte central es un cilindro de altura igual a tres veces la longitud de su radio, en los extremos tiene prismas rectangulares cuyos lados adyacentes inscriben a las bases del cilindro. Si la altura del prisma es el doble que la del radio del cilindro, ¿cuál es la función que describe el volumen de la estructura?

2 FUNCIONES RACIONALES Y CON RADICALES

PROPÓSITOS:
Al finalizar la unidad el alumno:
Modelará algunas situaciones que dan lugar a funciones racionales y con radicales, analizará una gráfica para identificar su dominio, rango, asíntotas y relacionar estas características con la situación problemática planteada.

CONTENIDO:

2



2.1 FUNCIONES RACIONALES

APRENDIZAJES

En el estudio de la presente sección usted:
1. Explorará situaciones que se modelan con funciones racionales.
2. Identificará los elementos de una función racional: ceros, asíntotas verticales y huecos, dominio y rango para graficarla.
3. Graficará funciones que tengan asíntota horizontal diferente al eje de las x, asíntotas verticales, ceros, huecos, dominio y rango.
4. Resolverá problemas de aplicación.

En términos de las funciones polinomiales se definen las funciones racionales, así una función racional puede interpretarse como la división de dos funciones dos polinomiales. Como introducción al estudio de las funciones racionales presentaremos ciertas situaciones cuyo estudio da origen al como modelo a una función racional.

EJEMPLO 2.1 (Funciones racionales)

a. Afirmar que dos variables x y f cambian en relación inversa significa que conforme una de ellas aumenta la otra disminuye y viceversa, el modelo que representa una situación de variación inversa es $f(x)=\frac{k}{x}$ siempre que $k \neq 0$ y $x \neq 0$.

b. Suponga que una placa rectangular tiene área $A=10$ metros cuadrados, que su base mide x metros y su altura mide f metros. Por tanto $10 = x f$. Si la altura depende de la base, entonces $f(x)=\frac{10}{x}$ siempre que $x>0$, es decir la altura disminuye conforme se incrementa la longitud de la base, vea la *figura 2.1.*

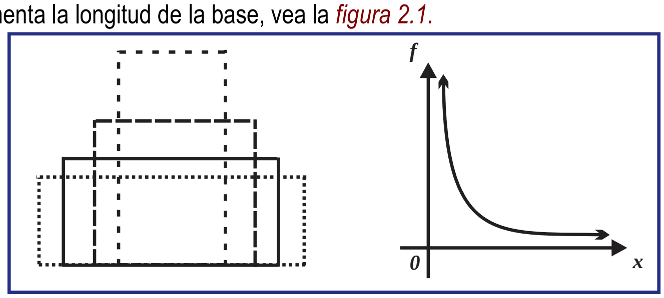


FIGURA 2.1

c. En un triángulo que contiene un área igual a 20 unidades cuadradas, en el que su base mide x $(x>0)$ unidades y su altura mide f unidades se cumple $20=\frac{x f}{2}$, entonces la longitud de la altura en función de la base está dada por $f(x)=\frac{40}{x}$ (siempre que $x>0$). También la longitud de la base puede escribirse en función de la longitud de la altura como $x(f)=\frac{40}{f}$ (siempre que $f>0$), vea la *figura 2.2*.

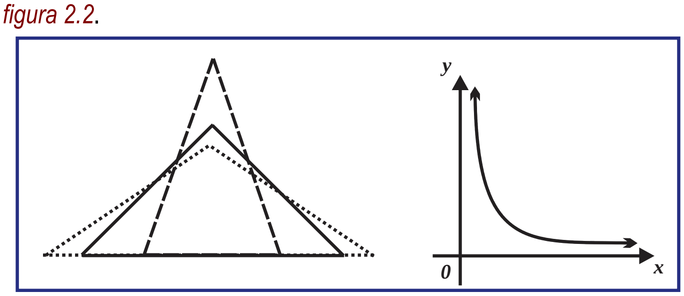


FIGURA 2.2

□

EJEMPLO 2.2 (Funciones racionales como modelos)

a. Un envase tiene forma de prisma rectangular y encierra un volumen de 20 unidades cúbicas, su base es cuadrada de lado de longitud x $(x>0)$ unidades y su altura es variable y la representaremos por h, entonces $20=x^2\cdot h$ y si expresamos la longitud de la altura en términos de la longitud de la base obtenemos $h(x)=\dfrac{20}{x^2}$, la *figura 2.3.* muestra el comportamiento gráfico de la función anterior, la parte punteada carece de significado.

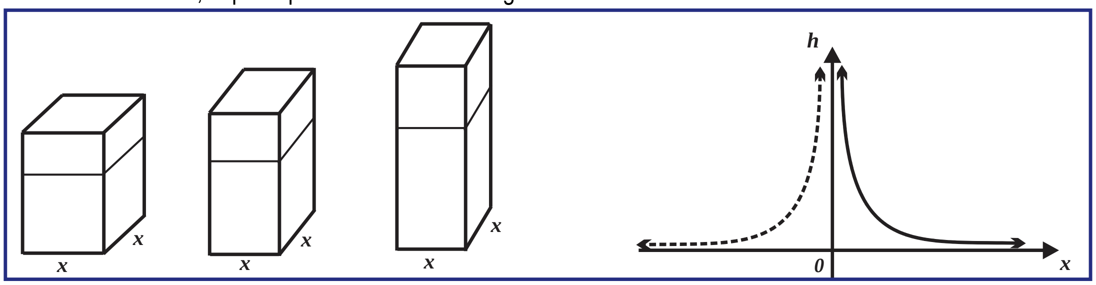


FIGURA 2.3

PARA REFLEXIONAR

¿Por qué la parte punteada de la gráfica de la *figura 2.3* carece de significado?

b. El volumen de un cilindro (circular recto), su radio y su altura se relacionan por medio de la expresión $V=\pi r^2 h$. Si el cilindro contiene un volumen de 30 unidades cúbicas, entonces la altura del cilindro en función del radio es $h(r)=\dfrac{30}{\pi r^2}$, donde $r>0$; la *figura 2.4* muestra el comportamiento de la altura, la parte punteada carece de significado.

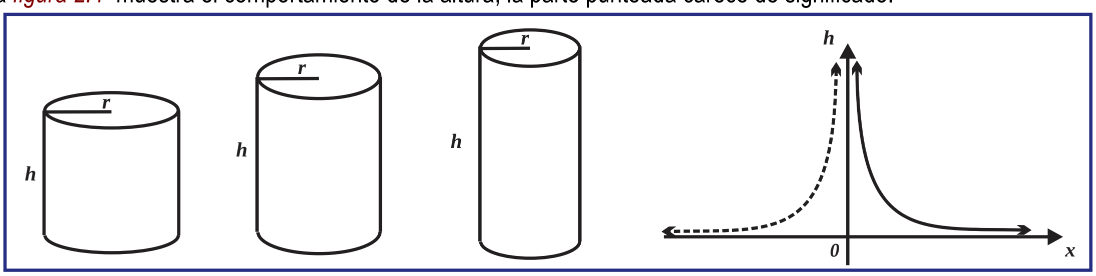


FIGURA 2.4

PARA REFLEXIONAR

¿Por qué la parte punteada de la gráfica de la *figura 2.4* carece de significado?

□

EJEMPLO 2.3 (Construcción de una función racional como modelo, la cerca de una superficie de descanso)

Se planea construir una superficie de descanso para automovilistas a un lado de una carretera. La superficie de descanso debe ser rectangular y contener un área de 5000 metros cuadrados. Deben cercarse: la parte contigua y los lados perpendiculares a la carretera, no así el lado opuesto a la carretera. Para construir la función que relaciona el número de metros de cerca requeridos en función de la longitud del lado no cercado observemos la *figura 2.5*, la superficie es rectangular y las longitudes de sus lados están representadas por x y y.

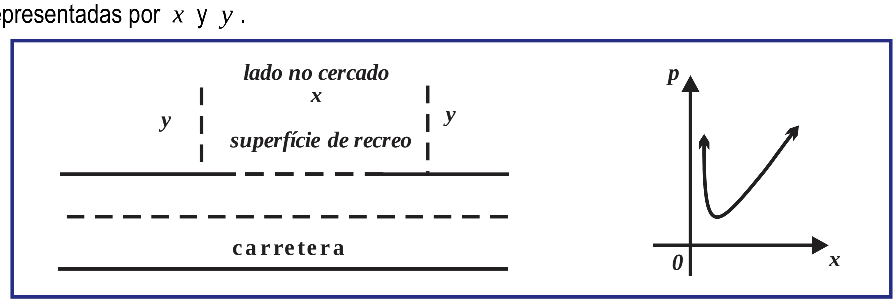


FIGURA 2.5

Por tanto el perímetro p de la cerca tiene una longitud de $p = x + 2y$ metros, el área de la superficie a cercar es 5000 metros cuadrados, es decir $x\,y = 5000\ m^2$.

Para expresar el perímetro p como una función de la longitud del lado no cercado (que hemos representado por x), despejamos y de $x\,y = 5000$ y obtenemos $y = \dfrac{5000}{x}$, que al sustituirla en $p = x + 2y$ se obtiene $p = x + 2\dfrac{5000}{x} = x + \dfrac{10000}{x}$, o simplemente $p = \dfrac{x^2 + 10000}{x}$. Esta relación únicamente depende de la variable x, es decir $p(x) = \dfrac{x^2 + 10000}{x}$, siempre que $x > 0$. La curva correspondiente se muestra en la *figura 2.5* (en el desarrollo de la presente sección se desarrollarán los elementos para construir este tipo de curvas).

USO DE SOFTWARE DE MATEMÁTICAS

Utilice un software (como graficador) y traza la curva asociada a $p(x) = \dfrac{x^2 + 10000}{x}$, con $x > 0$.

□

EJEMPLO 2.4 (Construcción de una función racional como modelo, envase cilíndrico)

Se desea construir un envase cilíndrico que encierre un volumen igual a un litro (mil centímetros cúbicos). Se debe relacionar el área de su superficie (cantidad de material requerido) con el radio del cilindro. La descomposición del cilindro se muestra en la *figura 2.6.*, donde cada una de las bases tiene área πx^2. La superficie lateral del cilindro es un rectángulo de dimensiones $2\pi x$ por h.

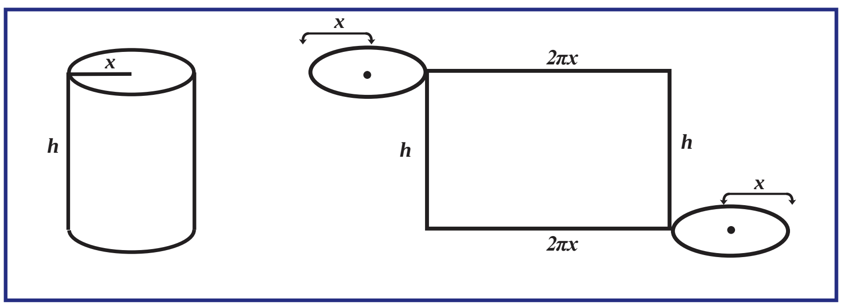


FIGURA 2.6

El área del envase está dada por la suma de las áreas de las superficies que lo componen, es decir, la suma de las áreas de las bases y el área de la parte lateral, entonces $A = 2\pi x^2 + 2\pi x h = 2\pi\left(x^2 + xh\right)$.

En la expresión anterior, el área depende de las variables x y h, sin embargo estas dos variables se encuentran ligadas por el hecho de que $V = \pi x^2 h = 1000$. Para rescribir la expresión del área en términos de una sola variable, digamos el radio x utilizamos la condición de ligadura $h = \dfrac{1000}{\pi x^2}$, por tanto $A = 2\pi x^2 + 2\pi x \dfrac{1000}{\pi x^2} = \dfrac{2\pi x^3 + 2000}{x}$. Por último, para indicar que el área depende de la variable x escribimos $A(x) = \dfrac{2\pi x^3 + 2000}{x}$, siempre que $x > 0$.

PARA REFLEXIONAR

Obtenga la función que describe el área del cilindro en términos de la altura, ¿qué tipo de función es?

□

Definición 2.1 (FUNCION RACIONAL)

La función $r(x) = \dfrac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0}$, donde a_0, a_1, $\cdots$, a_{n-1}, a_n, b_0, b_1, $\cdots$, b_{m-1} y b_m, son números reales y $b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0 \neq 0$, se denomina función racional en la variable x.

a. Sí $n < m$ (el grado del polinomio numerador es menor o igual que el grado del polinomio del denominador) se denomina propia.

b. $n \geq m$ (el grado del polinomio numerador es menor que el grado del polinomio denominador) se denomina impropia.

EJEMPLO 2.5 (Funciones racionales)

a. En $r(x)=\dfrac{x^2-4x}{x^2+x+1}$ la función polinomial del denominador es $q(x)=x^2+x+1$ y tiene grado $m=2$, la función polinomial del numerador es $p(x)=x^2-4x$ y su grado es $n=2$, por tanto $r(x)=\dfrac{x^2-4x}{x^2+x+1}$ es una función racional impropia.

b. En $r(x)=\dfrac{3x^3-5}{x^2+10x+24}$ la función polinomial del denominador es $q(x)=x^2+10x+24$ y tiene grado $m=2$, la función polinomial del numerador es $p(x)=3x^3-5$ y su grado es $n=3$, por tanto $r(x)=\dfrac{3x^3-5}{x^2+10x+24}$ es una función racional impropia.

c. En $r(x)=\dfrac{3x^3-5}{x^4-2x^3+x^2+x-4}$ la función polinomial del denominador es $q(x)=x^4-2x^3+x^2+x-4$ y tiene grado $m=4$, la función polinomial del numerador es $p(x)=3x^3-5$ de grado $n=3$, por tanto $r(x)=\dfrac{3x^3-5}{x^4-2x^3+x^2+x-4}$ es una función racional propia.

□

Otra clasificación que admiten las funciones racionales es la de ser reducibles o irreducibles.

Definición 2.2 (CLASIFICACIÓN DE LAS FUNCIONES RACIONALES)

Sea la función racional con regla de correspondencia $r(x)=\dfrac{p(x)}{q(x)}=\dfrac{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0}{b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\cdots+b_1x+b_0}$.

a. $r(x)=\dfrac{p(x)}{q(x)}$ es irreducible si y sólo si $p(x)$ y $q(x)$ no tienen ceros comunes.

b. $r(x)=\dfrac{p(x)}{q(x)}$ es reducible si y sólo si $p(x)$ y $q(x)$ tienen ceros comunes.

La *definición 2.2* indica que en las funciones racionales irreducibles, las funciones polinomiales que la componen no tienen ceros comunes, en consecuencia la regla de correspondencia no se puede simplificar.

¡La regla de correspondencia de una función racional irreducible no puede "simplificarse"!

Si la regla de correspondencia $r(x)=\dfrac{p(x)}{q(x)}=\dfrac{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0}{b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\cdots+b_1x+b_0}$ puede simplificarse (es decir, r es reducible), debe tenerse en cuenta que al "simplificarla" ha modificado su dominio, es decir al cancelar, por ejemplo, el factor $x-x_0$ tanto en p como en q, en realidad ha construido una nueva función, digamos r_1 que es igual a $r(x)$ excepto en el punto $x=x_0$, entonces $r_1(x)=r(x)$ siempre que $x\neq x_0$.

¡Si UD. simplifica la regla de correspondencia de una función racional debe tener en cuenta que se conserva el dominio de la función original!

EJEMPLO 2.6 (Funciones racionales reducibles y funciones racionales irreducibles)

a. $r(x)=\dfrac{x^2-4}{x^3+1}=\dfrac{(x-2)(x+2)}{x^3+1}$ es irreducible.

b. $r(x)=\dfrac{x^2+2x+1}{x^2+5x+6}=\dfrac{(x+1)^2}{(x+3)(x+2)}$ es irreducible.

c. $r(x)=\dfrac{x^2+2x}{x^3+6x}$ es reducible puesto que $r(x)=\dfrac{x^2+2x}{x^3+6x}=\dfrac{x(x+2)}{x(x^2+6)}=\dfrac{x+2}{x^2+6}$, sin embargo, el dominio de r se obtiene a partir de la expresión original.

d. $r(x)=\dfrac{x^2+5x+6}{x^3+4x^2+5x}$ es reducible, pero $r(x)=\dfrac{x^2+5x+6}{x^3+7x^2+12x}=\dfrac{(x+2)(x+3)}{x(x+3)(x+4)}$, por tanto $r(x)=\dfrac{x^2+5x+6}{x^3+7x^2+12x}=\dfrac{x+2}{x^2+4x}$ siempre que $x\neq -3$.

□

En matemáticas, no está definida la división por el número 0, expresiones como $\dfrac{18}{0}$, $\dfrac{0}{0}$, $\dfrac{-12}{0}$, etc., carecen de significado, en consecuencia, el dominio de una función racional irreducible no incluye los ceros reales del polinomio denominador.

ⓘ ¡Las expresiones $\dfrac{a}{0}=+\infty$, $\dfrac{0}{0}=\infty$ y $\dfrac{-a}{0}=-\infty$ son incorrectas!

También, los ceros de una función racional irreducible (si es que existen) son los ceros de la función polinomial que define su numerador, por tanto, todas las propiedades tratadas en la unidad previa (respecto a los ceros de una función polinomial) son válidas en la determinación de los ceros de una función racional impropia.

ⓘ ¡Los ceros (en caso de existir) de una función racional son los ceros de la función polinomial del numerador!

EJEMPLO 2.7 (Dominio de funciones racionales)

a. En $r(x)=\dfrac{x^2-4x}{x^2-4}$, el dominio lo constituyen todos los números reales diferentes a los ceros del polinomio denominador, es decir $dom(r)=(-\infty,-2)\cup(-2,2)\cup(2,+\infty)$, puesto que $q(x)=x^2-4\neq 0$ si $x\neq -2$ y $x\neq 2$, vea la *figura 2.7*. Los ceros de $r(x)=\dfrac{x^2-4x}{x^2-4}$ son los ceros de $p(x)=x^2-4x$, es decir $x=0$ y $x=4$.

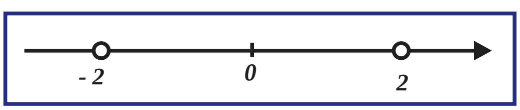


FIGURA 2.7

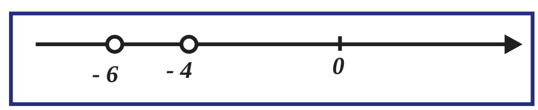


FIGURA 2.8

b. El dominio de $r(x)=\dfrac{-6x}{x^2+10x+24}$ contiene a todos los números reales distintos a los ceros de $q(x)=x^2+10x+24=(x+4)(x+6)$, mismos que son $x\neq -6$ y $x\neq -4$, así $dom(r)=(-\infty,-6)\cup(-6,-4)\cup(-4,+\infty)$, vea la *figura 2.8*. El único cero de $r(x)=\dfrac{-6x}{x^2+10x+24}$ (que coincide con el cero de $p(x)=-6x$) es $x=0$.

c. En $r(x)=\dfrac{x^3+x^2-12x}{x^2-25}$, los ceros de $q(x)=x^2-25=(x-5)(x+5)$ son $x=-5$ y $x=5$, por tanto, el dominio de r es el conjunto $dom(r)=(-\infty,-5)\cup(-5,5)\cup(5,+\infty)$. También $p(x)=x^3+x^2-12x=x(x+4)(x-3)$, por tanto, los ceros de $r(x)$ son $x=0$, $x=-4$ y $x=3$.

d. En $r(x)=\dfrac{2x+7}{x^2+1}$ el polinomio denominador es $q(x)=x^2+1$ y no tiene ceros reales, por tanto, el dominio de r es el conjunto $dom(r)=(-\infty,+\infty)=IR$. El polinomio numerador es $p(x)=2x+7$ y su único cero es $x=-\dfrac{7}{2}$, por tanto también es el único cero de r.

e. En $r(x)=\dfrac{x^2+5}{x^2-x-20}$, el polinomio $q(x)=x^2-x-20$ tiene dos ceros $x=-4$ y $x=5$, así el dominio de r es el conjunto $dom(r)=(-\infty,-4)\cup(-4,5)\cup(5,+\infty)$. Puesto que $p(x)=x^2+5$ no tiene ceros reales, $r(x)$ no tiene ceros.

□

Continuando con el proceso de construcción de la curva asociada a una función racional irreducible, veamos cuál es su comportamiento alrededor de un punto en el que no está definida (es decir alrededor de un cero del polinomio denominador).

Sea $r(x)=\dfrac{p(x)}{q(x)}$ una función polinomial irreducible en donde q tiene grado m, entonces puede ser rescrita en la forma $r(x)=\dfrac{p(x)}{(x-x_0)^a s(x)}$ en donde $q(x)=(x-x_0)^a s(x)$ y $s(x)$ es una función polinomial de grado $m-a$. El comportamiento de $r(x)$ alrededor de x_0 lo describen, tanto el factor $g(x)=\dfrac{1}{(x-x_0)^a}$ como el signo de $\dfrac{p(x_0)}{s(x_0)}$. Para analizar el comportamiento de la función $r(x)=\dfrac{p(x)}{q(x)}=\dfrac{p(x)}{(x-x_0)^a s(x)}$ asignaremos a la variable x números cada vez más próximos a x_0, primero menores que x_0 y luego mayores que x_0, vea la *figura 2.9 y la tabla 2.1.*

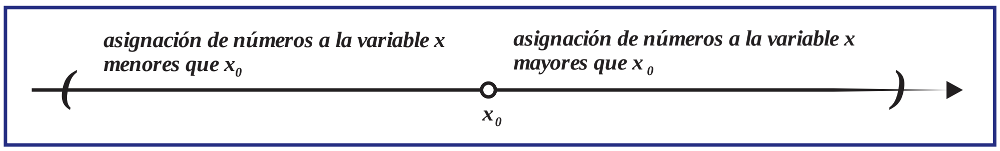


FIGURA 2.9

PRIMER CASO, a ES UN NÚMERO IMPAR

x	$g(x)=\dfrac{1}{(x-x_0)^a}$	Signo de g
$(0.9)x_0$	$(-10x_0)^a$	negativo
$(0.999)x_0$	$(-1000x_0)^a$	negativo
$(0.99999)x_0$	$(-100\,000x_0)^a$	negativo
x_0	*indefinido*	
$(1.00001)x_0$	$(100\,000x_0)^a$	positivo
$(1.001)x_0$	$(1000x_0)^a$	positivo
$(1.1)x_0$	$(10x_0)^a$	positivo

SEGUNDO CASO, a ES UN NÚMERO PAR

x	$g(x)=\dfrac{1}{(x-x_0)^a}$	Signo de g
$(0.9)x_0$	$(-10x_0)^a$	positivo
$(0.999)x_0$	$(-1000x_0)^a$	positivo
$(0.99999)x_0$	$(-100\,000x_0)^a$	positivo
x_0	*indefinido*	
$(1.00001)x_0$	$(100\,000x_0)^a$	positivo
$(1.001)x_0$	$(1000x_0)^a$	positivo
$(1.1)x_0$	$(10x_0)^a$	positivo

TABLA 2.1

El comportamiento de $r(x)=\dfrac{p(x)}{(x-x_0)^a s(x)}$ se muestra en la *figura 2.10*.

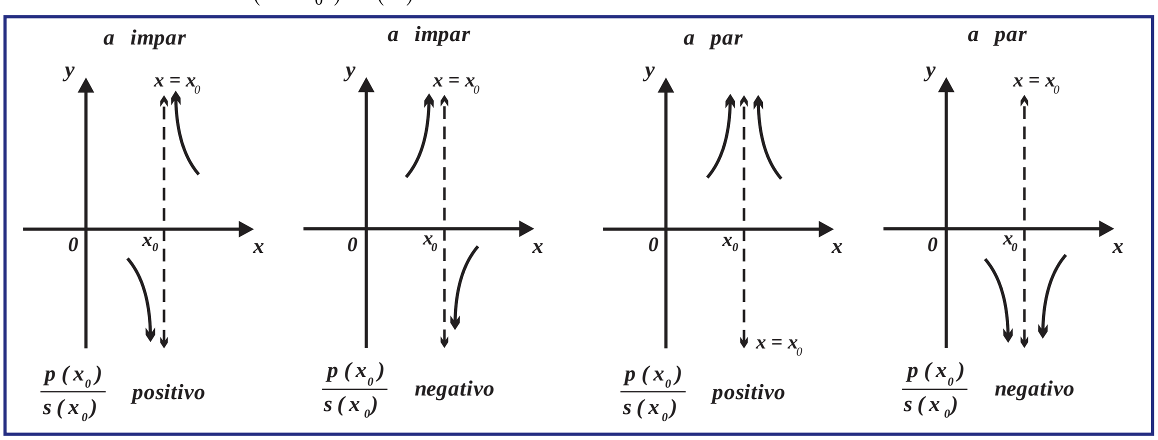


FIGURA 2.10

Los comportamientos mostrados en la *figura 2.10* se conocen como “asintóticos” y la recta de ecuación $x = x_0$ se denomina “asíntota vertical”.

Definición 2.3 (ASÍNTOTAS VERTICALES)

Sea r una función racional propia e irreducible, entonces:
Si r crece indefinidamente en forma positiva, crece indefinidamente en forma negativa o crece indefinidamente en ambas formas, conforme las asignaciones a x son cada vez más próximas a x_0, entonces la recta de ecuación $x = x_0$ es “asíntota vertical de la curva asociada a r”.

PARA REFLEXIONAR

¿?

a. ¿Las asíntotas verticales forman parte de la curva asociada a una función polinomial? Explique.
b. ¿Por qué la curva asociada a una función no puede cruzar a una asíntota vertical?

En el bosquejo de la curva asociada a una función racional, la identificación de las asíntotas desempeña un papel básico, por tanto, la *estrategia 2.1* puede ser de gran utilidad para este efecto.

ESTRATEGIA 2.1 (TRAZO DE ASÍNTOTAS VERTICALES Y COMPORTAMIENTO A SU ALREDEDOR)

Para determinar las asíntotas verticales de una función racional propia e irreducible r:
i. Factorice (si es posible) $p(x)$ y $q(x)$.
ii. Determine los ceros de $q(x) = b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0$.
iii. Si x_0 es uno de los ceros, una de las asíntotas verticales tiene ecuación $x = x_0$.
iv. Asigne valores x tan próximos, como le sea posible a x_0 (tanto mayores como menores que x_0) y luego determine las imágenes correspondientes.
v. Los puntos obtenidos indicarán el comportamiento de $r(x)$ en la proximidad de la asíntota.

El *ejemplo 2.8* muestra el uso de la estrategia anterior.

EJEMPLO 2.8 (Uso de la estrategia 2.1, asíntotas verticales de una función racional)

a. Asíntotas verticales de $r(x) = \dfrac{2x}{x^2 - x - 20}$.

i. $r(x) = \dfrac{2x}{x^2 - x - 20} = \dfrac{2x}{(x+4)(x-5)}$.
ii. Los ceros del polinomio denominador son $x = -4$ y $x = 5$.
iii. Las asíntotas verticales tienen ecuaciones $x = -4$ y $x = 5$.
iv. Comportamiento de r alrededor de $x = -4$ y $x = 5$, vea la *figura 2.11*.

	x	$r(x)$	*signo*
	-4.1	-9.01098	*negativo*
asíntota	-4	*indefinida*	
	-3.9	8.76404	*positivo*
	4.9	-11.011236	*negativo*
asíntota	5	*indefinida*	
	5.1	11.20879	*positivo*

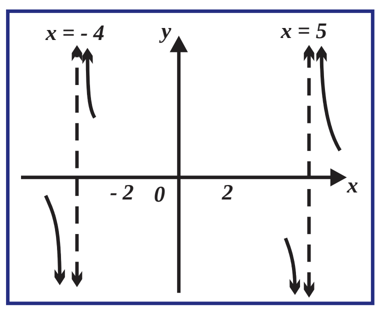


FIGURA 2.11

b. Asíntotas verticales de $r(x) = \dfrac{4}{(x-1)^2(x+2)^2}$.

i. $r(x) = \dfrac{4}{(x-1)^2(x+2)^2}$.
ii. Los ceros del polinomio denominador son $x = -2$ y $x = 1$.
iii. Las asíntotas verticales tienen ecuaciones $x = -2$ y $x = 1$.
iv. Comportamiento de r alrededor de $x = -2$ y $x = 1$, vea la *figura 2.12*.

	x	$r(x)$	*signo*
	-2.1	41.62	*positivo*
asíntota	-2	*indefinida*	
	-1.9	26.29	*positivo*
	0.9	47.56	*positivo*
asíntota	1	*indefinida*	
	1.1	41.62	*positivo*

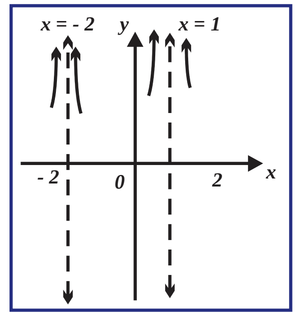


FIGURA 2.12

c. Asíntotas verticales de $r(x)=\dfrac{2}{x^3+x^2-6x}$.

i. $r(x)=\dfrac{2}{x^3+x^2-6x}=\dfrac{2}{x(x+3)(x-2)}$.

ii. Los ceros del polinomio denominador son $x=-3$, $x=0$ y $x=2$.

iii. Las asíntotas verticales tienen ecuaciones $x=-3$, $x=0$ y $x=2$.

iv. Comportamiento de r alrededor de $x=-3$, $x=0$ y $x=2$, vea la *figura 2.13*.

	x	$r(x)$	*signo*
	-3.1	-1.265022	*negativo*
asíntota	-3	*indefinida*	
	-2.9	1.40746	*positivo*
	-0.1	-3.28072	*negativo*
asíntota	0	*indefinida*	
	0.1	-3.39558	*negativo*
	1.9	-2.14822	*negativo*
asíntota	2	*indefinida*	
	2.1	1.86741	*positivo*

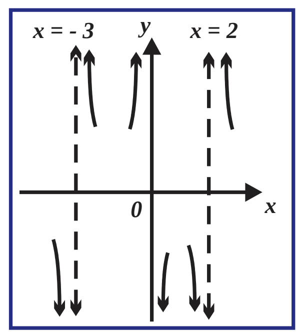


FIGURA 2.13

d. Asíntotas verticales de $r(x)=\dfrac{1}{x^4-16}$.

i. $r(x)=\dfrac{1}{x^4-16}=\dfrac{1}{(x^2+4)(x+2)(x-2)}$.

ii. Los ceros del polinomio denominador son $x=-2$ y $x=2$.

PARA REFLEXIONAR

¿?	¿Por qué el factor x^2+4 no origina asíntotas verticales?

iii. Las asíntotas verticales tienen ecuaciones $x=-2$ y $x=2$.

iv. Comportamiento de r alrededor de $x=-2$ y $x=2$, vea la *figura 2.14*.

	x	$r(x)$	*signo*
	-2.1	0.290014	*positivo*
asíntota	-2	*indefinida*	
	-1.9	-0.33693	*negativo*
	1.9	-0.33693	*negativo*
asíntota	2	*indefinida*	
	2.1	0.290014	*positivo*

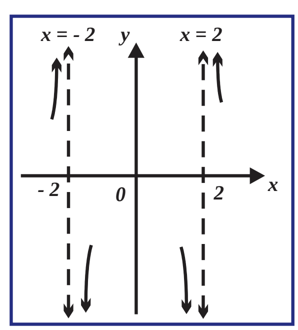


FIGURA 2.14

En una función racional el resultado de la división de los términos líderes o dominantes determina el "comportamiento extremo" de la curva correspondiente.

NOTA

El término dominante o líder de una función polinomial es el sumando de mayor potencia.

Para asignaciones extremadamente grandes a la variable x (asignaciones que pueden ser positivas o negativos) de la función racional $r(x)=\dfrac{p(x)}{q(x)}$, la división de los términos dominantes $\dfrac{a_n x^n}{b_m x^m}=\dfrac{a_n}{b_m}x^{n-m}$ define su comportamiento extremo.

i. Si $n<m$, la curva asociada a r tiene a la recta de ecuación $y=0$ (eje x) como asíntota horizontal.

ii. Si $n=m$, la curva asociada a r tiene a la recta de ecuación $y=\dfrac{a_n}{b_n}$ como asíntota horizontal.

iii. Si $n>m$, la curva asociada a r no tiene asíntotas horizontales.

NOTA

El comportamiento extremo de una función es el comportamiento que tiene la función para asignaciones a x extremadamente grandes, ya sean positivas o negativas.

DEFINICIÓN 2.4 (ASÍNTOTA HORIZONTAL)

Sea r una función racional irreducible.
Si r se aproxima a la recta de ecuación $y=y_0$ conforme se le asignan a x números cada vez mayores – positivos o negativos o en ambas formas–, entonces la recta de ecuación $y=y_0$ se denomina "asíntota horizontal de la curva de r".

¡La curva asociada a una función racional r, puede intersecar a una asíntota horizontal!

La *figura 2.15* muestra el comportamiento asintótico de algunas funciones.

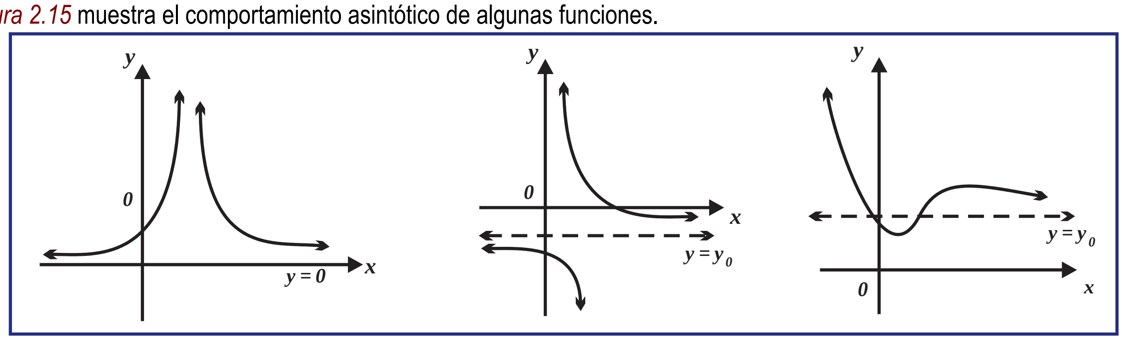


FIGURA 2.15

EJEMPLO 2.9 (Asíntotas horizontales de una función racional)

a. En $r(x)=\dfrac{3x-1}{x^2-5x+6}$, $a_n x^n=3x$ y $b_m x^m=x^2$, por tanto, la recta de ecuación $y=0$ es la asíntota horizontal.

b. En $r(x)=\dfrac{3x^2+6x-2}{4x^2-5x+6}$, $a_n x^n=3x^2$ y $b_m x^m=4x^2$, por tanto, la recta de ecuación $y=\dfrac{3}{4}$ es la asíntota horizontal.

c. En $r(x)=\dfrac{-7x^3+6x^2+2x-2}{x^3+5x^2-5x}$, $a_n x^n=-7x^3$ y $b_m x^m=x^3$, por tanto, la recta de ecuación $y=-7$ es la asíntota horizontal.

d. En $r(x)=\dfrac{2x^4-x}{x^3-2x^2-x+1}$, $a_n x^n=2x^4$ y $b_m x^m=x^3$, donde $n>m$, por tanto $r(x)$ no tiene asíntotas horizontales.

□

En el *ejemplo 2.10* determinamos las asíntotas (horizontales y verticales) de algunas funciones racionales.

EJEMPLO 2.10 (Asíntotas verticales y horizontales de una función racional)

a. Sí $r(x)=\dfrac{x-1}{x^2-5x+6}=\dfrac{x-1}{(x-2)(x-3)}$, entonces $p(x)=x-1$ y $q(x)=x^2-5x+6$ no tienen factores comunes (r es irreducible). Las asíntotas verticales tienen ecuaciones $x=2$ y $x=3$. Por otra parte $\dfrac{a_n x^n}{b_m x^m}=\dfrac{x}{x^2}$ donde $n<m$ y por tanto la línea recta $y=0$ es asíntota horizontal de la curva asociada a r, vea la vea la *figura 2.16*.

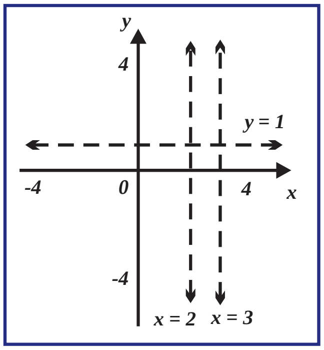


FIGURA 2.16

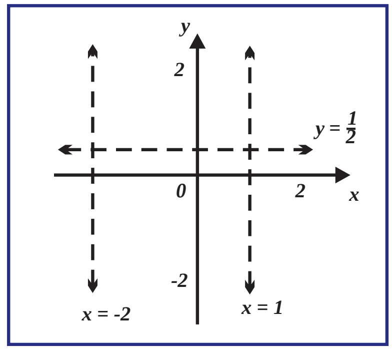


FIGURA 2.17

b. Puesto que $r(x)=\dfrac{2x^2-4x-6}{4x^2+4x-8}=\dfrac{2(x-3)(x+1)}{4(x+2)(x-1)}$, entonces las asíntotas verticales tienen ecuaciones $x=-2$ y $x=1$. También $\dfrac{a_n x^n}{b_m x^m}=\dfrac{2x^2}{4x^2}=\dfrac{1}{2}$, es decir $n=m$ y la línea recta de ecuación $y=\dfrac{1}{2}$ es la asíntota horizontal de la curva asociada a r, vea la *figura 2.17*.

USO DE SOFTWARE DE MATEMÁTICAS

Obtenga las curvas asociadas a las funciones anteriores y vea que coinciden con lo descrito.

□

Las funciones racionales impropias e irreducibles, en las que el grado del polinomio numerador p es mayor en *una unidad* que el grado del polinomio denominador q, tienen asociada una asíntota oblicua o inclinada. Para determinar la ecuación de esta asíntota, basta efectuar la división (algebraica) entre las funciones polinomiales que componen la función racional, el cociente de esta división es la ecuación de asíntota oblicua.

EJEMPLO 2.11 (Asíntotas oblicuas)

a. Puesto que $r(x)=\dfrac{x^2+4x}{x+1}=x+3-\dfrac{3}{x+1}$, entonces la curva asociada a r tiene asociada una asíntota oblicua de ecuación $y=x+3$. Observe que si a la variable x le asignamos números extremadamente grandes, r crece en forma extrema, y que si a x le asignamos números extremadamente pequeños, r aumenta en forma negativa en extremo, vea la *figura 2.18*.

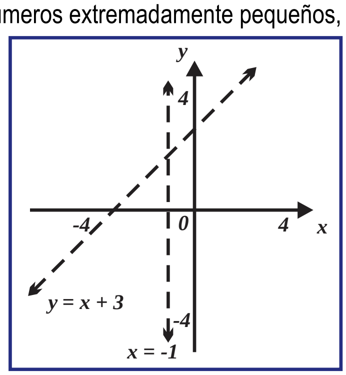


FIGURA 2.18

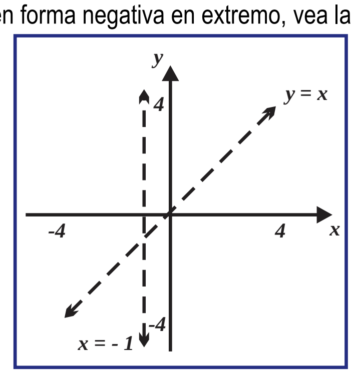


FIGURA 2.19

b. Puesto que $r(x)=\dfrac{x^2+x+1}{x+1}=x+\dfrac{1}{x+1}$, la curva asociada a $r(x)$ tiene una asíntota oblicua de ecuación $y=x$ y una asíntota vertical de ecuación $x=-1$. Observe que si la asignaciones a x se incrementan (positivamente o negativamente) extremadamente, $\dfrac{1}{x+1}$ se aproxima a cero, vea la *figura 2.19*.

□

NOTA

Se deja al lector perteneciente al Colegio la decisión trabajar con asíntotas con asíntotas oblicuas , los planes del Colegio no lo contemplan.

Revisemos el efecto que se produce al "simplificar la regla de correspondencia" de una función racional.

NOTA

A la función que se obtiene de "simplificar algebraicamente" otra función, debe asignársele el dominio de la función original.

PARA REFLEXIONAR

¿? ¿Por qué a la función que se obtiene de "simplificar algebraicamente" otra función, debe asignársele el dominio de la función original?

EJEMPLO 2.12 (Simplificación de la regla de correspondencia)

a. Si $r(x)=\dfrac{x}{x}$, entonces $dom(r)=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$. Puesto que $r(x)=\dfrac{x}{x}=1$, es decir $r(x)=1$, se cumple que $r(x)=\dfrac{x}{x}$ es equivalente a $s(x)=1$ siempre que $dom(s)=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$.

b. Sea $r(x)=\dfrac{x^2-2x}{x^2+2x-8}$, entonces $dom(r)=(-\infty,-4)\cup(-4,2)\cup(2,+\infty)$.

Observe que $\dfrac{x^2-2x}{x^2+2x-8}=\dfrac{x(x-2)}{(x-2)(x+4)}=\dfrac{x}{x+4}$. Podemos afirmar que $r(x)=\dfrac{x}{x+4}$ bajo la condición de que $dom(s)=(-\infty,-4)\cup(-4,2)\cup(2,+\infty)$.

c. Si $r(x)=\dfrac{x+3}{x^2+4x+3}$, entonces $dom(r)=(-\infty,-3)\cup(-3,-1)\cup(-1,+\infty)$. Observe que $\dfrac{x+3}{(x+3)(x+1)}=\dfrac{1}{x+1}$.

Podemos afirmar que $r(x)=\dfrac{1}{x+1}$, bajo la condición $dom(s)=(-\infty,-3)\cup(-3,-1)\cup(-1,+\infty)$.

□

El hecho de que las reglas de correspondencia de dos funciones sean iguales, es decir $r(x)=s(x)$, pero que sus dominios no coincidan en un número finito de asignaciones a la variable x se manifiesta gráficamente en que las curvas asociadas a r y s no coinciden en un número finito de los puntos, vea *figura 2.20*.

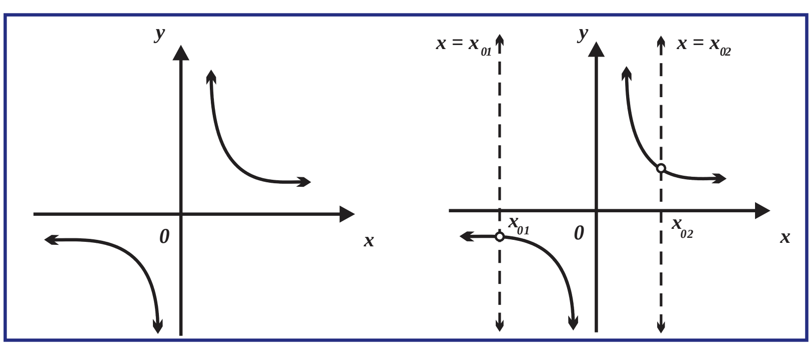


FIGURA 2.20

Si la función racional r admite como factor a $x - x_0$ tanto en el numerador como el denominador, entonces la regla de correspondencia puede simplificarse, este hecho se manifiesta como un hueco en la curva asociada a r puesto que el número $x = x_0$ no pertenece al dominio de r.

EJEMPLO 2.13 (Huecos de una curva)

a. Si $r(x)=\dfrac{x^2-4}{x^2-x-6}$, entonces $r(x)=\dfrac{x^2-4}{x^2-x-6}=\dfrac{(x-2)(x+2)}{(x+2)(x-3)}$ y $dom(r)=(-\infty,-2)\cup(-2,3)\cup(3,+\infty)$.

Puesto que $r(x)=\dfrac{x^2-4}{x^2-x-6}=\dfrac{(x-2)(x+2)}{(x+2)(x-3)}=\dfrac{x-2}{x-3}$ siempre que $x\neq -2$, entonces la curva asociada a $r(x)=\dfrac{x^2-4}{x^2-x-6}$ coincide con la curva asociada a $s(x)=\dfrac{x-2}{x-3}$ menos en $s(-2)=-\dfrac{4}{5}$, en donde presenta un hueco. Vea la *figura 2.21*.

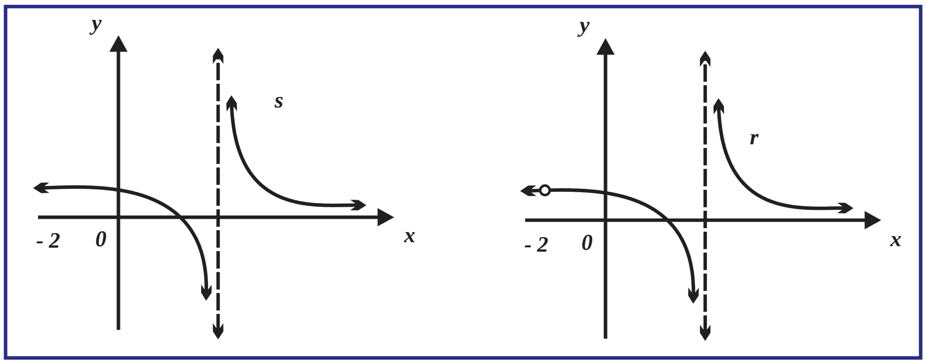


FIGURA 2.21

USO DE SOFTWARE DE MATEMÁTICAS

Grafique las funciones $r(x)=\dfrac{x^2-4}{x^2+x-6}$ y $s(x)=\dfrac{x-2}{x-3}$, discuta sus gráficas.

b. Si $r(x)=\dfrac{4x^2+4x}{x^4+x}$, entonces $r(x)=\dfrac{4x^2+4x}{x^4+x}=\dfrac{4x(x+1)}{x(x+1)(x^2+x+1)}$ y $dom(r)=(-\infty,-1)\cup(-1,0)\cup(0,+\infty)$

Puesto que $r(x)=\dfrac{4x^2+4x}{x^4+x}=\dfrac{4x(x+1)}{x(x+1)(x^2+x+1)}=\dfrac{4}{x^2+x+1}$ siempre que $x\neq 0$ y $x\neq -1$, entonces la curva asociada a $r(x)=\dfrac{4x^2+4x}{x^4+x}$ coincide con la curva asociada a $s(x)=\dfrac{4}{x^2+x+1}$, menos en $s(0)=4$ y $s(-1)=4$ en donde presenta huecos, vea la *figura 2.22*.

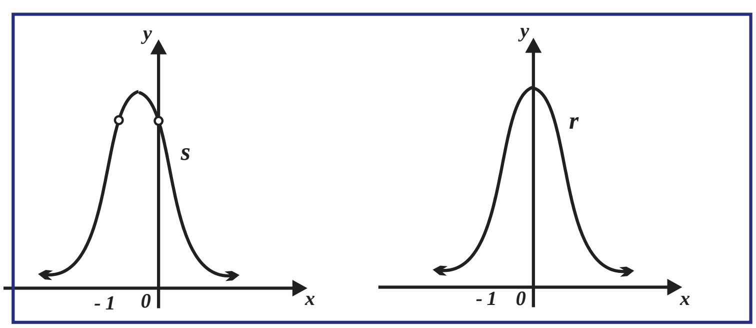


FIGURA 2.22

USO DE SOFTWARE DE MATEMÁTICAS

Grafique las funciones $r(x)=\dfrac{4x^2+4x}{x^4+x}$ y $s(x)=\dfrac{4}{x^2+x+1}$, discuta sus gráficas.

□

Todos los aprendizajes tratados en la presente sección, constituyen parte de la estrategia a seguir para bosquejar (trazo aproximado) la curva asociada a una función racional y se encuentran agrupados en la siguiente *estrategia 2.2*.

ESTRATEGIA 2.2 (BOSQUEJO DE LA CURVA ASOCIADA A UNA FUNCIÓN RACIONAL)

1. Si es posible factorice los polinomios numerador y el denominador de r.

i. Si r es reducible cancele los factores comunes de p y q, y obtenga $r_1(x)=\dfrac{p_1(x)}{q_1(x)}$.

ii. Si $x-x_0$ es un factor común, entonces en el punto $h(x_0, r_1(x_0))$ marque un hueco en el plano cartesiano.

2. Determine los ceros de p_1 (en caso de que existan) y márquelos en el eje x. Determine el dominio de r.

3. Determine el punto de intersección de la curva asociada a r_1 con el eje y.

4. Determine las asíntotas (verticales, horizontales) de r_1, así como el comportamiento alrededor de ellas.

5. Calcule el "signo de r_1" en cada intervalo generado por sus ceros.

6. Utilice segmentos suaves y continuos para trazar la curva asociada a r_1.

EJEMPLO 2.14 (Trazo de la curva asociada a una función racional)

a. Bosquejemos la curva asociada a $r(x)=\dfrac{2x^2}{x^2+5x}$.

1. $r(x)=\dfrac{2x^2}{x(x+5)}=\dfrac{2x}{x+5}$, siempre que $x\neq-5$.

$p(x)=x^2$ y $q(x)=x^2+5x$, tienen como factor común $x-0$, por tanto $r(0)$ no existe y representa un hueco en la curva asociada a $r(x)$.

2. r no tiene ceros. $dom(r)=(-\infty,-5)\cup(-5,0)\cup(0,+\infty)$

3. r tiene como única asíntota vertical a la recta de ecuación $x=-5$. En $r(x)$, $\dfrac{a_n x^n}{b_m x^m}=\dfrac{2x^2}{x^2}=2$, entonces r tiene una asíntota horizontal de ecuación $y=2$.

4. La *figura 2.23*. es un bosquejo de la curva asociada a $r(x)$.

INTERVALOS	x_p	$r(x_p)$	SIGNO DE $r(x)$
$(-\infty\ ,\ -5)$	-6	$\dfrac{18}{11}$	positivo
$(-5\ ,\ 0)$	-2	$-\dfrac{4}{3}$	negativo
$(0\ ,\ +\infty)$	1	$\dfrac{1}{3}$	positivo

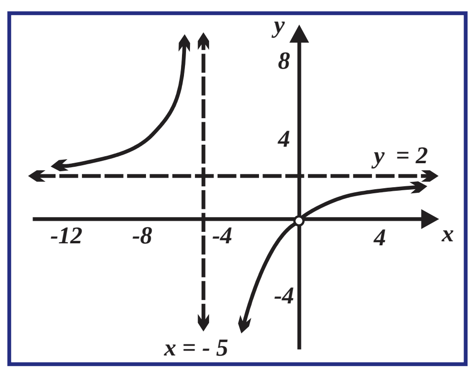


FIGURA 2.23

USO DE SOFTWARE DE MATEMÁTICAS

Grafique la función $r(x)=\dfrac{2x^2}{x^2+5x}$ utilizando algún software y compare la curva obtenida con la curva que construimos en el *ejemplo 2.14*.

b. Bosquejemos la curva asociada a $r(x)=\dfrac{x^2+x-6}{x^2+9x+18}$.

1. $r(x)=\dfrac{x^2+x-6}{x^2+9x+18}=\dfrac{(x+3)(x-2)}{(x+3)(x+6)}=\dfrac{x-2}{x+6}$, sí $x\neq -3$.
$p(x)=x^2+x-6$ y $q(x)=x^2+9x+18$, tienen como factor común $x+3$, por tanto $r(-3)$ no existe y representa un hueco en la curva asociada a $r(x)$.
2. El único cero de $r(x)$ es $x=2$, por tanto, su curva asociada interseca al eje x en $I_x(2,0)$. Como $r(0)=-\frac{1}{3}$, la curva asociada a $r(x)$ interseca al eje y en $I_y\left(0,-\frac{1}{3}\right)$. $dom(r)=(-\infty,-6)\cup(-6,-3)\cup(-3,+\infty)$.

3. La función r tiene una asíntota vertical de ecuación $x=-6$. Puesto que $\dfrac{a_n x^n}{b_m x^m}=\dfrac{x}{x}=1$, entonces la curva asociada a $r(x)$ tiene como asíntota horizontal la recta de ecuación $y=1$.
4. La *figura 2.24*. muestra un bosquejo de la curva asociada a r.

INTERVALOS	x_p	$r(x_p)$	SIGNO DE $r(x)$
$(-\infty,-6)$	-4	5	positivo
$(-6,2)$	0	$-\frac{1}{3}$	negativo
$(2,+\infty)$	3	$\frac{5}{9}$	positivo

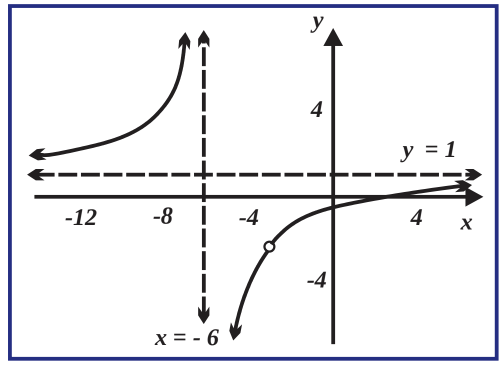


FIGURA 2.24

USO DE SOFTWARE DE MATEMÁTICAS

Grafique la función $r(x)=\dfrac{x^2+x-6}{x^2+9x+18}$ utilizando algún software y compare la curva obtenida con la curva que construimos en el *ejemplo 2.14.b*.

c. $r(x)=-\dfrac{3x-6}{x+3}$.
1. $p(x)=-3x+6$ y $q(x)=x+3$ no tienen factores comunes.
2. El único cero es $x=2$ y $I_x(2,0)$. $r(0)=2$, la curva asociada a r interseca al eje y en $I_y(0,2)$. $dom(r)=(-\infty,-3)\cup(-3,+\infty)$.

3. La función r tiene asociada una asíntota vertical de ecuación $x=-3$. Dado que $\dfrac{a_n x^n}{b_m x^m}=\dfrac{-3x}{x}=-3$, por tanto la función r tiene asociada una asíntota horizontal de ecuación $y=-3$.
4. La *figura 2.25*. muestra un bosquejo de la curva asociada a r.

INTERVALOS	x_p	$r(x_p)$	SIGNO DE $r(x)$
$(-\infty,-3)$	-4	5	negativo
$(-3,2)$	1	$\frac{3}{4}$	positivo
$(2,+\infty)$	3	$-\frac{1}{2}$	negativo

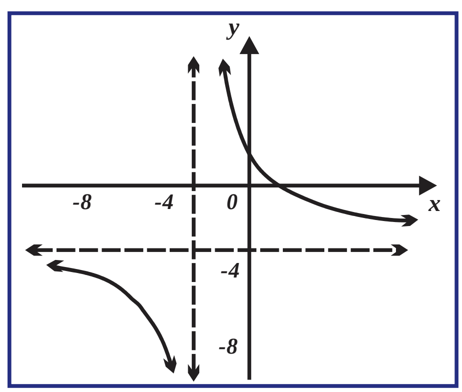


FIGURA 2.25

USO DE SOFTWARE DE MATEMÁTICAS

Grafique la función $r(x)=-\dfrac{3x-6}{x+3}$ utilizando algún software y compare la curva obtenida con la curva que construimos en el *ejemplo 2.14. c*.

d. $r(x)=\dfrac{x}{x^2-5x-6}=\dfrac{x}{(x-6)(x+1)}$.

1. $p(x)=x$ y $q(x)=x^2-5x-6$ no tienen factores comunes, por tanto, la curva asociada a r es continua.

2. El único cero de r es $x=0$ y su curva asociada interseca al eje y en $I_y(0,0)$.

$dom(r)=(-\infty,-1)\cup(-1,6)\cup(6,+\infty)$.

3. r tiene dos asíntotas verticales de ecuaciones $x=-1$ y $x=6$.

Puesto que $\dfrac{a_n x^n}{b_m x^m}=\dfrac{x}{x^2}=\dfrac{1}{x}$, entonces r tiene una asíntota horizontal de ecuación $y=0$.

4. La *figura 2.26*. presenta un bosquejo de la curva asociada a r.

INTERVALOS	x_p	$r(x_p)$	SIGNO DE $r(x)$
$(-\infty,-1)$	-4	$-\frac{2}{15}$	negativo
$(-1,0)$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{2}{13}$	positivo
$(0,6)$	4	$-\frac{2}{5}$	negativo
$(6,+\infty)$	8	$\frac{4}{9}$	positivo

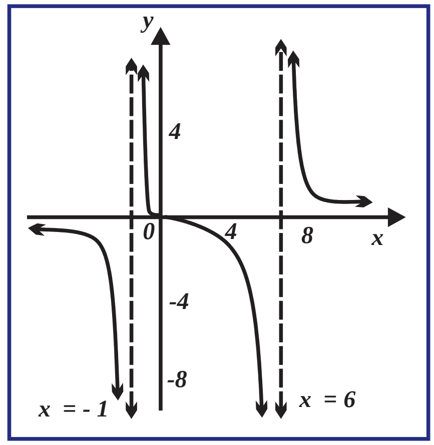


FIGURA 2.26

USO DE SOFTWARE DE MATEMÁTICAS

Grafique la función $r(x)=\dfrac{x}{x^2-5x-6}=\dfrac{x}{(x-6)(x+1)}$ utilizando algún software y compara la curva obtenida con la curva que construimos en el *ejemplo 2.14.d*.

e. $r(x)=\dfrac{x^2-4}{x^2-16}$.

1. $r(x)=\dfrac{x^2-4}{x^2-16}=\dfrac{(x-2)(x+2)}{(x-4)(x+4)}$ y $p(x)=x^2-4$, $q(x)=x^2-16$, r no tienen factores comunes.

2. Los ceros de $r(x)$ son $x=-2$ y $x=2$. $dom(r)=(-\infty,-2)\cup(-2,2)\cup(2,+\infty)$.

$r(0)=\frac{1}{4}$, interseca al eje y en $I_y\left(0,\dfrac{1}{4}\right)$.

3. Las asíntotas verticales tienen ecuaciones $x=-4$ y $x=4$.

$\dfrac{a_n x^n}{b_m x^m}=\dfrac{x^2}{x^2}=1$, y $y=1$ es la ecuación de la asíntota horizontal.

4. La *figura 2.27*. corresponde a un bosquejo de la curva asociada a r.

INTERVALOS	x_p	$r(x_p)$	SIGNO DE $r(x)$
$(-\infty,-4)$	-6	$\frac{8}{5}$	positivo
$(-4,-2)$	-3	$-\frac{2}{7}$	negativo
$(-2,2)$	0	$\frac{1}{4}$	positivo
$(2,4)$	3	$-\frac{5}{7}$	negativo
$(4,+\infty)$	6	$\frac{8}{5}$	positivo

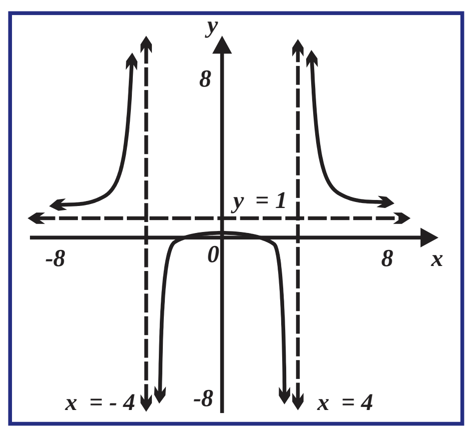


FIGURA 2.27

USO DE SOFTWARE DE MATEMÁTICAS

Grafique la función $r(x)=\dfrac{x^2-4}{x^2-16}$ utilizando algún software y compara la curva obtenida con la curva que construimos en el *ejemplo 2.14.e*.

f. $r(x)=\dfrac{x^2+2x+14}{x^2+2x+24}$.

1. $p(x)=x^2+2x+14$ y $q(x)=x^2+2x+24$ no son factorizables.

2. $r(x)$ no tiene ceros. $dom(r)=IR$.

Puesto que $r(0)=\dfrac{7}{12}$, la curva de r interseca al eje y en $I_y\left(0\ ,\ \dfrac{7}{12}\right)$.

3. r no tiene asíntotas verticales. $\dfrac{a_n x^n}{b_m x^m}=\dfrac{x^2}{x^2}=1$ por tanto $y=1$ es la ecuación de la asíntota horizontal.

4. La siguiente tabla apoya en trazo del bosquejo de la curva correspondiente a r, vea la *figura 2.28*.

x	$r(x)$
-4	$\frac{11}{16}$
-2	$\frac{7}{12}$
2	$\frac{11}{16}$

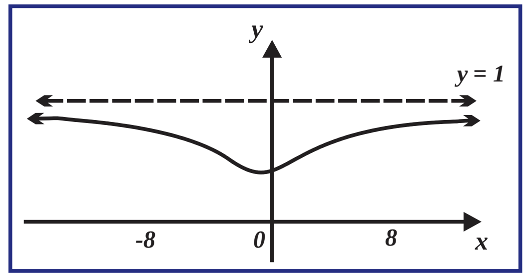


FIGURA 2.28

USO DE SOFTWARE DE MATEMÁTICAS

Grafique la función $r(x)=\dfrac{x^2+2x+14}{x^2+2x+24}$ utilizando algún software y compare la curva obtenida con la curva que construimos en *ejemplo 2.14.f*.

g. $r(x)=\dfrac{x^3-1}{x^2-1}$.

1. $r(x)=\dfrac{x^3-1}{x^2-1}=\dfrac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)(x+1)}=x+\dfrac{1}{x+1}$, los polinomios p y q tienen como factor común $x-1$, por tanto, la curva correspondiente a $r(x)$ presenta un hueco en $\left(1\ ,\ \dfrac{3}{2}\right)$.

2. r no tiene ceros, puesto que $r(1)$ está indefinido. La curva asociada a r interseca al eje y en $I_y(0\ ,1)$. $dom(r)=(-\infty,-1)\cup(-1,1)\cup(1,+\infty)$.

3. La única asíntota vertical tiene ecuación $x=-1$. $\dfrac{a_n x^n}{b_m x^m}=\dfrac{x^3}{x^2}$, la curva asociada a r tiene una asíntota oblicua de ecuación $y=x$.

4. La *figura 2.29*. corresponde a un bosquejo de la curva asociada a r.

x	$r(x)$
-2	-3
2	$-\frac{7}{3}$

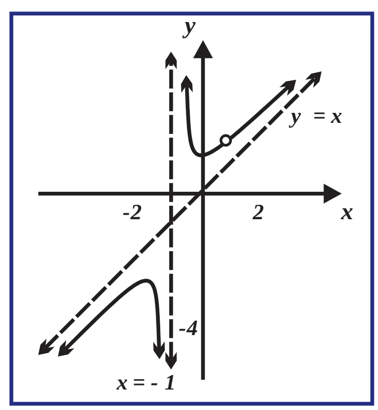


FIGURA 2.29

USO DE SOFTWARE DE MATEMÁTICAS

Grafique la función $r(x)=\dfrac{x^3-1}{x^2-1}$ utilizando algún software y compara la curva obtenida con la curva que construimos en *ejemplo 2.14.g*.

h. $r(x)=\dfrac{x^3}{x^2-4}$.

1. $r(x)=\dfrac{x^3}{x^2-4}=x+\dfrac{4x}{x^2-4}=x+\dfrac{4x}{(x+2)(x-2)}$, por tanto $p(x)$ y $q(x)$ no tienen factores comunes.

2. El único cero de $r(x)$ es $x=0$. Puesto que $r(0)=0$ el punto de intersección con el eje y es $I_y(0,0)$.

3. Las asíntotas verticales tienen ecuaciones $x=-2$ y $x=2$.

$\dfrac{a_n x^n}{b_m x^m}=\dfrac{x^3}{x^2}$, por tanto r tiene una asíntota oblicua de ecuación $y=x$.

4. La *figura 2.30*. muestra un bosquejo de la curva asociada a r.

Intervalos	x_p	$r(x_p)$	signo de $r(x)$
$(-\infty,-2)$	-4	$-\frac{16}{3}$	negativo
$(-2,0)$	-1	$\frac{1}{3}$	positivo
$(0,2)$	1	$-\frac{1}{3}$	negativo
$(2,+\infty)$	4	$\frac{16}{3}$	positivo

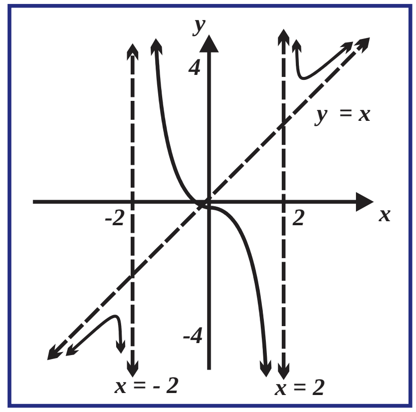


FIGURA 2.30

USO DE SOFTWARE DE MATEMÁTICAS

Grafique la función $r(x)=\dfrac{x^3}{x^2-4}$ utilizando algún software y compara la curva obtenida con la curva que construimos en *ejemplo 2.14.h*.

□

En el entorno del estudioso, existen diversas situaciones que su estudio involucra, ya sea la construcción de una función racional y su posterior análisis, o simplemente el estudio de una función racional, ahora presentamos algunas de éstas situaciones.

EJEMPLO 2.15 (Aplicaciones de las funciones racionales)

a. (Incremento de la concentración de alcohol).

¿Qué cantidad de alcohol debe agregarse a $100\,ml.$, de una mezcla con una concentración del 35% de alcohol, para producir otra mezcla de alcohol con una concentración del $x\%$?

Inicialmente, la cantidad de alcohol en la mezcla es de $35\,ml.$ puesto que:

$$\frac{35\,ml.\ de\ alcohol}{100\,ml.\ de\ mezcla}(100\,ml.\ de\ mezcla)=35ml.\ de\ alcohol\ .$$

Sea la variable $x=mililitros\ de\ alcohol\ agregados\ a\ la\ mezcla$, entonces:

$x+35$ es la cantidad de alcohol en la mezcla resultante y $x+100$ es el volumen de la mezcla, por tanto: $\dfrac{x+35}{x+100}$ es la concentración de alcohol en función del alcohol agregado. Así, $c(x)=\dfrac{x+35}{x+100}$ representa la concentración de alcohol en función del alcohol agregado, evidentemente $x\geq 0$.

b. (Perímetro de un rectángulo de área fija)

Una región rectangular contiene un área de 1000 metros cuadrados, ¿cómo varía el perímetro en función de su ancho?

Representemos por x el ancho del rectángulo y por y su largo, entonces $1000=x\cdot y$ y $2x+2y=p$. De la primera ecuación obtenemos $y=\dfrac{1000}{x}$, su sustitución en la segunda ecuación da $p=2x+\dfrac{2000}{x}=\dfrac{2x^2+2000}{x}$, siempre que $x>0$.

Por tanto, la función que describe el perímetro del rectángulo en función de su ancho es $p(x)=\frac{2x^2+2000}{x}$, donde $x>0$.

c. (Población de mamíferos)
El número de cierto tipo de mamíferos en función del tiempo, en una región específica, se modela por medio de la función $p(t)=\frac{250+150t}{5+0.25t}$.

i. Por tanto, la población de esos mamíferos a los 10 años es $p(10)=\frac{250+150(10)}{5+0.25(10)}\approx 233$.

ii. La población de mamíferos a los 20 años es $p(20)=\frac{250+150(20)}{5+0.25(20)}\approx 225$.

iii. La población de mamíferos a los 40 años es $p(40)=\frac{250+150(40)}{5+0.25(40)}\approx 467$.

d. (Producción de objetos)
El costo total de producir x unidades está dado por $p(x)=3x^2+x+48$ pesos. El costo promedio por unidad producida, es el costo total dividido por la cantidad de unidades producidas.

i. La función $C_P(x)=\frac{p(x)}{x}=\frac{3x^2+x+48}{x}$ representa el costo promedio por producir x unidades.

ii. El costo promedio (por unidad) al producir $x=10$ unidades es $C_P(10)=\frac{3(10)^2+(10)+48}{10}=35.8$ por unidad.

e. (Oscilación de una partícula)
En física se demuestra que la oscilación de una partícula que se fuerza para oscilar en un medio resistente tiene amplitud $A(r)$ dada por la función $A(r)=\frac{1}{\left(1-r^2\right)^2+kr^2}$ donde r es el radio de la frecuencia de la fuerza frente a la frecuencia natural de oscilación y k es una constante positiva que mide el efecto de amortiguación del medio resistente.

i. Si $k=1$, entonces $A(r)=\frac{1}{\left(1-r^2\right)^2+r^2}$.

ii. $A(r)=\frac{1}{\left(1-r^2\right)^2+r^2}$ no tiene asíntotas verticales puesto que $\left(1-r^2\right)^2+r^2\neq 0$ ¿por qué?

iii. $A(r)=\frac{1}{\left(1-r^2\right)^2+r^2}$ tiene como asíntota horizontal la recta de ecuación $y=x$.

f. (Costo de un envase cilíndrico)
Se construirá un envase cilíndrico que contendrá un volumen fijo de 1000 centímetros cúbicos de cierto líquido. El costo del material para fabricar las "tapas circulares" del cilindro es 3 pesos por centímetro cuadrado y el costo del material utilizado para construir la parte lateral es 2 pesos por centímetro cuadrado.

i. Sean: C el costo total del envase, ct el costo de las tapas y cl el costo de la parte lateral, entonces $C=ct+cl$.

ii. Si h representa la longitud de la altura, r la longitud del radio de las bases (superior e inferior), entonces el costo del envase en términos del costo de los materiales es $C=3\pi r^2+3\pi r^2+2(2\pi r h)=6\pi r^2+4\pi r h$.

iii. Puesto que el volumen del envase cilíndrico es $V=1000=\pi r^2 h$, para escribir el costo del envase en términos de la longitud del radio, despejamos la altura y la sustituimos en la ecuación del costo, así $V=1000=\pi r^2 h$, entonces $h=\frac{1000}{\pi r^2}$ y al sustituirla en la ecuación del costo obtenemos $C(r)=6\pi r^2+\frac{4000}{r}$ pesos.

iv. Si el radio es $r=10$ centímetros, entonces el costo del envase es $C(10)=6\pi(10)^2+\frac{4000}{(10)}=600\pi+400$ pesos.

g. (Depreciación)
Como resultado de los avances tecnológicos en la producción de teléfonos celulares, que son cada vez más compactos y potentes, disminuye el precio de los que existen en el mercado actualmente. Supongamos que dentro de t meses, el precio de cierto modelo se rige por $p(t)=4000+\frac{3000}{10t+5}$ pesos.

i. EL precio actual de un teléfono celular es $p(0)=4000+\dfrac{3000}{10(0)+5}=4600$ pesos.

ii. EL precio de un teléfono celular, a los cinco meses será de $p(5)=4000+\dfrac{3000}{10(5)+5}=4054.\overline{54}$ pesos.

iii. EL precio de un teléfono celular, a los cinco meses bajó $p(0)-p(5)=4600-4054.\overline{54}=545.\overline{46}$ pesos.

iv. EL precio de un teléfono celular será de 4200 pesos cuando:

$4200=4000+\dfrac{3000}{10t+5}$, entonces $200(10t+5)=3000$ ó $10t+5=15$, pasado un $t=1$ mes.

v. EL precio de un teléfono celular a largo plazo será de 4000 pesos.

h. (Recolección de fondos)

Una secta religiosa ha lanzado una campaña para reunir fondos. Los administradores de la secta estiman que tardarán $f(x)=\dfrac{100x}{1500-100x}$ semanas en conseguir el $x\%$ de sus objetivos.

i. Entonces en $f(50)=\dfrac{100(50)}{1500-10(50)}=\dfrac{5000}{1000}=5$ semanas alcanzarán el 50% de sus objetivos.

ii. En $f(100)=\dfrac{100(100)}{1500-10(100)}=\dfrac{10000}{500}=20$ semanas alcanzarán el 100% de sus objetivos.

iii. Para determinar el porcentaje de que alcanzaran en 2 semanas, resolvemos la ecuación $2=\dfrac{100x}{1500-100x}$, por tanto $3000-200x=100x$ o $3000=100x$, entonces en dos semanas alcanzarán el $x=30$ por ciento.

□

¿Qué conceptos aprendí?

PARA COMPLETAR

1. Si en una función racional el grado del "polinomio numerador" es menor que el grado del "polinomio denominador", esta función se denomina________________________________.

2. Una función racional es________________ si y sólo si $p(x)$ y $q(x)$ tienen ceros comunes.

3. En una función racional reducible existen __________________________________ en el numerador y en el polinomio denominador.

4. Los ceros del polinomio denominador de una función racional irreducible tienen asociada _________________________.

5. Los ceros del polinomio denominador de una función racional reducible se manifiestan como _______________en la curva correspondiente.

6. Si él ____________________________________ es una unidad mayor que el grado del polinomio denominador, entonces la curva correspondiente tiene una asíntota oblicua.

CIERTO O FALSO (Justifique su respuesta)

1. Una función racional tiene término dominante.

2. Los ceros de una función racional están determinados por la función polinomial del polinomio numerador.

3. Una función racional es el cociente de dos funciones polinomiales.

4. En una función racional el grado del polinomio numerador puede ser menor que el grado del polinomio denominador.

5. Si en una función racional el grado del polinomio numerador es igual al grado del polinomio denominador, entonces es reducible.

6. Todas las funciones racionales son irreducibles.

7. La curva asociada a la función racional q puede tener una asíntota vertical y una asíntota horizontal.

8. Si la curva asociada a la función racional f tiene como asíntota vertical la recta de ecuación $x=3$, entonces el factor $x-3$ debe estar presente en el denominador de f.

9. El dominio (natural de definición) de una función racional pueden ser todos los números reales.

10. La curva asociada a toda función racional intersecan al eje de las ordenadas.

11. Existen funciones racionales que no tienen asíntotas.

12. Todas las funciones racionales tienen asíntotas verticales.

13. Todas las curvas asociadas a las funciones racionales intersecan al eje de las ordenadas.

14. Si la curva asociada a la función racional f tiene como asíntota horizontal a la recta de ecuación $y = 4$, entonces el grado de la función polinomial del numerador es igual al grado de la función polinomial del denominador.

15. Existen funciones racionales irreducibles en las que la curva asociada no tiene asíntotas verticales.

16. Las asíntotas asociadas a funciones racionales se pueden intersectar.

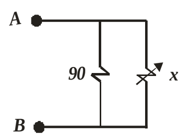
17. La curva asociada a la función racional q puede tener una asíntota oblicua y una asíntota horizontal.

18. Una función racional irreducible en la que el grado del polinomio denominador es una unidad mayor que el grado del polinomio denominador posee una asíntota oblicua que es una recta.

PROBLEMAS PROPUESTOS 2.1

1. Suponga que el volumen V de un bloque de hielo, cuando se pone a temperatura ambiente ($20\ °C$), es inversamente proporcional al tiempo t transcurrido. Si un bloque de hielo con un volumen de 0.2 metros cúbicos tarda 60 minutos en reducir su volumen a la décima parte, determine $V(t)$.

2. Un resistor $R_1 = 90$ Ohms está conectado en paralelo con otro resistor de resistencia variable x, tal como lo muestra la figura. Determine la función que relaciona la resistencia en los puntos A y B.



3. Una caja de cartón, con base cuadrada y con tapa contiene un volumen de 100 centímetros cúbicos. Determine una función que describe el área total de la caja en términos de la longitud de los lados de la base.

4. Una caja de cartón, con base cuadrada y *sin tapa* tiene volumen de 100 centímetros cúbicos. Determine la función que relaciona el área total de la caja y la longitud de los lados de la base.

5. a. Se desea construir una caja que debe tener base cuadrada y *sin tapa*, su volumen debe ser de 100 centímetros cúbicos. Si el precio del material que se utiliza en la base es el doble del que se utiliza en los lados, determine una función que relacione el costo total de la caja y la longitud de los lados de la base.

b. En el inciso a. suponga que el largo de la base es el doble del ancho. Determine una función que relacione el costo total de la caja y la longitud del ancho de la base.

c. En el inciso b. suponga que la caja tiene tapa, determine una función que relacione el costo total de la caja y la longitud del ancho de la base.

6. Se desea construir un tanque en forma de cilindro coronado por una semiesfera, el tanque debe tener capacidad de 6π metros cúbicos.

a. Determine la función que describe la altura en términos de su radio.

b. Determine la función que describe el área del tanque en función de su radio.

c. Suponga que el precio del material para construir la base es 200 pesos por metro cuadrado, y que el precio del material para construir la parte esférica es 100 pesos por metro cuadrado y que el precio del material de la parte cilíndrica es 150 pesos por metro cuadrado. Determine la función que describe el precio del tanque en función de su radio.

7. Se desea construir una ventana rectangular coronada por un semicírculo con radio de longitud x y que tenga un área de 4 metros cuadrados.

a. Determine la función que describe la altura de la parte rectangular, en términos de la longitud del radio.

b. Determine la función que describe la altura total de la ventana, en términos de la longitud del radio.

c. Suponga que el precio del material para construir la parte rectangular es 400 pesos por metro cuadrado y que el precio del material para construir la parte circular es 800 pesos por metro cuadrado, determine la función que describe el precio de la ventana en función de la longitud del radio de la parte circular.

8. Se desea construir un almacén en forma de cilindro coronado por un cono circular recto, con capacidad de 300π metros cúbicos.

a. Determine la función que describe la altura de la parte cilíndrica, en términos de la longitud del radio.

b. Si la altura del cilindro es la misma que la altura de la parte cónica, el precio del material para construir la parte circular es 400 pesos por metro cuadrado y que el precio del material para construir la parte cónica es 600 pesos por metro cuadrado, determine la función que describe el precio del almacén en función de la longitud del radio.

9. La página (con forma de rectángulo) de un libro tiene x centímetros de ancho y y centímetros de largo, la superficie impresa es de 30 centímetros cuadrados y se encuentra entre los márgenes que tienen longitudes de 1 centímetro (en el ancho) y 2 centímetros (a lo largo). Determine la función que describe el área total de la página.

10. Determine el dominio, los ceros, el punto de intersección con el eje y y las ecuaciones de las asíntotas verticales.

a. $f(x)=\dfrac{x}{4x^2+2x}$. **d.** $f(x)=\dfrac{x^2+5x+6}{x^3+6x^2+8x}$.

b. $f(x)=\dfrac{x+5}{4x^2+25}$. **e.** $f(x)=\dfrac{10x-5}{x^2+9x+18}$.

c. $f(x)=\dfrac{3x-9}{4x^2-36}$. **f.** $f(x)=\dfrac{2x^2+10x^2+12}{4x^2-36}$.

11. Determine el dominio, los ceros, el punto de intersección con el eje y, las ecuaciones de las asíntotas verticales y las ecuaciones de las asíntotas horizontales.

a. $Q(x)=\dfrac{4x-2}{2x+4}$. **d.** $Q(x)=\dfrac{4x^2-9x+6}{x^2-4}$.

b. $Q(x)=\dfrac{2x^2-18}{3x^2+6}$. **e.** $f(x)=\dfrac{x^2}{x^2+2x-8}$.

c. $Q(x)=\dfrac{2x^2-2x-4}{x^2-2x-8}$. **f.** $f(x)=\dfrac{x^2}{x^2+3x-10}$.

12. Determine el dominio, los ceros, los huecos, el punto de intersección con el eje y, las ecuaciones de las asíntotas: verticales, horizontales y oblicuas.

a. $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$. **e.** $f(x)=\dfrac{x^2+x-2}{x-1}$.

b. $r(x)=\dfrac{x^2-1}{x+1}$. **f.** $f(x)=\dfrac{2x^3+x^2-x}{2x^3-3x^2+x}$.

c. $r(x)=\dfrac{x-3}{(x-3)^2}$. **g.** $Q(x)=\dfrac{x^2+4x-14}{x^2+4x-10}$.

d. $f(x)=\dfrac{x-1}{x^2+x-2}$. **h.** $Q(x)=\dfrac{x^2-2x+3}{x^2-2x-1}$.

13. Identifique las diferencias entre los pares de funciones, justifique su respuesta.

a. $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ y $g(x)=x+1$.

b. $r(x)=\dfrac{x^2-1}{x+1}$ y $g(x)=x-1$.

c. $r(x)=\dfrac{x-3}{(x-3)^2}$ y $g(x)=\dfrac{1}{x-3}$.

d. $f(x)=\dfrac{x-1}{x^2+x-2}$ y $g(x)=\dfrac{1}{x+2}$.

e. $f(x)=\dfrac{x^2+x-2}{x-1}$ y $g(x)=x+2$.

14. Determine el comportamiento alrededor de los ceros y de las asíntotas verticales.

a. $f(x)=\dfrac{3}{x+2}$. **e.** $f(x)=\dfrac{2x^2+12}{10x^2-40}$.

b. $f(x)=\dfrac{2x-4}{x^2+5x+6}$. **f.** $g(x)=\dfrac{x+2}{4x^3-6x+8}$.

c. $f(x)=\dfrac{x-3}{x^2+8x+12}$. **g.** $f(x)=\dfrac{5x-10}{x^2-2x-15}$.

d. $f(x)=\dfrac{3x+6}{x^3+5x^2+6x}$. **h.** $f(x)=\dfrac{x-1}{2x^3+1}$.

15. Verifique que las funciones poseen una "asíntota parabólica" y determine su ecuación. Sugerencia, efectúe el cociente.

a. $f(x)=\dfrac{x^3-4x}{x-1}$. **c.** $f(x)=\dfrac{x^3-2x^2+2x+1}{x+2}$.

b. $h(x)=\dfrac{x^4-2x^2+4}{x^2-1}$. **d.** $g(x)=\dfrac{2x^3+3x^2+x+5}{x-3}$.

16. Construya una función racional con las siguientes características:
a. Sin ceros.
b. Asíntotas verticales en $x=1$ y $x=3$.
c. Asíntota horizontal $y=2$.
d. Interseque al eje de las ordenadas en $y=-2$.

17. Construya una función racional con las siguientes características:
a. Sin ceros.
b. Asíntotas verticales en $x=-1$ y $x=5$.
c. Asíntota horizontal $y=-4$.
d. Interseque al eje de las ordenadas en $y=-2$.

18. Construya una función racional con las siguientes características:
a. Asíntotas verticales en $x=2$ y $x=-4$.
b. Asíntota horizontal $y=2$.

19. Construya una función racional con las siguientes características:
a. Asíntotas verticales en $x=-3$ y $x=5$.
b. Asíntota horizontal $y=-2$.
c. Hueco en $x=1$.

20. Construya una función racional con las siguientes características:
a. Asíntota oblicua $y=-x$.
b. Asíntota vertical $x=0$.
c. Hueco en $x=3$.

21. Construya una función racional con las siguientes características:
a. Asíntota oblicua $y=x$.
b. Asíntota vertical $x=0$.
c. Huecos en $x=3$ y $x=-3$.

22. Haga un bosquejo de la curva correspondiente.

a. $f(x)=\dfrac{4}{x+4}$.

b. $f(x)=\dfrac{2x-4}{x^2+5x+6}$.

c. $f(x)=\dfrac{x}{x^2-x-2}$.

d. $f(x)=\dfrac{4}{x^2-x-12}$.

e. $f(x)=\dfrac{2x-2}{x^2-x}$.

f. $f(x)=\dfrac{x-1}{2x^2-6x+4}$.

g. $f(x)=\dfrac{3x-6}{(x-2)(x+4)}$.

h. $f(x)=\dfrac{5x-10}{x^2-2x-15}$.

i. $f(x)=\dfrac{x}{x^3-5x+3}$.

j. $Q(x)=\dfrac{x^2+4x+3}{x^2+4x-10}$.

k. $Q(x)=\dfrac{x^2}{x^2-49}$.

l. $Q(x)=-\dfrac{x^2-11x+28}{x^2-4x-21}$.

23. Determine los ceros reales, la intersección con el eje y, las asíntotas y luego trace la curva asociada.

a. $p(x)=\dfrac{x^2-10x+25}{x-3}$.

b. $q(x)=\dfrac{3x-8}{x^2+3x+3}$.

c. $f(x)=\dfrac{-x}{x^2-24}$.

d. $f(x)=\dfrac{x+5}{x^2-25}$.

e. $f(x)=\dfrac{x^2+2x-3}{x+1}$.

f. $f(x)=\dfrac{x^2-16}{x^3-64}$.

g. $f(x)=\dfrac{x^3-x}{x-1}$.

h. $f(x)=\dfrac{x^2+2x-3}{x^2+3x}$.

i. $f(x)=\dfrac{x^2+5}{x^2+6}$.

j. $f(x)=\dfrac{x^3+x^2}{x^2+2x}$.

24. Describa la curva asociada, sugerencia: simplifique.

a. $s(x)=\dfrac{x+b}{x+d}$.

b. $s(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ si $c\neq 0$.

25. Trace la curva asociada, ¿Qué semejanzas existen? ¿Cuáles son las diferencias?

a. $Q(x)=\dfrac{x^2}{x-1}$.

b. $r(x)=\dfrac{x^4}{x-1}$.

c. $s(x)=\dfrac{x^6}{x-1}$.

d. $Q(x)=\dfrac{x^8}{x-1}$.

26. ¿Por qué $w(x)=\dfrac{x^2+1}{x^2+4}$ no tiene asíntotas verticales? ¿Por qué no tiene ceros?

27. Qué condiciones debe cumplir la función para:

i. No tenga ceros.

ii. La curva correspondiente no interseque al eje x.

iii. La curva correspondiente no presente "huecos".

iv. No tenga asíntotas verticales.

a. $s(x)=\dfrac{Dx+E}{Ax^2+Bx+C}$.

b. $t(x)=\dfrac{Dx^2}{Ax^2+Bx+C}$.

c. $t(x)=\dfrac{Dx^2+Ex+F}{Ax^2+Bx+C}$.

28. Utilice un graficador, por ejemplo "Geogebra" y haga las gráficas de $q_1(x)=\dfrac{x^2}{x^2-9}$, $q_2(x)=\dfrac{x^4}{x^2-9}$, $q_3(x)=\dfrac{x^6}{x^2-9}$ y $q_4(x)=\dfrac{x^8}{x^2-9}$.

a. ¿Qué semejanzas observa?

b. ¿Qué diferencias observa?

29. (CANTIDAD DE DROGA EN LA SANGRE)

La concentración de una droga en la sangre, después de haber sido consumida por una persona está dada por $d(t)=\dfrac{0.80t}{t^2+0.81}$ miligramos después de t horas.

a. ¿Qué concentración de droga hay después de 2 horas?

b. ¿Qué concentración de droga hay después de 8 horas?

c. ¿Cuánto tiempo transcurrió cuando la concentración de droga era del 20%?

30. (INCREMENTO DE LA CONCENTRACIÓN DE ALCOHOL)

Establezca la función que describe la concentración de alcohol en $100\,ml.$ de una mezcla al 40% de alcohol para producir una mezcla de alcohol al $x\%$.

31. (DEPRECIACIÓN)

Resultado de los avances tecnológicos en la producción de computadoras, cada vez más versátiles y potentes, disminuye el precio de las que existen en el mercado hoy en día. Supongamos que dentro de t meses, el precio de cierto modelo será $p(t)=8000+\dfrac{2000}{8t+4}$ pesos.

a. ¿Cuál es el precio actual de una computadora?

b. ¿Cuál será el precio de una computadora dentro de cinco meses?

c. ¿Cuánto bajó el precio de una computadora a los diez meses?

d. ¿En qué tiempo el precio de una computadora será de 8010 pesos?

e. ¿A largo plazo, cuál será el precio de una computadora?

32. (DEPRECIACIÓN)

Los precios de los automóviles disminuyen a consecuencia de su uso. Supongamos que dentro de t años, el precio de cierto modelo de automóvil será $p(t)=\dfrac{300\,000}{0.5t^2+1}$ pesos.

a. ¿Cuál es el precio actual de un automóvil?

b. ¿Cuál será el precio de un automóvil dentro de un año?

c. ¿Cuánto bajó el precio de un automóvil a los tres años?

d. ¿En qué tiempo el precio del automóvil será de 141000 pesos?

e. ¿A largo plazo, cuál será el precio de un automóvil?

33. (COSTO DE UN ENVASE)

Se construirá un envase en forma de prisma con base cuadrada, mismo que contendrá un volumen fijo de 2000 cc de líquido. El costo del material para fabricar las "bases cuadradas" es de 3 pesos por centímetro cuadrado y el costo del material utilizado para la parte lateral es de 2 pesos por centímetro cuadrado.

a. Si y es la longitud de la altura del envase y x es la longitud de lado de la base cuadrada, escriba el costo del envase en

términos de estas dos variables.
b. Utilice la condición de que el envase contendrá un volumen fijo de 2000 centímetros cúbicos y obtenga la función que describe el costo del envase en términos de la longitud del lado de las bases.
c. Determine el costo del envase si un lado de su base mide 4 centímetros de longitud.

34. (PRODUCCIÓN DE GOLOSINAS)
El costo total de producir x kilogramos de golosinas está dado por $p(x) = 2x^2 + x + 50$ pesos. El costo promedio por unidad producida, es el costo total dividido por la cantidad de unidades producidas.
a. Determine el costo de producir un kilogramo de golosinas.
b. Determine la función “costo promedio” por producir x kilogramos de la golosina.
c. Determine el costo promedio (por kilogramo) al producir $x = 120$ kilogramos de golosinas.

35. (ESTIMACIÓN DE LA POBLACIÓN)
Se estima que dentro de t meses la población en cierta “ciudad “de paso” será de $P(t) = 10\,000 + \frac{10\,000}{10t + 10}$ habitantes.
a. ¿Cuál es el número actual de habitantes?
b. ¿Cuántos habitantes habrá en 10 meses?
c. ¿Cuántos habitantes habrá en 20 meses?
d. Después de un largo tiempo, ¿cuántos habitantes se espera que haya?

36. (RECOLECCIÓN DE FONDOS)
Un club privado ha lanzado una campaña para reunir fondos. Los dirigentes estiman que tardarán $f(x) = \frac{8x}{120 - x}$ semanas en conseguir el $x\%$ de sus objetivos.
a. Trace la parte relevante de la gráfica correspondiente.
b. ¿En cuántas semanas alcanzarán el 25% de sus objetivos?
c. ¿En cuántas semanas alcanzarán el 90% de sus objetivos?
d. ¿Qué porcentaje de objetivos alcanzarán en 3 semanas?

AUTOEVALUACIÓN

1. Mencione las características básicas de una función racional.

2. Efectúe una clasificación de las funciones racionales respecto a los grados de los polinomios que las componen. Respecto a la transformación algebraica de su regla de correspondencia.

3. Mencione algunas situaciones que se pueden modelar utilizando funciones polinomiales.

4. Proporcione la regla de correspondencia de una función racional con polinomio numerador de grado dos y:
a. Sin ceros.
b. Con un cero.
c. Con dos ceros.

5. Proporcione la regla de correspondencia de una función racional con polinomio numerador de grado dos y:
a. Sin ceros.
b. Con un cero.
c. Con dos ceros.

6. Proporcione la regla de correspondencia de una función racional de manera que tenga asociada:
a. Una asíntota vertical.
b. Dos asíntotas verticales.
c. Sin asíntotas verticales.

7. Proporcione la regla de correspondencia de una función racional de manera que su curva asociada tenga una asíntota vertical y un hueco.

8. Haga un bosquejo de la curva asociada a la función racional de regla de correspondencia:

a. $f\left(x\right)=\dfrac{4}{x+4}$.

b. $f\left(x\right)=\dfrac{6}{\left(x-2\right)^{2}}$.

c. $f\left(x\right)=\dfrac{2x-4}{x^{2}+5x+6}$.

d. $f\left(x\right)=\dfrac{5x-10}{x^{2}-2x-15}$.

e. $f\left(x\right)=\dfrac{x^{2}-2x+1}{x^{2}-x-2}$.

f. $f\left(x\right)=\dfrac{x^{2}-3x+2}{x-2}$.

9. Proporcione la regla de correspondencia de una función racional con:

a. Ceros en $x=1$ y $x=-1$, asíntota vertical en $x=3$ y curva asociada con un hueco en $x=4$.

b. Sin ceros, asíntota horizontal de ecuación $y=\frac{3}{4}$ y un hueco en la curva asociada cuando $x=-5$.

c. Que su curva asociada no interseque a los ejes coordenados.

2.2 FUNCIONES CON RADICALES

APRENDIZAJES

En el estudio de la presente sección el alumno:
5. Explorará problemas que se modelen con funciones con radicales.
6. Identificará los elementos de la función: dominio, rango, ceros y traza su gráfica.
7. Resolverá problemas de aplicación.

En problemas relacionados con el cálculo de las dimensiones de diversos cuerpos geométricos (forma de infinidad de estructuras arquitectónicas, instrumentos mecánicos, etc.) frecuentemente se utilizan modelos que incluyen funciones con regla de correspondencia de la forma $f(x) = x^n$, en donde n es un número racional ("fracción" o "quebrado"), éste tipo de funciones suelen denominarse "funciones con radicales". En el *ejemplo 2.16* discutimos algunas de estas situaciones.

PARA REFLEXIONAR

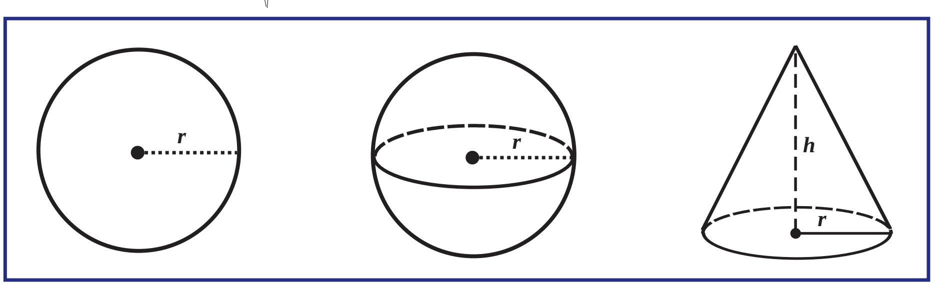
¿? ¿Qué diferencias detectas entre una "fórmula" y una función?

EJEMPLO 2.16 (Figuras geométricas)

a. Los pasteles de forma cilíndrica (concretamente de cilindro truncado), tienen bases circulares y el área de cada una de ellas es $A = \pi r^2$, bajo la condición $r > 0$. Para expresar el radio r de una de las bases en función del área A despejamos r y obtenemos $r = +\sqrt{\frac{A}{\pi}}$ ó $r(A) = \sqrt{\frac{A}{\pi}}$, siempre que $A > 0$, vea la *figura 2.31.a*.

b. Las canicas tienen forma esférica. Puesto que el área de una esfera se calcula con la "fórmula" $A = 4\pi r^2$ con $r > 0$, entonces $r = \sqrt{\frac{A}{4\pi}}$, así el radio de una canica en función de su área está dado por la función $r(A) = \sqrt{\frac{A}{4\pi}}$, siempre que $A > 0$, vea la *figura 2.31.b*.

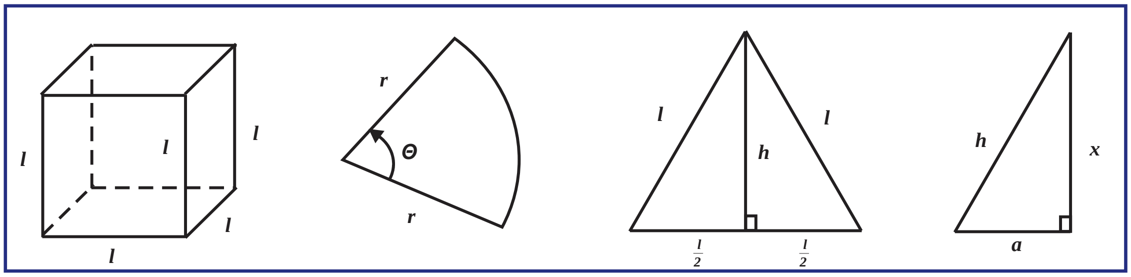
c. El volumen V de un cono circular recto (forma de diversos almacenes, pijas, herramientas, etc.) de altura fija $h = 3$ y radio r está relacionados por $V = \frac{1}{3}\pi r^2(3)$, entonces al despejar el radio obtenemos por lo que el radio del cono en función del volumen está dado por la función $r(V) = \sqrt{\frac{V}{\pi}}$, bajo la condición $V > 0$ (V es mayor que cero), vea la *figura 2.31.c*.



a. **b.** **c.**

FIGURA 2.31

d. La longitud l de los lados de un cubo (de hielo u otro material o sustancia) y su área se relacionan por la relación $A = 4l^2$, entonces la longitud l del lado del cubo en función de su área es $l = \sqrt{\frac{A}{4}}$ ó $l(A) = \sqrt{\frac{A}{4}}$ siempre que $A > 0$, vea la *figura 2.31.d*.



d. e. f. g.

FIGURA 2.31

e. El radio r de un sector circular (con el que se pueden modelar fracciones de alimentos circulares, fracciones de materiales circulares, etc.) en función del área A del sector se obtiene a partir de $A=\frac{1}{2}r^2\theta$ (el ángulo θ está medido en radianes), entonces $r=\sqrt{\frac{2A}{\theta}}$, es decir $r(A)=\sqrt{\frac{2A}{\theta}}$, sí $\theta>0$, vea la *figura 2.31.e.*

f. Para expresar la longitud de los lados de un triángulo equilátero en función de su área A aplicamos el teorema de Pitágoras en el triángulo rectángulo izquierdo de la *figura 2.31.f.* y obtenemos $h^2+\left(\frac{l}{2}\right)^2=l^2$, de donde $h^2=l^2-\left(\frac{l}{2}\right)^2=\frac{3}{4}l^2$ y $h=\frac{\sqrt{3}}{2}l$. Puesto que $A=\frac{bh}{2}$ y si $b=l$ y $h=\frac{\sqrt{3}}{2}l$, entonces $A=l\,\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}l}{2}=\frac{\sqrt{3}}{4}l^2$. Despejando l obtenemos $l=\sqrt{\frac{4}{\sqrt{3}}A}$, es decir $l(A)=2\sqrt{\frac{A}{\sqrt{3}}}$ siempre que $A>0$.

g. El teorema de Pitágoras afirma: En todo triángulo rectángulo el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos y viceversa, si la suma de cuadrados de los catetos es igual al cuadrado de la hipotenusa, entonces el triángulo es rectángulo. En el triángulo rectángulo de la *figura 2.31.g.* el cateto a tiene longitud constante, entonces $h(x)=\sqrt{a^2+x^2}$, siempre que $x>0$

□

EJEMPLO 2.17 (Material necesario para la construcción de un cilindro de volumen fijo)

La función que describe la "cantidad de material (área total) requerida para construir un envase cilíndrico de volumen fijo de un litro (mil centímetros cúbicos)", en términos de la altura, se construye como sigue (vea la *figura 2.32.*). El área de cada una de las tapas circulares es $A_c=\pi x^2$, la superficie lateral es un rectángulo con longitud $l=\pi 2x$ y área $A_l=2\pi x h$. Puesto que

$$\text{área total}=\text{área de las bases circulares}+\text{área lateral}$$, entonces

$A=2\pi x h+2\pi x^2$, esta relación depende de las variables x y h, pero éstas variables están ligadas por el hecho de que $1000=\pi x^2 h$, entonces $x=\sqrt{\frac{1000}{\pi h}}$, si sustituimos en $A=2\pi x h+2\pi x^2$ obtenemos $A=2\pi\frac{1000}{\pi h}+2\pi h\sqrt{\frac{1000}{\pi h}}$ ó $A(h)=\frac{2000}{h}+\sqrt{4000\pi h}$, siempre que $h>0$.

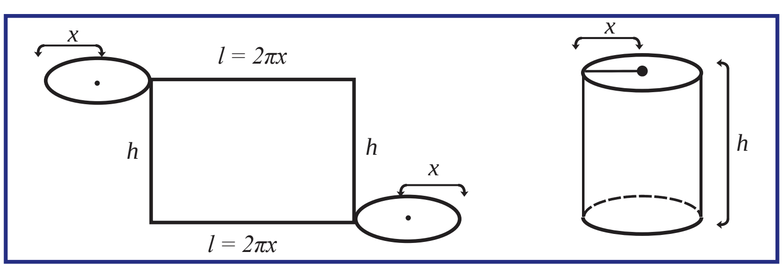


FIGURA 2.32

□

EJEMPLO 2.18 (Costo del tendido de un cable)
Se pretende tender un cable desde una central eléctrica (que se encuentra al lado de un río de ancho uniforme de 900 metros), hasta una fábrica que se encuentra al otro lado del río y 3000 metros agua abajo. El costo de tender el cable bajo el agua es $\$50.00$ por metro, mientras que el costo de tenderlo sobre la tierra es $\$40.00$ por metro. El costo total de tendido C depende del costo de tenderlo bajo el agua C_1 y del costo de tenderlo sobre tierra C_2. Ambos costos dependen del punto P sobre la orilla del río que pertenece a la trayectoria a seguir por el cable, la *figura 2.33* muestra tres posibles trayectorias del cable.
Notación:

- E Central eléctrica.
- F Fábrica a la que es necesario proveer de electricidad.
- →▸▸ La trayectoria a seguir al tender el cable.
- P Punto de cambio de la trayectoria.

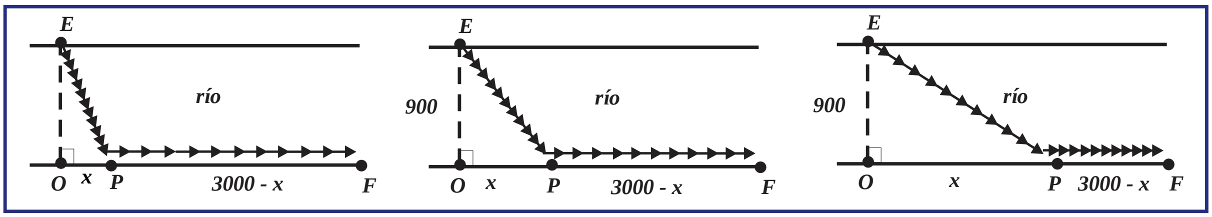


FIGURA 2.33

En la trayectoria EPF, x representa la longitud del segmento de recta OP, si $OF = 3000$ metros, la trayectoria PF tiene longitud de $3000 - x$ metros. En el triángulo rectángulo EOP la hipotenusa EP es la trayectoria del cable bajo el agua a determinar. Aplicando el teorema de Pitágoras obtenemos $(900)^2 + x^2 = (EP)^2$, luego $EP = \sqrt{x^2 + 900^2}$. La *figura 2.34* muestra que la trayectoria del cable tiene una longitud de $\sqrt{x^2 + 900^2}$ metros bajo el agua y longitud de $3000 - x$ metros sobre tierra; la suma de ambas trayectorias es la trayectoria total del cable, esto es: $EP + PF = \sqrt{x^2 + 900^2} + 3000 - x$.
Pero el $Costo\ total = costo\ bajo\ el\ agua + costo\ sobre\ tierra$, algebraicamente, $C(x) = C_1(x) + C_2(x) = 50\,EP + 40\,PF$ ó $C(x) = 50\sqrt{x^2 + 900^2} + 40(3000 - x)$, siempre que $0 < x \leq 3000$.

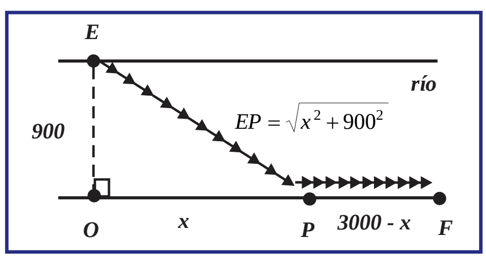


FIGURA 2.34

□

En las subsecuentes líneas nos ocuparemos de desarrollar un estudio exhaustivo de la función con regla de correspondencia de la forma $f(x) = \sqrt{ax^2 + bx + c}$ (irreducible) en donde $a \neq 0$ y/o $b \neq 0$).

PARA REFLEXIONAR

¿? ¿Qué le ocurre a $f(x) = \sqrt{ax^2 + bx + c}$, sí $a = b = 0$?, explique.

Iniciemos nuestro estudio suponiendo que $a = 0$ y $b \neq 0$, en $f(x) = \sqrt{ax^2 + bx + c}$, por tanto, la regla de correspondencia anterior se reduce a $f(x) = \sqrt{bx + c}$. El único cero de $f(x) = \sqrt{bx + c}$ es $x = -\dfrac{c}{b}$. El número $x = -\dfrac{c}{b}$ genera los intervalos $\left(-\infty\ ,\ -\frac{c}{b}\right]$ y $\left[-\frac{c}{b}\ ,\ +\infty\right)$ en la recta real, vea la *figura 2.35*, uno de estos dos intervalos es el dominio de la función $f(x)=\sqrt{bx+c}$ y su curva asociada interseca al eje de las abscisas en el punto $I_x\left(-\frac{c}{b}\ ,\ 0\right)$.

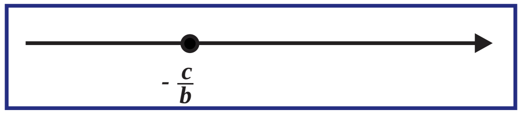


FIGURA 2.35

NOTA

En este tipo de funciones el dominio lo constituye un intervalo semi abierto (o semi cerrado).

Para determinar el dominio de la función con regla de correspondencia $f(x)=\sqrt{bx+c}$ utilizaremos la siguiente estrategia:

ESTRATEGIA 2.3 (DOMINIO DE LA FUNCIÓN $f(x)=\sqrt{ax+b}$)

1. Determine la solución de la ecuación $ax+b=0$ y construya los intervalos $\left(-\infty\ ,\ -\frac{c}{b}\right]$ y $\left[-\frac{c}{b}\ ,\ +\infty\right)$.

2. Elija un número de prueba x_p en cada uno de los intervalos anteriores y sustituya x_p en $bx+c$.

i. Si obtiene un número positivo en el radicando, el intervalo del que eligió x_p es el dominio de $f(x)=\sqrt{bx+c}$.

ii. Si obtiene un número negativo en el radicando, el intervalo del que eligió x_p no es el dominio de $f(x)=\sqrt{bx+c}$.

Por otra parte, el comportamiento "extremo" de $f(x)=\sqrt{bx+c}$ es como sigue:

1. Si $bx+c$ es negativo ($bx+c<0$), entonces $dom(f)=\left(-\infty\ ,\ -\frac{c}{b}\right]$ y la curva asociada a $f(x)=\sqrt{bx+c}$ se comporta como lo muestra la *figura 2.36.a*.

2. Si $bx+c$ es positiva ($bx+c>0$), entonces $dom(f)=\left[-\frac{c}{b}\ ,\ +\infty\right)$ y la curva asociada a $f(x)=\sqrt{bx+c}$ se comporta como lo muestra la *figura 2.36.b*.

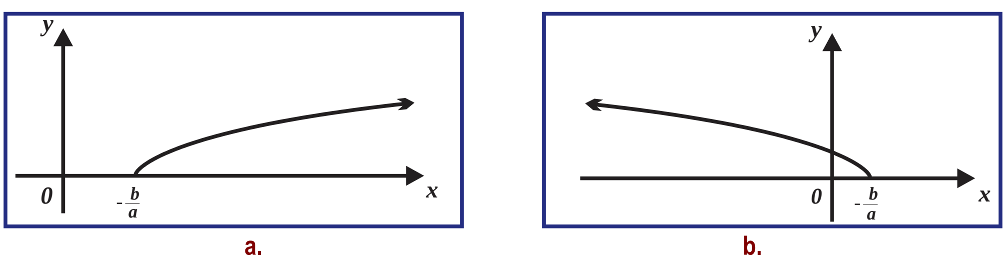


FIGURA 2.36

La proyección perpendicular de la curva asociada a $f(x)=\sqrt{bx+c}$ sobre el eje de las ordenadas es el intervalo $img(f)=[0\ ,\ +\infty)$, que corresponde a la imagen de f.

NOTA

La curva asociada a la función $f(x)=\sqrt{bx+c}$ y dominio $\left(-\infty\ ,\ -\frac{c}{b}\right]$ o $\left[-\frac{c}{b}\ ,\ +\infty\right)$ recibe el nombre de semi parábola.

EJEMPLO 2.19 (Trazo de semi parábolas)

a. Sea $f(x)=\sqrt{2x+6}$.

1. El único cero de $2x+6=0$ es $x=-3$.

2.

INTERVALOS	x_p	$f(x_p)$	SIGNO DEL RADICANDO
$(-\infty\ ,\ -3]$	-4	$\sqrt{-2}$	negativo
$[-3\ ,\ +\infty)$	0	$\sqrt{6}$	positivo

Por tanto, $dom(f)=[-3\ ,\ +\infty)$, la semi parábola correspondiente se muestra en la *figura 2.37.a.*

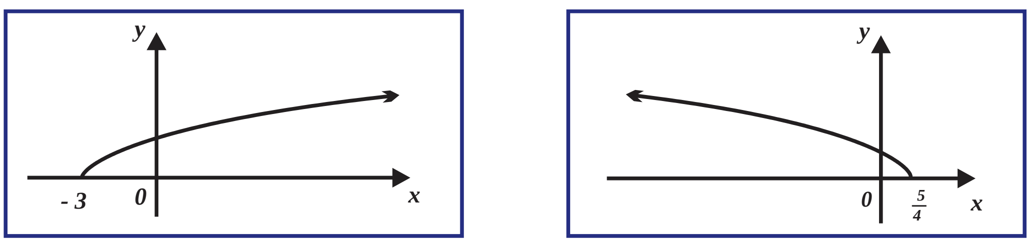
b. Sea $f(x)=\sqrt{-4x+5}$.

1. El único cero de $-4x+5=0$ es $x=\dfrac{5}{4}$.

2.

INTERVALOS	x_p	$f(x_p)$	SIGNO DEL RADICANDO
$\left(-\infty\ ,\ \dfrac{5}{4}\right]$	0	$\sqrt{5}$	positivo
$\left[\dfrac{5}{4}\ ,\ +\infty\right)$	2	$\sqrt{-3}$	negativo

Por tanto, $dom(f)=\left(-\infty\ ,\ \dfrac{5}{4}\right]$, la semi parábola correspondiente se muestra en la *figura 2.37.b.*



a. b.

FIGURA 2.37

USO DE SOFTWARE DE MATEMÁTICAS

Trace las curvas asociadas a las funciones del *ejemplo 2.19* y vea que coinciden con lo antes descrito.

□

PARA REFLEXIONAR

¿? Utilizando la semi parábola asociada a $f(x)=\sqrt{bx+c}$ ¿cómo obtendría la semi parábola asociada a $f(x)=-\sqrt{bx+c}$?

EJEMPLO 2.20 (Trazo de semi parábolas)

a. Sea $f(x)=-\sqrt{9x-18}$.

1. El único cero de $9x-18=0$ es $x=2$.

2.

INTERVALOS	x_p	$f(x_p)$	SIGNO DEL RADICANDO
$(-\infty\ ,\ 2]$	0	$-\sqrt{-18}$	negativo
$[2\ ,\ +\infty)$	3	$-\sqrt{9}$	positivo

Por tanto, $dom(f)=[2\ ,\ +\infty)$.

3. El signo negativo que precede al radical indica que la semi parábola correspondiente a $f(x)=-\sqrt{9x-18}$ se encuentra por abajo del eje de las abscisas (su eje de simetría), vea la *figura 2.38.a.* También $img(f)=(-\infty\ ,\ 0]$.

b. Trazo de la curva asociada a $f\left(x\right)=-\sqrt{-2x+4}$.

1. El único cero de $-2x+4=0$ es $x=2$.

2.

INTERVALOS	x_p	$f\left(x_p\right)$	SIGNO DEL RADICANDO
$\left(-\infty\ ,\ 2\right]$	0	$-\sqrt{4}$	positivo
$\left[2\ ,\ +\infty\right)$	3	$-\sqrt{-2}$	negativo

Por tanto, $dom\left(f\right)=\left(-\infty\ ,\ 2\right]$.

3. El signo negativo que precede al radical indica que la semi parábola correspondiente a $f\left(x\right)=-\sqrt{-2x+4}$ se encuentra por abajo del eje de las abscisas (eje de simetría), vea la *figura 2.38.b.* También $img\left(f\right)=\left(-\infty\ ,\ 0\right]$.

c. Trazo de la curva asociada a $f\left(x\right)=\sqrt{-3x-1}$.

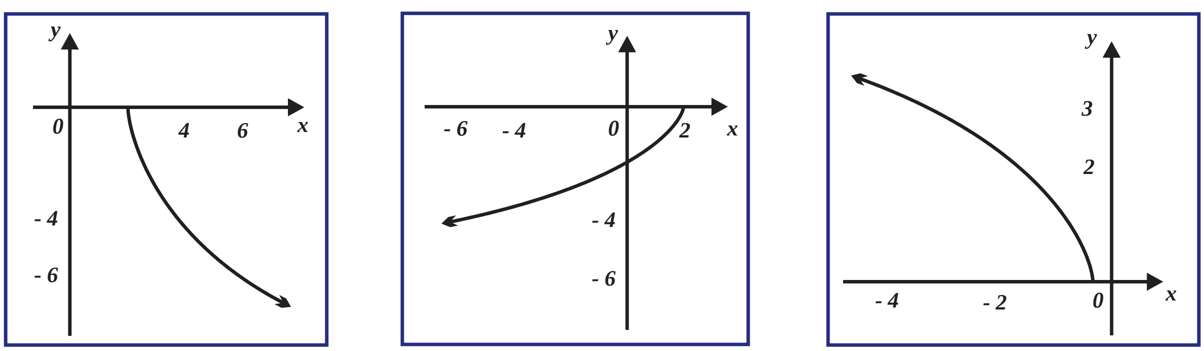
1. El único cero de $-3x-1=0$ es $x=-\frac{1}{3}$.

2.

INTERVALOS	x_p	$f\left(x_p\right)$	SIGNO DEL RADICANDO
$\left(-\infty\ ,\ -\frac{1}{3}\right]$	-1	$\sqrt{2}$	positivo
$\left[-\frac{1}{3}\ ,\ +\infty\right)$	0	$\sqrt{-1}$	negativo

Por tanto, $dom\left(f\right)=\left(-\infty\ ,\ -\frac{1}{3}\right]$.

3. La semi parábola correspondiente a $f\left(x\right)=\sqrt{-3x-1}$ se encuentra por "encima" del eje de las abscisas (eje de simetría de la parábola), vea la *figura 2.38.c.* También $img\left(f\right)=\left[0\ ,\ +\infty\right)$.



a. **b.** **c.**

FIGURA 2.38

USO DE SOFTWARE DE MATEMÁTICAS

Trace las curvas asociadas a las funciones del *ejemplo 2.20* y verifique que coinciden con lo antes descrito.

□

La inclusión del parámetro k en la función $f\left(x\right)=\sqrt{bx+c}$ define otra función de regla de correspondencia $g\left(x\right)=\sqrt{bx+c}+k$. La semi parábola asociada a $g\left(x\right)=\sqrt{bx+c}+k$ puede construirse desplazando vertical k unidades la semiparábola asociada a la función $f\left(x\right)=\sqrt{bx+c}$.

PARA REFLEXIONAR

¿?

a. ¿Por qué $f\left(x\right)=\sqrt{bx+c}$ y $g\left(x\right)=\sqrt{bx+c}+k$ tiene el mismo dominio?

b. ¿Qué relación existe entre el conjunto imagen de $f\left(x\right)=\sqrt{bx+c}$ y de $g\left(x\right)=\sqrt{bx+c}+k$?

EJEMPLO 2.21 (Efecto del parámetro k)

a. La semiparábola asociada a la función $g(x)=-\sqrt{9x-18}+1$, se obtiene desplazando una unidad verticalmente hacia arriba la semiparábola asociada a $f(x)=-\sqrt{9x-18}$, vea el *ejemplo 2.17.a. y la figura 2.39.*
También $dom(f)=[2\ ,+\infty)$ e $img(f)=(-\infty\ ,1\ ]$.

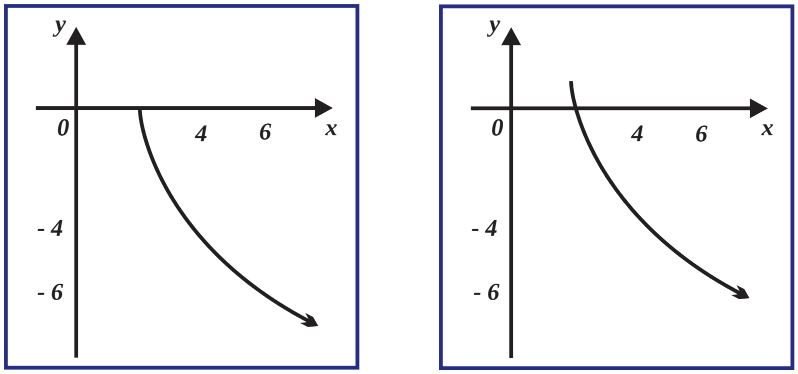


FIGURA 2.39

b. La semiparábola asociada a la función $g(x)=-\sqrt{-2x+4}-1$, se obtiene desplazando una unidad verticalmente hacia abajo la semiparábola asociada a $f(x)=-\sqrt{-2x+4}$, vea el *ejemplo 2.17.b. y la figura 2.40.*
También $dom(f)=(-\infty\ ,\ 2\ ]$ e $img(f)=(-\infty\ ,-1\ ]$.

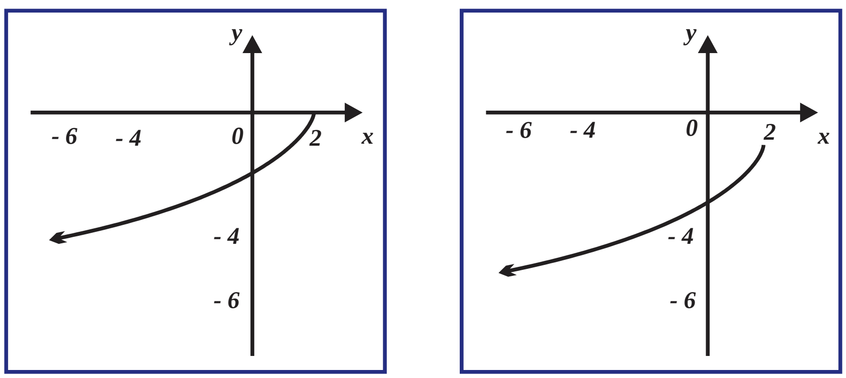


FIGURA 2.40

c. La semiparábola asociada a la función $g(x)=\sqrt{-3x-1}+2$, se obtiene desplazando dos unidades verticalmente hacia arriba la semiparábola asociada a $f(x)=\sqrt{-3x-1}$, vea el *ejemplo 2.17.c. y la figura 2.41.*

También $dom(f)=\left(-\infty\ ,-\frac{1}{3}\right]$ e $img(f)=[\ 2\ ,+\infty)$.

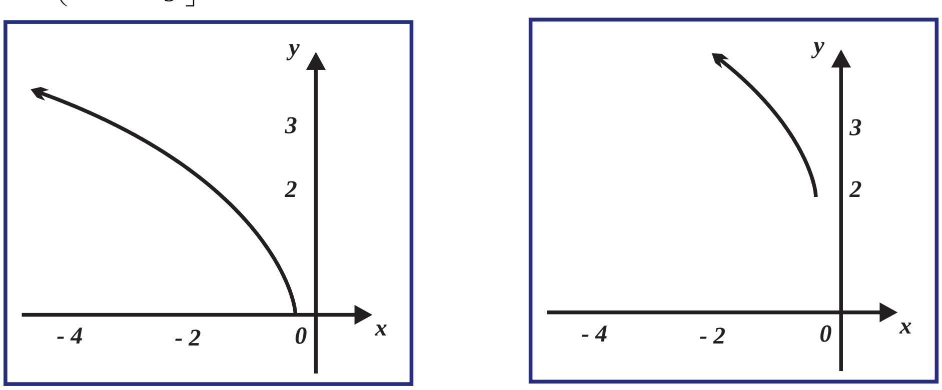


FIGURA 2.41

USO DE SOFTWARE DE MATEMÁTICAS

Trace las curvas asociadas a las funciones antes dadas y del *ejemplo 2.21* y verifique que coinciden con lo antes descrito.

□

FUNCIONES CON RADICANDO CUADRÁTICO

La función con regla de correspondencia $f(x)=\sqrt{Ax^2+Bx+C}$ (sujeta a la condición $A\neq 0$) tiene como radicando una expresión cuadrática (de grado dos) en la variable x, sus ceros son las raíces (en caso de existir) de la ecuación cuadrática $Ax^2+Bx+C=0$. Dependiendo del número de ceros de $f(x)=\sqrt{Ax^2+Bx+C}$ (sujeta a la condición $A\neq 0$) analizaremos su comportamiento.

RECUERDE

¿Cómo se interpretan los ceros de una función?

PARA REFLEXIONAR

¿Por qué $f(x)=\sqrt{Ax^2+Bx+C}$ sólo tiene sentido cuando $Ax^2+Bx+C\geq 0$?

Para obtener las características (dominio, conjunto imagen y curva) de la función $f(x)=\sqrt{Ax^2+Bx+C}$ consideraremos varios casos.

CASO I (EL RADICANDO NO TIENE CEROS)

Supongamos que $f(x)=\sqrt{Ax^2+Bx+C}$ no tiene ceros, entonces $Ax^2+Bx+C\neq 0$ y existen dos posibilidades:

SUBCASO I.a. (**RADICANDO POSITIVO**)

Si $Ax^2+Bx+C>0$ (léase "Ax^2+Bx+C es mayor que cero"), entonces $dom(f)=(-\infty, +\infty)$.

i. f es no negativa (su curva se encuentra en los cuadrantes I y II del plano cartesiano).

ii. Para asignaciones extremadamente a x (ya sea positivas o negativas), las imágenes bajo $f(x)=\sqrt{Ax^2+Bx+C}$ son extremadamente grandes y positivas.

iii. Por otra parte, $f(x)=\sqrt{Ax^2+Bx+C}$ puede escribirse en la forma $\frac{\left(x+\frac{B}{2A}\right)^2}{r^2}-\frac{y^2}{s^2}=1$ donde $r^2=\frac{B^2-4AC}{4A^2}$ y $s^2=\frac{r^2}{A}$.

iv. La *figura 2.42* muestra la forma de la curva asociada a f, esta curva es una rama de una hipérbola con eje focal vertical.

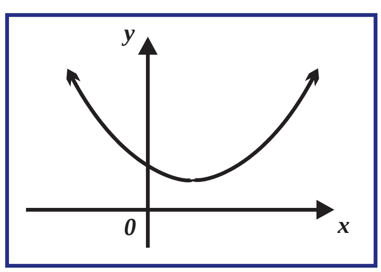


FIGURA 2.42

SUBCASO I.b. (**RADICANDO NEGATIVO**)

Si $Ax^2+Bx+C<0$ (léase "Ax^2+Bx+C es menor que cero"), entonces $dom(f)=\varnothing$ y $f(x)=\sqrt{Ax^2+Bx+C}$ no es una función.

CASO II (EL RADICANDO TIENE UN CERO DE MULTIPLICIDAD 2)

Supongamos que $f(x)=\sqrt{Ax^2+Bx+C}$ tiene un solo cero (llamémosle x_1), entonces Ax^2+Bx+C puede factorizarse como $A(x-x_1)^2$. Se tienen dos posibilidades (generadas por el signo del número A):

SUBCASO II.a.

Si $A>0$, entonces $f(x)=\sqrt{Ax^2+Bx+C}=\sqrt{A(x-x_1)^2}=\sqrt{A}\sqrt{(x-x_1)^2}$ por lo que $dom(f)=(-\infty, +\infty)$ y la curva asociada a $f(x)=\sqrt{Ax^2+Bx+C}=\sqrt{A}\sqrt{(x-x_1)^2}$ se muestra en la *figura 2.43*., Note que las dos semirrectas tienen un extremo común y este extremo es el único cero de la función.

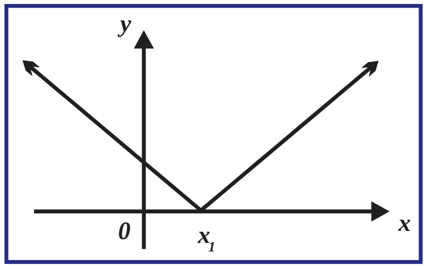


FIGURA 2.43

SUBCASO II.b. Si $A<0$, entonces $f(x)=\sqrt{Ax^2+Bx+C}=\sqrt{A(x-x_1)^2}$, pero el radicando es negativo y en consecuencia $f(x)=\sqrt{Ax^2+Bx+C}$ sólo está definida cuando $x=x_1$, así el dominio de esta función consta de un sólo número (que es un cero de la función) y el conjunto imagen es el número cero, por tanto la curva correspondiente consta de un sólo punto.

CASO III (EL RADICANDO TIENE DOS CEROS)

Supongamos que $f(x)=\sqrt{Ax^2+Bx+C}$ tiene dos ceros distintos y que éstos son x_1 y x_2 (también supongamos que $x_1<x_2$), entonces puede rescribirse como $f(x)=\sqrt{A(x-x_1)(x-x_2)}$. Los dos ceros x_1 y x_2 generan tres intervalos en la recta real, estos intervalos son $(-\infty, x_1]$, $[x_1, x_2]$ y $[x_2, +\infty)$, vea la *figura 2.44*.

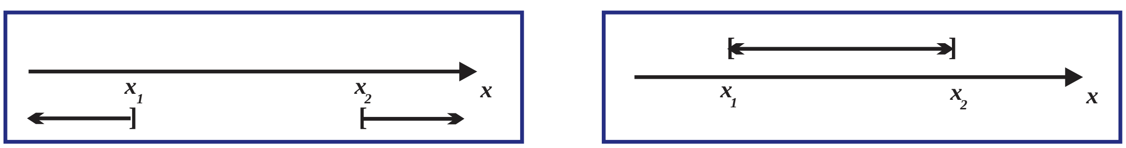


FIGURA 2.44

De cada uno de los intervalos anteriores seleccionamos un punto de prueba x_p y luego analizamos el signo de $A(x-x_1)(x-x_2)$, tenemos las siguientes posibilidades:

INTERVALOS	x_p	SÍ EL SIGNO DE $A(x-x_1)(x-x_2)$ ES	f ESTÁ
$(-\infty, x_1]$	x_{p1}	positivo	definida
$[x_1, x_2]$	x_{p2}	negativo	No definida
$[x_2, +\infty)$	x_{p3}	positivo	definida

a. $dom(f)=(-\infty, x_1]\cup[x_2, +\infty)$

INTERVALOS	x_p	SÍ EL SIGNO DE $A(x-x_1)(x-x_2)$ ES	f ESTÁ
$(-\infty, x_1]$	x_{p1}	negativo	No definida
$[x_1, x_2]$	x_{p2}	positivo	definida
$[x_2, +\infty)$	x_{p3}	negativo	No definida

b. $dom(f)=[x_1, x_2]$

Por tanto, existen dos posibles dominios para $f(x)=\sqrt{Ax^2+Bx+C}=\sqrt{A(x-x_1)(x-x_2)}$, éstas son

$$dom(f)=(-\infty\,,\,x_1\,]\cup[\,x_2\,,\,+\infty) \text{ ó } dom(f)=[\,x_1\,,\,x_2\,].$$

SUBCASO III.a

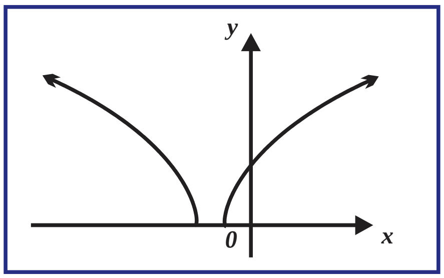
Dominio de $f(x)=\sqrt{Ax^2+Bx+C}$, el conjunto $dom(f)=(-\infty\,,\,x_1\,]\cup[\,x_2\,,\,+\infty)$.

i. f es no negativa.

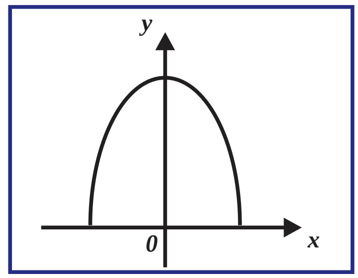
ii. Para asignaciones extremadamente grandes a x (ya sea positivas o negativas), las imágenes bajo $f(x)=\sqrt{Ax^2+Bx+C}$ son extremadamente grandes y positivas.

iii. Por otra parte, $f(x)=\sqrt{Ax^2+Bx+C}$ puede escribirse en la forma $\frac{\left(x+\frac{B}{2A}\right)^2}{r^2}-\frac{y^2}{s^2}=1$ donde $r^2=\frac{B^2-4AC}{4A^2}$ y $s^2=\frac{r^2}{A}$, luego los puntos $(x_1\,,0)$, $(x_2\,,0)$ son los vértices de una semihipérbola con eje focal horizontal.

iv. La *figura 2.45.a*. muestra la forma de la curva asociada a f.



a.



b.

FIGURA 2.45

SUBCASO III.b.

Dominio de $f(x)=\sqrt{Ax^2+Bx+C}$, el conjunto $dom(f)=[\,x_1\,,\,x_2\,]$

i. f es no negativa (su curva se encuentra en los cuadrantes I y II del plano cartesiano).

ii. f sólo está definida sobre $[\,x_1\,,\,x_2\,]$ por lo que no tiene comportamiento extremo.

iv. $f(x)=\sqrt{Ax^2+Bx+C}$ puede escribirse en la forma $\frac{\left(x+\frac{B}{2A}\right)^2}{r^2}-\frac{y^2}{s^2}=1$ donde $r^2=\frac{B^2-4AC}{4A^2}$ y $s^2=\frac{r^2}{A}$ (tenga en cuenta que $A<0$), luego los puntos $(x_1\,,0)$, $(x_2\,,0)$ son los vértices de una semi elipse con eje focal horizontal (también puede ser la parte no negativa de una circunferencia).

v. La *figura 2.44.b*. muestra la forma de la curva asociada a f.

EJEMPLO 2.22 (Análisis y gráfica de funciones con radicando cuadrático)

a. Sea $f(x)=\sqrt{x^2-10x+24}$.

i. $f(x)=\sqrt{x^2-10x+24}=\sqrt{(x-4)(x-6)}$,

INTERVALOS	x_p	**SIGNO DE** $x_p^2-10x_p+24$	f
$(-\infty\,,\,4\,]$	0	24 , positivo	positiva
$[4\,,6]$	5	-1 , negativo	no definida
$[6\,,\,+\infty)$	8	8 , positivo	positiva

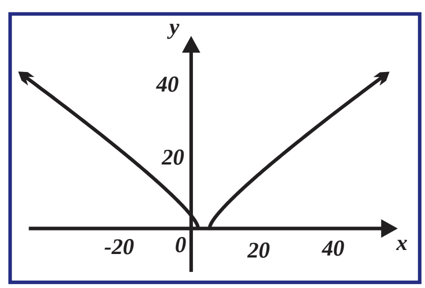


FIGURA 2.46

$dom(f)=(-\infty,4\,]\cup[\,6,+\infty)$.

ii. La curva asociada a f interseca al eje de las abscisas en los puntos $I_{x1}(4\,,\,0)$ y $I_{x2}(6\,,\,0)$, al eje de las ordenadas en el punto $I_y\left(0\,,\,\sqrt{24}\right)$.

iii. La curva asociada a f crece indefinidamente cuando a x le son asignados valores extremadamente grandes, ya sean positivos o negativos, por tanto $img(f)=[0,+\infty)$. Vea la *figura 2.46*.

b. $f(x)=\sqrt{-x^2-4x+12}$.

i. $f(x)=\sqrt{-x^2-4x+12}=\sqrt{-(x+6)(x-2)}$,

INTERVALOS	x_p	SIGNO DE $-x_p^2-4x_p+12 = -x^2-4x+12$	f
$(-\infty\,,\,-6\,]$	–8	–20 , negativo	no definida
$[-6\,,2\,]$	0	12 , positivo	positiva
$[\,2\,,\,+\infty\,)$	4	–20 , negativo	no definida

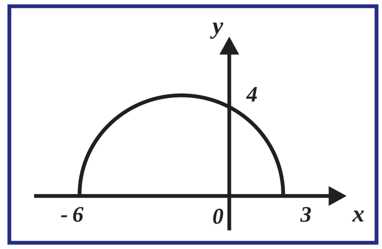


FIGURA 2.47

$dom(f)=[-6,2]$.

ii. La curva asociada a f interseca al eje de las abscisas en los puntos $I_{x1}(-6\,,\,0)$ y $I_{x2}(2\,,\,0)$, al eje de las ordenadas en el punto $I_y(0\,,\,\sqrt{12}\,)$.

iii. La curva asociada a f es una semielipse (positiva) con vértices en $I_{x1}(-6\,,\,0)$ y $I_{x2}(2\,,\,0)$. Vea la *figura 2.47*.

c. $f(x)=\sqrt{x^2-2x+13}$.

i. $f(x)=\sqrt{x^2-2x+13}$ no tiene ceros ($B^2-4AC=(-2)^2-4(1)(13)=-48$). Determinamos el signo del radicando completando el trinomio cuadrado perfecto en la variable x, así $f(x)=\sqrt{x^2-2x+13}=\sqrt{(x-1)^2+12}$, por tanto $x^2-2x+13=(x-1)^2+12$ es siempre positivo (¿por qué?) y $dom(f)=IR$.

ii. La curva asociada a f no interseca al eje de las abscisas, pero interseca al eje de las ordenadas en el punto $I_y(0\,,\,\sqrt{13}\,)$.

iii. La curva asociada a f crece indefinidamente cuando a x le son asignados valores extremadamente grandes, ya sean positivos o negativos, por tanto $img(f)=[\,\sqrt{12}\,,+\infty\,)$. Vea la *figura 2.48*.

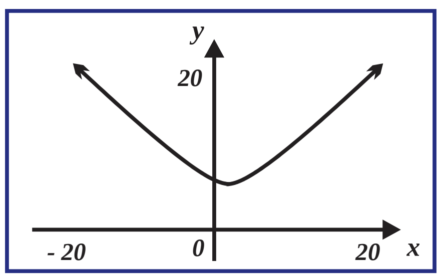


FIGURA 2.48

d. $f(x)=\sqrt{-x^2+8x-26}$.

i. $f(x)=\sqrt{-x^2+8x-26}$ no tiene ceros puesto que $B^2-4AC=(8)^2-4(-1)(-26)=-40$.

ii. Determinamos el signo del radicando completando el trinomio cuadrado perfecto en la variable x, así $f(x)=\sqrt{-x^2+8x-26}=\sqrt{-(x-4)^2-10}$, por tanto su radicando es negativo (¿por qué?). $f(x)=\sqrt{-x^2+8x-26}$ no es una función.

e. $f(x)=\sqrt{9x^2-36x+36}$.

i. Puesto que $f(x)=\sqrt{9x^2-36x+36}=3\sqrt{x^2-4x+4}=3\sqrt{(x-2)^2}$ tiene como único cero a $x=2$ y $dom(f)=IR$.

ii. La curva asociada a f interseca al eje de las abscisas en $I_x(2\,,\,0)$, interseca al eje de las ordenadas en $I_y(0\,,\,6)$.

iii. La curva asociada a f crece indefinidamente cuando a x le son asignados valores extremadamente grandes, ya sean positivos o negativos, por tanto $img(f)=[0,+\infty)$. Vea la *figura 2.49*.

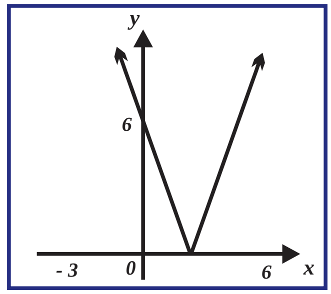


FIGURA 2.49

USO DE SOFTWARE DE MATEMÁTICAS

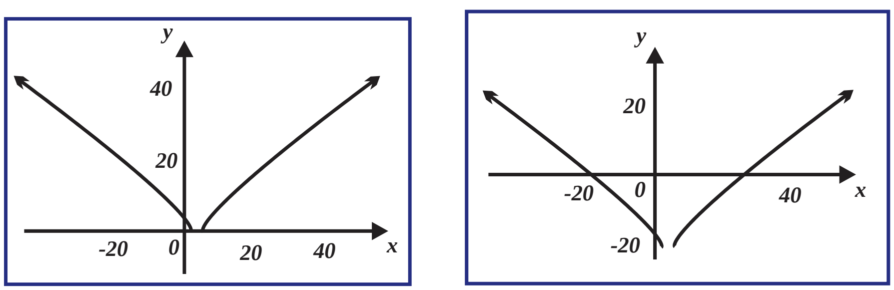
Trace las curvas asociadas a las funciones antes dadas y vea que coinciden con las obtenidas en el *ejemplo 2.23*.

□

Finalmente, el efecto del término D en la curva asociada a $f(x)=\sqrt{Ax^2+Bx+C}+D$ respecto a la curva asociada a $f(x)=\sqrt{Ax^2+Bx+C}$ consiste en un desplazamiento vertical de ésta última curva.

EJEMPLO 2.23 (Análisis y gráfica de funciones con radicando cuadrático)

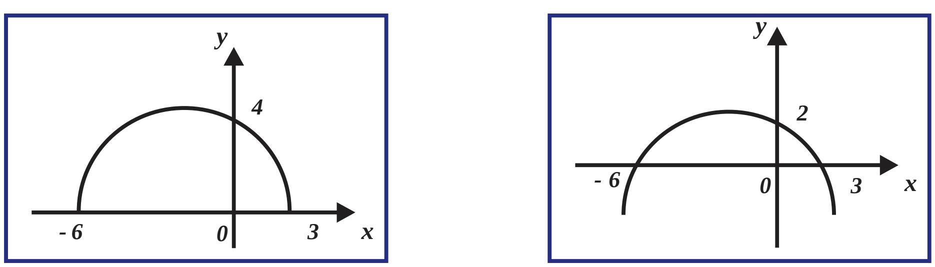
a. Si la curva asociada a $f(x)=\sqrt{x^2-10x+24}$ es como se muestra en la *figura 2.50.a.* (vea el *ejemplo 2.19.a.*), entonces la curva asociada a $f(x)=\sqrt{x^2-10x+24}-20$ es como se muestra en la *figura 2.50.b.*



a. **b.**

FIGURA 2.50

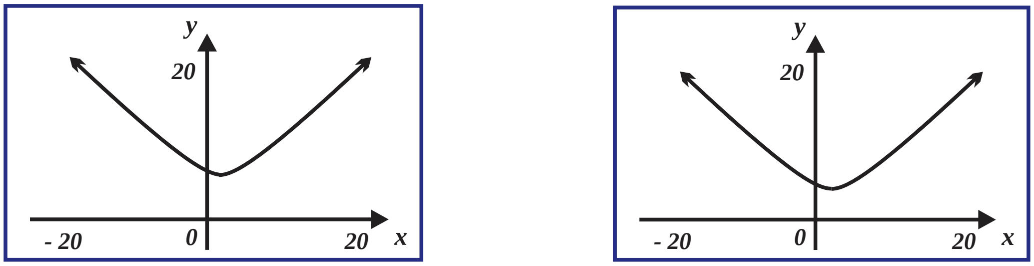
b. Si la curva asociada a $f(x)=\sqrt{-x^2-4x+12}$ es la mostrada en la *figura 2.51.a.* (vea el *ejemplo 2.19.b.*), entonces la curva asociada a $f(x)=\sqrt{-x^2-4x+12}-2$ es como se muestra en la *figura 2.51.b.*



a. **b.**

FIGURA 2.51

c. Si la curva asociada a $f(x)=\sqrt{x^2-2x+13}$ es como se muestra en la *figura 2.52.a.* (vea el *ejemplo 2.19.c.*), por tanto, la curva asociada a $f(x)=\sqrt{-x^2-4x+12}-5$ es como se muestra en la *figura 2.52.b.*

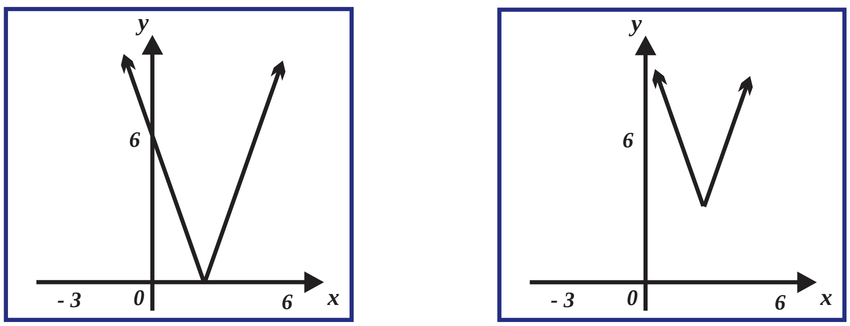


a. b.

FIGURA 2.52

d. $f(x)=\sqrt{9x^2-36x+36}$.

Si la curva asociada a $f(x)=\sqrt{9x^2-36x+36}$ es como se muestra en la *figura 2.53.a.* (vea el *ejemplo 2.19.e.*), entonces la curva asociada a $f(x)=\sqrt{9x^2-36x+36}+3$ es como se muestra en la *figura 2.53.b.*



a. b.

FIGURA 2.53

USO DE SOFTWARE DE MATEMÁTICAS

Trace las curvas asociadas a las funciones antes dadas y vea que coinciden con las obtenidas en el *ejemplo 2.24*.

□

EJEMPLO 2.25 (Altura del punto de apoyo de una escalera)

Una escalera de 8 metros de longitud está apoyada sobre una pared. El pie de la escalera dista x metros de la pared.

a. Para determinar la función que describe la altura a la que se puede apoyar la escalera en la pared en función de la distancia de la base de la escalera a la base de la pared, nos apoyaremos en la *figura 2.54.* La altura del punto de apoyo h, la longitud de la escalera y la distancia del pie de la escalera al pie de la pared x se relacionan por medio $h^2(x)+x^2=8^2$ (de acuerdo al teorema de Pitágoras, por tanto $h(x)=\sqrt{8^2-x^2}$, siempre que $0\leq x\leq 8$.

b. Cuando la distancia entre el pie de la base de la escalera y el pie de la pared es 2 metros, la altura a la que se encuentra el punto superior de la escalera es $h(2)=\sqrt{8^2-2^2}=\sqrt{60}$ metros.

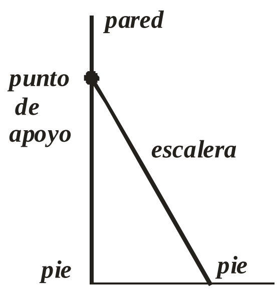


FIGURA 2.54

□

EJEMPLO 2.25 (Diagonal de una alberca)

Una alberca tiene base rectangular en la que el lado mayor mide 6 unidades más que el lado menor y su profundidad es 3 unidades.

a. La *figura 2.55.a.* corresponde a un bosquejo de la situación. Las longitudes de los lados de la base (x y $x+6$) y la longitud (d) de la diagonal se relacionan por medio del teorema de Pitágoras. Por tanto, $d^2=(x+6)^2+x^2$ ó $d(x)=\sqrt{2x^2+12x+36}$, siempre que $x>0$.

b. La *figura 2.55.b.* corresponde a un bosquejo de la situación, por tanto, la longitud de la diagonal es $l(x)=\sqrt{2x^2+12x+45}$, siempre que $x>0$.

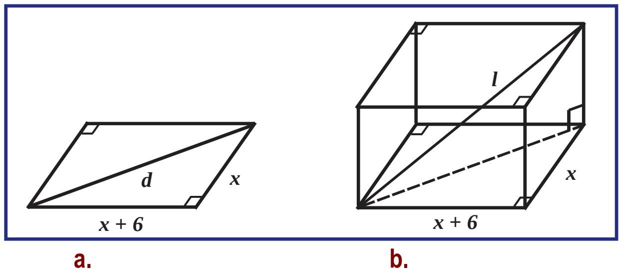


FIGURA 2.55

□

EJEMPLO 2.26 (Tamaño de una pantalla de televisión)
El "tamaño" de las pantallas de televisión rectangulares se define como la longitud de su diagonal, con unidades como pulgadas (una pulgada equivale a 2.54 centímetros). Suponga que una pantalla de televisor mide $x+5$ pulgadas de base y x pulgadas de altura, vea la *figura 2.56*.

a. Para determinar la función que describe el tamaño de la pantalla relacionamos las longitudes de los lados (x y $x+5$) y la longitud (d) de la diagonal aplicando el teorema de Pitágoras, por tanto, $T^2=(x+5)^2+x^2$ ó $T(x)=\sqrt{2x^2+10x+25}$.

b. Para determinar el tamaño de una pantalla de 20 pulgadas de base, calculamos

$$T(20)=\sqrt{2(20)^2+10(20)+25}\approx 32 \text{ pulgadas.}$$

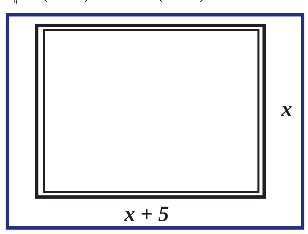


FIGURA 2.56

□

EJEMPLO 2.27 (Radio de un tanque cilíndrico)
Un tanque tiene forma cilíndrica, la altura del tanque es el doble que la longitud del radio.

a. Puesto que un cilindro está compuesto por dos bases circulares (superior e inferior) y por una superficie rectangular, por tanto su área es: $A=\textit{área de las dos tapas}+\textit{área de la superficie rectangular}$

$A=2\pi r^2+2\pi r(2r)$, por tanto $A=6\pi r^2$, el radio en función del área es $r(A)=\sqrt{\dfrac{A}{6\pi}}$, siempre que $A>0$.

b. Si el área del cilindro es $A=216\pi$, entonces $r(216\pi)=\sqrt{\dfrac{216\pi}{6\pi}}=6$ unidades.

□

EJEMPLO 2.28 (Distancia entre dos puntos)

a. La distancia entre los puntos $A(4,x)$ y $B(1,3)$ es $d(x)=\sqrt{(4-1)^2+(x-3)^2}$, por tanto $d(x)=\sqrt{x^2-6x+18}$.

b. Para determinar la función que describe la distancia entre los puntos de la recta de ecuación $y=2x+1$ y el punto $P(4,1)$, debemos tener en cuenta que los puntos de la recta son de la forma $R(x,2x+1)$, por tanto

$$d(x)=\sqrt{(x-4)^2+(2x+1-1)^2} \text{ ó } d(x)=\sqrt{5x^2-8x+16}.$$

□

EJEMPLO 2.29 (Distancia entre dos puntos)
Un salón tiene forma de prisma cuadrangular recto, su base es cuadrada y su altura mide 2 metros menos de lo que miden los lados de las bases, Para establecer la función que describe la longitud de los lados de la base en función de su área notemos que el salón está compuesto por dos bases (superior e inferior) y cuatro lados, por tanto su área es:

$$A = \text{área de las dos bases} + \text{área de los cuatro lados}$$

Si x representa la longitud de los lados de las bases (superior e inferior), entonces $A = 2x^2 + 4x(x-2)$ ó $6x^2 - 8x - A = 0$

por tanto $x(A) = \frac{8 \pm \sqrt{64+24A}}{12} = \frac{3}{4} + \sqrt{\frac{4}{9} + \frac{1}{6}A} = \frac{3}{4} \pm \sqrt{\frac{4}{9} + \frac{1}{6}A}$, "la solución" de la raíz con signo negativo no tiene significado (¿por qué?) $x(A) = \frac{3}{4} + \sqrt{\frac{4}{9} + \frac{1}{6}A}$.

□

¿Qué conceptos aprendí?

PARA COMPLETAR

1. Una función con radical de índice dos y radicando lineal tiene una curva asociada llamada________________________________.
2. Una función con radical de índice dos y radicando lineal tiene ____________ceros.
3. Una función con radical de índice dos y radicando cuadrático puede tener hasta ____________ceros.
4. Una función con radical de índice dos y radicando cuadrático con dos ceros distintos tiene como curva asociada ______________________ o ____.
5. Una función con radical de índice dos y radicando cuadrático con un cero tiene como curva asociada ______________________________.
6. En qué casos expresión con radical de índice dos y radicando cuadrático no es una función ________________________________.
7. ¿En qué casos una función con radical de índice dos y radicando cuadrático y sin ceros tiene asociada como curva una rama de una hipérbola? ________________________________.

CIERTO O FALSO

1. Una función con radical de índice dos y radicando cuadrático no tiene ceros.
2. Una función con radical de índice dos y radicando cuadrático puede tener asíntotas verticales.
3. Una función con radical de índice dos y radicando cuadrático puede tener asíntotas oblicuas.
4. Una función con radical de índice dos y radicando cuadrático necesariamente interseca al eje de las ordenadas.
5. Una función con radical de índice dos y radicando cuadrático no tiene ceros.
6. Una función con radical de índice dos y radicando cuadrático que incluye una translación vertical no tiene ceros.
7. Una función con radical de índice dos y radicando cuadrático que incluye una translación vertical puede no intersecar al eje de las ordenadas.
8. Una función con radical de índice dos y radicando cuadrático que incluye una translación vertical puede tener dos ceros.

PROBLEMAS PROPUESTOS 2.2

1. En cada caso construya la función correspondiente.
a. El radio de un cono circular recto de altura de longitud $h = 10$ en función de la longitud r del radio de la base.
b. La longitud del lado de una pirámide de base cuadrada y la altura de longitud $h = 5$ en función del volumen.

2. a. En un círculo de radio de longitud $r = 5$ debe inscribirse un rectángulo. Construya una función para calcular el área que encierra el rectángulo en términos de la longitud de su base.
b. En una esfera de radio de longitud $r = 10$ se inscribe un cilindro circular recto, construya un modelo para obtener el volumen del cilindro en función del radio de la base.

3. Construya una función que dependa de la longitud de la altura para determinar la cantidad de lata (área total) que se utiliza para elaborar un envase cilíndrico que contenga un volumen de medio litro (500 centímetros cúbicos).

4. Se pretende tender un cable desde una central eléctrica, que se encuentra al lado de un río, hasta una fábrica que se encuentra al otro lado del río y 100 metros agua abajo (el ancho del río es uniforme y tiene 200 metros de ancho). El costo de tender el cable bajo el agua es $\$90.00$ por metro, mientras que el costo de tenderlo sobre la tierra es $\$60.00$ por metro. ¿Cuál es la expresión que describe el costo en términos de la trayectoria x sobre la que se debe tenderse el cable?

5. Determine el dominio, el conjunto imagen (rango o recorrido) y trace la curva.

a. $r(x)=\sqrt{x+7}$.

b. $r(x)=\sqrt{6x-18}$.

c. $r(x)=\sqrt{3x+6}$.

d. $r(x)=\sqrt{2x-4}-3$.

e. $r(x)=-\frac{1}{2}\sqrt{x+3}-6$.

f. $r(x)=\sqrt{2-x}-6$.

g. $r(x)=\sqrt{-x}+10$.

h. $r(x)=-2\sqrt{x-1}-6$.

i. $r(x)=-\sqrt{5x-40}+4$.

j. $r(x)=2\sqrt{2x+4}+8$.

k. $r(x)=\sqrt{x-\frac{1}{2}}+2$.

l. $r(x)=-\frac{8}{3}\sqrt{x-4}+4$.

m. $r(x)=-\frac{1}{8}\sqrt{-5x+10}$.

n. $r(x)=-\frac{1}{4}\sqrt{-2x-1}-12$.

6. Determine el dominio, el rango (o recorrido) y trace la curva.

a. $f(x)=\sqrt{x^2-10x+21}$.

b. $f(x)=\sqrt{x^2-36}$.

c. $f(x)=\sqrt{x^2+6x+5}$.

d. $f(x)=\sqrt{x^2+2x-24}$.

e. $f(x)=\sqrt{x^2-x-12}-2$.

f. $f(x)=3\sqrt{x^2-2x-15}$.

g. $f(x)=\frac{1}{3}\sqrt{x^2-2x-48}$.

h. $f(x)=\sqrt{2x^2-4x+8}$.

i. $f(x)=\sqrt{-x^2+9}$.

j. $f(x)=\sqrt{2x^2-6x+4}$.

k. $f(x)=\sqrt{-x^2+2x}$.

l. $f(x)=\sqrt{-x^2-8x-12}$.

m. $f(x)=-4\sqrt{x^2-2x-3}$.

n. $f(x)=\sqrt{x^2-2x-8}$.

o. $f(x)=\sqrt{49-x^2}$.

p. $f(x)=\sqrt{36-25x^2}$.

q. $f(x)=\sqrt{-x^2-6x-8}$.

r. $f(x)=\sqrt{-x^2+10x-21}$.

s. $f(x)=\sqrt{6-8x^2}+1$.

t. $f(x)=\sqrt{x^2-4x+30}$.

7. Determine el dominio, el rango (o recorrido) y trace la curva.

a. $f(x)=\sqrt{x^2+6}$.

b. $f(x)=\sqrt{2x^2+1}$.

c. $f(x)=\sqrt{x^2+3x+18}$.

d. $f(x)=\sqrt{x^2+2x+10}$.

e. $f(x)=-2\sqrt{2x^2+x+8}$.

f. $f(x)=\sqrt{x^2-4x+4}+1$.

8. Discuta el comportamiento de las relaciones, justifique su respuesta.

a. $f(x)=\sqrt{-x^2-6}$.

b. $f(x)=\sqrt{-2x^2-1}$.

c. $f(x)=\sqrt{-x^2+4x-9}$.

d. $f(x)=\sqrt{-x^2+2x-4}$.

e. $f(x)=2-\sqrt{-x^2+3x-4}$.

f. $f(x)=\sqrt{x^2-6x+9}$.

g. $f(x)=-2\sqrt{x^2+4x+4}$.

h. $f(x)=\sqrt{-x^2-10x-25}+1$.

9. Construya una función cuyo radical sea de índice dos, su radicando de la forma $Ax+By+C$ y cumpla con las condiciones (también trace la curva correspondiente):

a. Tenga como cero a $x=2$, cumpla $f(1)=1$.

b. Su dominio sea el intervalo $(-\infty\ ,\ 4\ ]$ y cruce al eje vertical en $I_y(0\ ,3)$.

c. Su dominio sea el intervalo $(-\infty\ ,-\frac{5}{4}\ ]$ y contenga al punto $A(-1\ ,9)$.

d. Contiene a los puntos $A(4\ ,-1)$ y $B(7\ ,-2)$

e. $(-\infty\ ,\ 2\ ]$ y cruce al eje vertical en $I_y\left(0\ ,-\sqrt{3}\right)$.

10. Construya una función tal que su radical sea de índice dos, su radicando sea un polinomio de segundo grado en la variable x y cumpla con las condiciones:

a. Tenga ceros en $x_1=2$ y $x_2=-2$, su dominio sea el intervalo $[-2\ ,\ 2\ ]$ y $f(0)=2$.

b. Tenga ceros en $x_1=-4$ y $x_2=4$, su dominio sea el intervalo $[-4\ ,\ 4\ ]$ y contenga al punto $A(0\ ,4)$.

c. Tenga ceros en $x_1=-2$ y $x_2=6$ (de multiplicidad uno), su dominio sea el intervalo $[-2\ ,\ 6\ ]$ y $f(2)=9$.

d. Su dominio sea el intervalo $(-\infty\ ,-1\ ]\cup[\ 1\ ,+\infty)$ y sea positiva.

e. Su dominio sea el intervalo $(-\infty\ ,\ 0\ ]\cup[\ 4\ ,+\infty)$ y $f(0)=2$.

f. Su dominio sea el intervalo $(-\infty\ ,-4\ ]\cup[\ -2\ ,+\infty)$ y contenga al punto $I_y(0\ ,\ 4)$.

g. Tenga como dominio el intervalo $(-\infty\ ,+\infty)$ y $f(0)=4$.

11. Construya una función tal que su radical sea de índice dos, su radicando sea un polinomio de segundo grado en la variable x y cumpla con las condiciones:

a. No tenga ceros, su dominio sea el intervalo $dom(f)=(-\infty\ ,+\infty)$ y $img(f)=[1\ ,+\infty)$.

b. No tenga ceros, $dom(f)=IR$ y $img(f)=[2\ ,+\infty)$.

c. No tenga ceros, $dom(f)=IR$ y $img(r)=(-\infty\ ,\ 4]$.

d. Tenga $dom(f)=IR$ y $img(f)=[5\ ,+\infty)$.

e. Tenga $dom(f)=IR$ y $img(r)=(-\infty\ ,1]$.

12. Una viga de 10 metros de longitud se apoya sobre un muro. El pie de la viga se encuentra a x metros del muro. Determine la función que describe la altura del punto de apoyo en función de la distancia de separación del pie de la viga y la base del muro.

13. Una escalera de 8 metros de longitud está apoyada sobre

un muro. El punto de apoyo de la escalera sobre el piso dista x metros del pie del muro.
a. Determine la función que describe la distancia de separación entre el pie del muro y el pie de la escalera en términos de la distancia del punto de apoyo de la escalera en el muro.
b. ¿A qué distancia se encuentran el pie de la escalera del pie del muro cuando el punto de apoyo de la escalera se encuentra a una distancia de 4 metros de la base del muro?
c. Suponga que la pared tiene 12 metros de altura, ¿A qué distancia del borde (superior) de la pared se encuentra el punto de apoyo de la escalera (en la pared) cuando la distancia del pie de la base de la escalera y el pie del muro es 5 metros?

14. Una ataúd tiene base rectangular, el lado mayor mide 2 metros más que el lado menor, y su altura mide 0.40 metros.
a. Determine la función que describe la longitud de la diagonal de la base del ataúd.
b. Determine la función que describe la longitud de la diagonal del ataúd.

15. Un tanque tiene forma cilíndrica, la altura del tanque es el doble que la longitud de su radio. El precio del material de sus bases es 200 pesos por unidad de área y el precio de la parte cilíndrica es 140 pesos por unidad de área.
a. ¿Cuál es la función que describe el radio del tanque cilindro en función de su costo?
b. ¿Cuál es el radio del tanque si éste tiene un costo de 5000 pesos?

16.
a. Determine la función que describe la distancia entre los puntos del plano cartesiano $A(-1\ ,\ 4)$ y $B(2\ ,\ y)$.
b. Determine la función que describe la distancia entre los puntos del plano cartesiano $A(1\ ,1)$ y $B(x\ ,\ 0)$.

17. Una ventana tiene forma de rectángulo coronado por una semicircunferencia. La longitud de la altura de la parte rectangular es el triple de la longitud de la base.
a. Determine la función que describe la longitud del radio de la corona en términos del área de la ventana.
b. ¿Cuál es la longitud del radio de la corona, si la ventana tiene un área de 12π unidades cuadradas?

18. Una ventana tiene forma de rectángulo coronado por una semicircunferencia. Las dimensiones de la parte rectangular están en proporción de 5 a 1.
a. Determine la función que describe la longitud del radio de la corona en términos del área de la ventana.
b. ¿Cuál es la longitud del radio de la corona de la ventana si ésta tiene un área de 20π unidades cuadradas?

19. Una ventana tiene forma de rectángulo coronado por una semicircunferencia. Las dimensiones de la parte rectangular están en proporción de 7 a 1. El precio, por unidad de longitud de la parte circular es el triple que el de la parte rectangular.
a. Determine la función que describe el radio en términos del área de la ventana.
b. ¿Cuál es el radio de la ventana si ésta tiene un área de 30π unidades cuadradas?

20. Un depósito tiene forma de cilindro coronado por una semiesfera, la longitud de la altura de la parte cilíndrica del depósito es el triple de la longitud de la longitud de la base.
a. ¿Cuál es la función que describe la longitud del radio del depósito en función de su área?
b. ¿Cuál es la longitud del radio del tanque si éste tiene un área de 50π unidades cuadradas?

21. Un depósito tiene forma de cilindro coronado por una semiesfera, la longitud de la altura de la parte cilíndrica del depósito es el triple de la longitud de la longitud de la base.
a. ¿Cuál es la función que describe la longitud del radio del depósito en función de su área?
b. ¿Cuál es la longitud del radio del depósito si éste tiene un área de 50π unidades cuadradas?

22. Un depósito tiene forma de cilindro coronado por una semiesfera, la altura de la parte cilíndrica del depósito está en razón de 4 a 3 con el radio del cilindro es. El precio, por unidad de área de la parte esférica es el doble que el de la parte cilíndrica.
a. ¿Cuál es la función que describe el radio del depósito en función de su precio?
b. ¿Cuál es el radio del tanque si éste tiene un precio de 500π pesos?

23.
a. En una región elíptica, el semieje mayor mide el doble que el semieje menor. Determine la función que describe la longitud del semieje mayor en función del área de la región elíptica.
b. En una región elíptica, la razón entre la longitud del semieje mayor y la longitud del semieje menor es 3 a 1. Determine la función que describe la longitud del semieje mayor en función del área de la región elíptica.

AUTO EVALUACIÓN

1. Mencione las características básicas de una función racional.

2. Efectúe una clasificación de las funciones racionales respecto a los grados de los polinomios de las componen. Respecto a la transformación algebraica de su regla de correspondencia.

3. Enliste los nombres de las curvas involucradas en las representaciones gráficas de las funciones con radicales de índice dos y radicandos polinomiales de grado dos.

4. Determine el dominio y trace la gráfica.

a. $r(x)=\sqrt{-2x+4}$.

b. $r(x)=\sqrt{x^2+5x+6}$.

c. $r(x)=\sqrt{x^2+6x+9}-1$.

d. $r(x)=\sqrt{x^2-2x+4}+1$.

e. $r(x)=-\frac{1}{6}\sqrt{-x^2-2x-1}-6$.

5. Proporcione la regla de correspondencia de una función con radical de índice dos y radicando cuadrático con las siguientes características:

a. Sin ceros, su curva sea la rama (positiva) de una hipérbola e interseca al eje de las ordenadas en el punto $(0,4)$.

b. Ceros en $(2,0)$ y $(6,0)$, su curva sea una semi hipérbola e interseca al eje de las ordenadas en el punto $(0,8)$.

c. Ceros en $(-1,0)$ y $(3,0)$, su curva sea una semi elipse y su altura máxima en el punto $(1,8)$.

3 FUNCIONES EXPONENCIALES Y LOGARÍTMICAS

PROPÓSITOS:

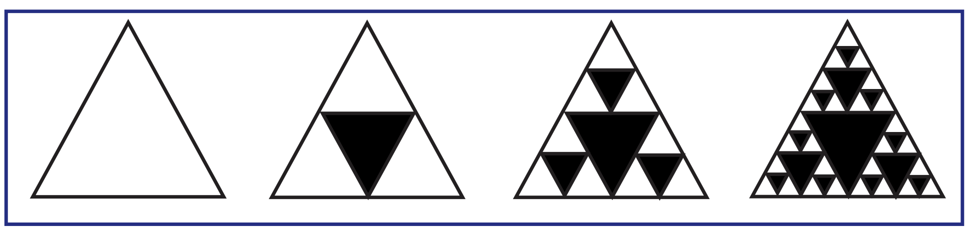
Al finalizar la unidad el alumno:

Utilizará las funciones exponencial y logarítmica para representar formas de variación de fenómenos de la naturaleza, que éstas permitan modelar.

Retomará los conceptos de dominio y rango, así como el análisis de las relaciones entre los parámetros de estas funciones y su gráfica.

CONTENIDO

3



3.1 FUNCIONES EXPONENCIALES

APRENDIZAJES

En el estudio de la presente sección usted:

1. Explorará situaciones o fenómenos que corresponden a crecimiento o decaimiento exponencial, las relaciones o condiciones existentes y analizará la forma de variación.

2. Identificará dominio y rango de una función exponencial y trazará su gráfica.

3. Identifica patrones de cambio involucrados en el crecimiento o decrecimiento de una función exponencial y bosquejará su gráfica.

4. Analizará la relación entre las gráficas de funciones exponenciales con diferentes bases incluyendo el número e .

5. Resolverá problemas en diferentes contextos, que se modelen con funciones exponenciales.

Las funciones exponenciales son de gran utilidad en la descripción de fenómenos en los que la rapidez con que cambia la variable dependiente (o función) es proporcional a la función, por ejemplo: en la acumulación de sustancias en una persona, el almacenamiento de carga en un capacitor, la desintegración de sustancias, en la variación de la temperatura de un objeto inmerso en un medio específico, también lo son en algunos casos discretos como: el crecimiento o decrecimiento de las poblaciones (de bacterias, roedores, plantas, etc.), o en el interés compuesto de una cantidad de dinero.

EJEMPLO 3.1 (Situaciones que involucran funciones exponenciales)

a. Suponga que una persona, en un tiempo específico, elimina en el trayecto del día a través de la orina el 20% de una droga que consumió. Si la cantidad de droga que consumió fue de 10 miligramos y si $D(t)$ representa la cantidad de droga presente en el cuerpo del individuo a los t días, inicialmente $D(0)=10$, al primer día (después de haber sido consumida) el cuerpo de la persona contiene $D(1)=(0.8)(10)=8$ miligramos de droga, al segundo día el cuerpo de la persona contiene $D(2)=(0.8)(0.8)(10)=(0.8)^2(10)$ miligramos de droga, al tercer día el cuerpo de la persona contiene $D(3)=(0.8)(0.8)^2(10)=(0.8)^3(10)$ miligramos de droga, etc. La *tabla 3.1* describe la cantidad de droga presente en el cuerpo del individuo.

DÍA	**CANTIDAD DE DROGA** (miligramos)
0	$D(0)=10$
1	$D(1)=(0.8)^1(10)=8$
2	$D(2)=(0.8)^2(10)=6.4$
3	$D(3)=(0.8)^3(10)=5.12$

TABLA 3.1

En general, después de t días, la cantidad de droga presente en el organismo se obtiene por la función $D(t)=10(0.8)^t$, con la condición de que $t \geq 0$.

b. La conexión en serie resistor y un condensador se denomina **circuito RC**. Un circuito RC es de gran utilidad en la regulación de la tensión eléctrica, con un circuito RC pueden limitarse las subidas y las bajas bruscas de la tensión (cambios de voltaje). También los circuitos RC pueden usarse para filtrar una señal, al bloquear ciertas frecuencias y dejar pasar otras.

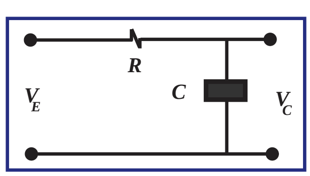


FIGURA 3.1

En un circuito RC, el condensador C (que previamente ha sido cargado) descargará su energía almacenada a través de la resistencia R, misma que se reflejará como una diferencia de potencial en ella. La "ecuación" que describe la diferencia de potencial V_c a través del condensador (que depende del tiempo) se obtiene aplicando las leyes de Kirchhoff y la ecuación resultante, tiene como solución la función $V_c(t)=v_0 e^{-\frac{t}{RC}}$, en la que evidentemente $t\geq 0$ (puesto que representa el tiempo).

c. Cuando la diferencia entre la temperatura de un cuerpo (que se encuentra a una temperatura inicial T_0) y la temperatura del medio en que se encuentra contenido (que tiene temperatura fija T_m mayor a T_0) no es demasiado grande, la rapidez con que el cuerpo se enfría (cambia su temperatura), es proporcional a la diferencia de la temperatura del cuerpo y a la temperatura del medio ambiente. La solución del modelo correspondiente conduce a la función $T(t)=T_m+(T_0-T_m)e^{-kt}$ con la condición $t\geq 0$.

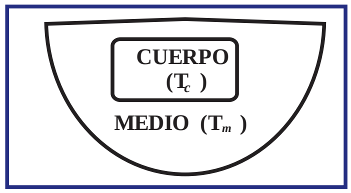


FIGURA 3.2

d. Si el interés generado por una cantidad de dinero invertida (principal) es reinvertido de manera que los intereses también se reinvierten, entonces se genera el interés compuesto. Así, el interés es convertido en principal y entonces para inversiones posteriores hay interés sobre interés. Si un capital inicial P es invertido a una tasa del r por ciento, compuesto anualmente, al término del primer año la cantidad compuesta es $S_1=P+rP$ o $S_1=P(1+r)$ pesos.

Al término del primer año se cuenta con la cantidad $S_1=P(1+r)$, misma que se reinvierten por otro año, al término del segundo año los intereses generados son $rP(1+r)$ y la cantidad compuesta es

$$S_2=P(1+r)+r[P(1+r)]=P(1+r)(1+r)=P(1+r)^2.$$

Al término del segundo año se tiene $S_2=P(1+r)^2$, mismos que se invierten un tercer año, por lo que a su término los intereses generados son de $rP(1+r)^2$ y la cantidad compuesta es

$$S_3=P(1+r)^2+r\left[P(1+r)^2\right]=P(1+r)^2(1+r)=P(1+r)^3.$$

Si el proceso continúa, el monto compuesto al término del año n es $S_n=P(1+r)^n$. En general, al término de los n periodos, la cantidad compuesta se modela por la función $S(n)=P(1+r)^n$ considerando que $n\geq 0$.

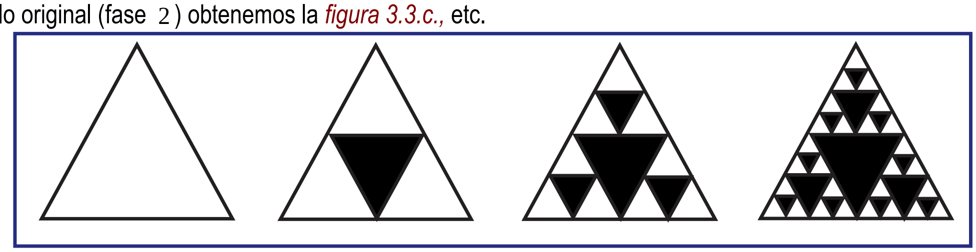
NÚMERO DE AÑOS	CANTIDAD COMPUESTA
0	P
1	$P(1+r)$
2	$P(1+r)^2$
3	$P(1+r)^3$
4	$P(1+r)^4$
$\vdots$	$\vdots$
n	$P(1+r)^n$

TABLA 3.2

□

EJEMPLO 3.2 (El triángulo de Sierpinski)

La *figura 3.3.a.* muestra un triángulo equilátero cuya área es una unidad cuadradas (fase 0). Si unimos los puntos medios de los lados con segmentos rectilíneos obtenemos la *figura 3.3.b.*, misma que contiene cuatro triángulos equiláteros congruentes pero sólo tres comparten su orientación (fase 1). Si repetimos el proceso anterior con los tres triángulos blancos en la misma forma que el triángulo original (fase 2) obtenemos la *figura 3.3.c.*, etc.



a. b. c. d.

FIGURA 3.3

Supongamos que nos interesa la magnitud del área de la *región blanca*:

En la fase 0, *un* triángulo compone a la región blanca, su área es una unidad.

En la fase 1, *tres* ($3=3^1$) triángulos componen la región blanca, el área de uno de los triángulos es $\frac{1}{4}$.

En la fase 2, *nueve* ($9=3^2$) triángulos componen la región blanca, el área de uno de los triángulos es $\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}\right)=\left(\frac{1}{4}\right)^2$.

En la fase 3, veintisiete ($27=3^3$) triángulos componen la región blanca, el área de uno de los triángulos es $\frac{1}{4}\left(\left(\frac{1}{4}\right)^2\right)=\left(\frac{1}{4}\right)^3$.

La *tabla 3.3* describe el comportamiento del área de la figura generada.

FASE	NÚMERO DE TRIÁNGULOS	ÁREA DE CADA TRIÁNGULO	ÁREA DE LA REGIÓN BLANCA
0	1	1	1
1	$3=3^1$	$\frac{1}{4}=\left(\frac{1}{4}\right)^1$	$3^1\left(\frac{1}{4}\right)=\left(\frac{3}{4}\right)^1$
2	$9=3^2$	$\left(\frac{1}{4}\right)^2$	$3^2\left(\frac{1}{4}\right)^2=\left(\frac{3}{4}\right)^2$
3	$27=3^3$	$\left(\frac{1}{4}\right)^3$	$3^3\left(\frac{1}{4}\right)^3=\left(\frac{3}{4}\right)^3$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n	3^n	$\left(\frac{1}{4}\right)^n$	$3^n\left(\frac{1}{4}\right)^n=\left(\frac{3}{4}\right)^n$

TABLA 3.3

Generalización:

1. El número de triángulos en la fase n es $N(n)=3^n$ bajo la condición de que n es un número natural.

2. El área de región blanca está dada por la función $A(n)=\left(\frac{3}{4}\right)^n$ en la que n es un número natural.

PARA REFLEXIONAR

¿?	Establezca la función que describe el área de la región negra.

$\square$

Las relaciones (construidas o señaladas en los dos ejemplos anteriores):

$D(t)=8(0.8)^t$, siempre que $t\geq 0$,

$V_c(t)=v_0\, e^{-\frac{t}{RC}}$, siempre que $t\geq 0$,

$T(t)=T_m+(T_0-T_m)e^{-kt}$, siempre que $t\geq 0$,

$S(n)=P(1+r)^n$, siempre que $n=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \cdots$

$A(n)=\left(\frac{3}{4}\right)^n$, siempre que $n=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \cdots$

son casos particulares de funciones exponenciales.

Definición 3.1 (FUNCIÓN EXPONENCIAL)

a. La función $f(x)=a^x$ bajo las condiciones $a>0$ y $a\neq 1$ se denomina función exponencial de base a en la variable x.

b. Si $f(x)=a^x$ bajo las condiciones $a>0$ y $a\neq 1$, tiene $dom(f)=(-\infty,+\infty)$ y $img(f)=(0,+\infty)$.

PARA REFLEXIONAR

¿?	En la *definición 3.1*, ¿qué ocurre sí $a<0$?

En una función exponencial.

1. En $f(x)=a^x$ la variable independiente es el exponente x, a la variable x es posible asignarle cualquier número real.

2. Es necesario que la base a sea positiva (lo que se escribe como $a>0$), de no ser así $f(x)=a^x$ no siempre estaría definida (recuerde que expresiones como $(-2)^{\frac{1}{2}}$, $(-4)^{\frac{3}{4}}$, $(-6)^{\frac{5}{6}}$, entre otras, no están definidas en el sistema de los números reales) para una gran diversidad de asignaciones a la variable x, por lo que ya no es de nuestro interés.
3. Si $a=1$, entonces $f(x)=a^x=1^x=1$ es una función constante.

EJEMPLO 3.3 (Funciones exponenciales)
a. $f(x)=2^x$ es una función exponencial en la variable x y con base $a=2$.

b. $h(t)=5^{-t}$ es una función exponencial en la variable t y con base $a=5^{-1}=\frac{1}{5}$, por tanto $h(t)=5^{-t}=\left(\frac{1}{5}\right)^t$.

□

Ahora responderemos la pregunta ¿Cómo es la curva asociada a una función exponencial?

La curva asociada a $f(x)=a^x$ (en la que la base es positiva y distinta de uno) tiene como dominio el conjunto $dom(f)=(-\infty,+\infty)$ y puede demostrarse que su curva asociada es suave y continua.

EJEMPLO 3.4 (Gráficas de funciones exponenciales de base mayor que 1)
Para trazar las curvas asociadas a $f(x)=2^x$, $f(x)=3^x$ y $f(x)=10^x$, utilizamos los resultados de la *tabla 3.4* y consideraremos que las curvas asociadas a estas funciones son suaves y continuas.

x	$f(x)=2^x$	$f(x)=3^x$	$f(x)=10^x$
–4	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{81}$	$\frac{1}{10000}$
–2	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{100}$
–1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{10}$
0	1	1	1
1	2	3	10
2	4	9	100
4	16	81	10000

TABLA 3.4

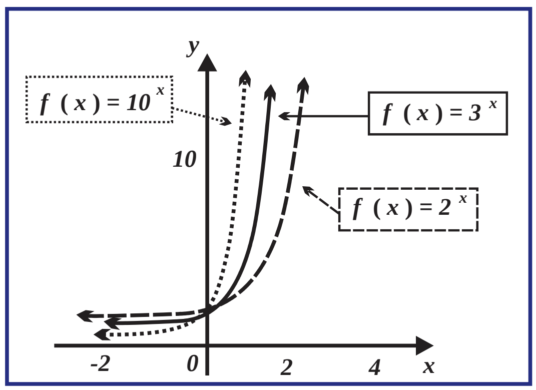


FIGURA 3.4

Así, las curvas asociadas a las funciones anteriores:
i. Intersecan al eje de las ordenadas en el punto $I_y(0,1)$.
ii. Tienen como asíntota horizontal al eje x.
iii. Son positivas (todas sus imágenes son positivas).
iv. Son crecientes, sus imágenes aumentan al ser incrementado el valor asignado a la variable x.
v. Presentan una “oquedad hacia arriba” (es decir, sus curvas son cóncavas hacia arriba).
vi. Si $a_2>a_1>1$, entonces $f(x)=a_2^x$ “crece con mayor rapidez” que $f(x)=a_1^x$ en el primer cuadrante y su crecimiento es más lento que el de $f(x)=a_1^x$ en el segundo cuadrante del plano cartesiano.

USO DE SOFTWARE DE MATEMÁTICAS
Trace las curvas asociadas a funciones exponenciales con distintas bases mayores a uno, describa qué ocurre conforme se incrementa la base.

□

EJEMPLO 3.4 (Características de funciones exponenciales de base comprendida entre cero y uno)

Son casos particulares las funciones exponenciales $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ y $f(x)=\left(\frac{1}{3}\right)^x$, mismas que pueden rescribirse como $f(x)=2^{-x}$ y $f(x)=3^{-x}$ respectivamente. Basándonos en el hecho de que la curva asociada a una función exponencial es suave y continua y la *tabla 3.5* obtenemos las curvas de la *figura 3.5*.

Para trazar las curvas asociadas a $f(x)=2^{-x}$ y $f(x)=3^{-x}$ respectivamente, se utilizó la *tabla* y el hecho de que las curvas a ambas funciones son suaves y continuas.

x	$f(x)=2^{-x}$	$f(x)=3^{-x}$
–4	16	81
–2	4	9
–1	2	3
0	1	1
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$
2	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{9}$
4	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{81}$

TABLA 3.5

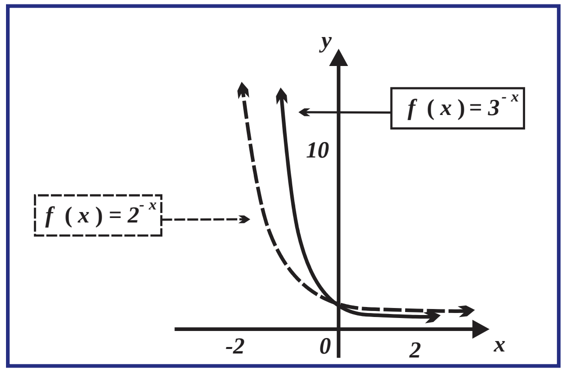


FIGURA 3.5

Así, las curvas asociadas a $f(x)=a^x$ sujetas a la condición $0<a<1$:

i. Intersecan al eje de las ordenadas en el punto $I_y(0,1)$.

ii. Tienen como asíntota horizontal al eje x.

iii. Son positivas.

iv. Son decrecientes, es decir, $y=f(x)$ disminuye al ser incrementado el valor de la variable x.

v. Presentan una "oquedad hacia abajo", es decir, sus curvas son cóncavas hacia abajo.

vi. Si $a_2>a_1>1$, entonces $f(x)=a_2^x$ decrece con mayor rapidez que $f(x)=a_1^x$ en el primer cuadrante y lo hace en forma más lenta en el segundo cuadrante.

USO DE SOFTWARE DE MATEMÁTICAS

Trace la curva asociada a funciones exponenciales con distintas bases mayores entre cero y uno, describa qué ocurre conforme se incrementa la base.

□

PARA REFLEXIONAR

¿?	Compare las figuras *3.4* y *3.5*, explique cómo se obtiene una a partir de la otra, ¿qué relación existe entre ellas?

La *figura 3.6* muestra el patrón de comportamiento de diferentes curvas asociadas a las funciones exponenciales.

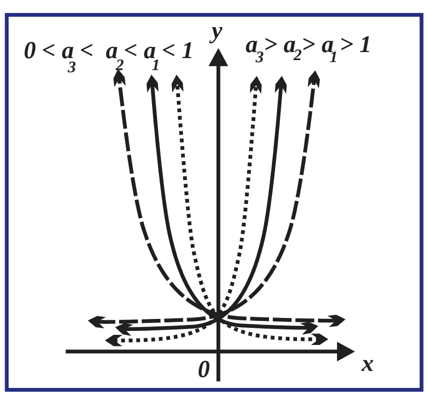


FIGURA 3.6

La constante matemática denotada por e y conocida como número e (en honor al eminente matemático Leonhard Euler), es uno de los números más importantes en las matemáticas. El número e se denomina número de Euler o constante de Napier y lo reporta por primera vez el matemático escocés John Napier. El número e es un número irracional, por lo que no corresponde a la división de dos números enteros y por tanto resulta imposible escribirlo en términos de un número finito de cifras decimales o con decimales periódicos; el número e también es un número trascendente, lo que significa que no es la raíz de una ecuación polinomial con coeficientes racionales. Por otra parte, es probable que la función exponencial que presenta mayor utilidad sea la que tiene base el número e, es decir $a=e$, antes de que caractericemos la función exponencial natural nos aproximaremos al valor del número e, haremos esto asignando números cada vez mayores a la variable x en la expresión $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$, vea la *tabla 3.6*.

x	$\frac{1}{x}$	$1+\frac{1}{x}$	$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$
1	1	2	2
10	0.1	1.1	2.59374
100	0.01	1.01	2.70481
1000	0.001	1.001	2.71692
10000	0.0001	1.0001	2.71814
100000	0.00001	1.00001	2.71826
1000000	0.000001	1.000001	2.71828
10000000	0.0000001	1.0000001	2.718281

TABLA 3.6

A medida que el valor de las asignaciones a la variable x son incrementadas (indefinidamente y en forma positiva), el valor de la expresión $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ es más próximo al número e.

Definición 3.2 (FUNCIÓN EXPONENCIAL NATURAL)

a. El número e (con doce dígitos de aproximación es $2.718281828459\ldots$) se denomina base natural o neperiana.

b. La función con regla de correspondencia $f(x)=e^x$, tal que:
$dom(f)=(-\infty,+\infty)$ y $img(f)=(0,+\infty)$, se conoce como la función exponencial natural.

Dado que $2<e<3$, la curva asociada a la función exponencial natural, un bosquejo de la curva asociada a $f(x)=e^x$ es como lo muestra la *figura 3.7*.

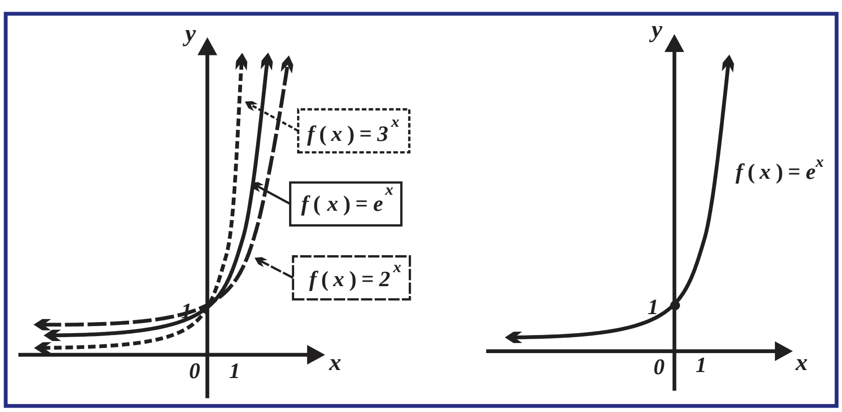


FIGURA 3.7

Al ser $f(x)=e^x$ un caso especial de $f(x)=a^x$ su curva asociada satisface las condiciones:
i. Interseca al eje de las ordenadas (eje y) en el punto $I_y(0,1)$.
ii. Tiene como asíntota horizontal al eje x.
iii. Es creciente y es cóncava hacia arriba.
iv. Es suave y continua.

Utilizando la curva asociada a la función exponencial (de regla de correspondencia $f(x)=a^x$) es posible trazar la curva asociada a la función exponencial de regla de correspondencia $f(x)=a^{(x-h)}+k$ (o equivalentemente, de regla de correspondencia de la función $f(x)=Da^x+k$).

i. La curva asociada a $f(x)=a^{(x-h)}$, se genera desplazando horizontalmente h unidades la curva asociada a $f(x)=a^x$ (a la derecha del eje y si h es positiva, a la izquierda del eje y si h es negativa).
ii. La curva asociada a $f(x)=a^{(x-h)}+k$, se construye desplazando verticalmente k unidades la curva asociada a $f(x)=a^{(x-h)}$ (hacia arriba si k es positiva y hacia abajo si k es negativa).

EJEMPLO 3.6 (Trazo de curvas exponenciales)
a. La curva asociada a $f(x)=3^{x-5}$ (curva continua mostrada en la *figura 3.8*) se obtuvo desplazando horizontalmente 5 unidades a la derecha la curva asociada a la función a $f(x)=3^x$ (curva punteada en la *figura 3.8*). También $dom(f)=(-\infty,+\infty)$ y $img(f)=(0,+\infty)$.
USO DE SOFTWARE DE MATEMÁTICAS
Trace la curva asociada a $f(x)=3^{x-5}$ y compare su resultado con la *figura 3.8*.

b. La curva asociada a $f(x)=e^{x-1}-2$ (curva continua mostrada en la *figura 3.9*) se generó desplazando horizontalmente 1 unidad a la derecha y 2 unidades verticalmente hacia abajo, la curva asociada a $f(x)=e^x$ (curva punteada en la *figura 3.9*). También $dom(f)=(-\infty,+\infty)$ y $img(f)=(-2,+\infty)$.

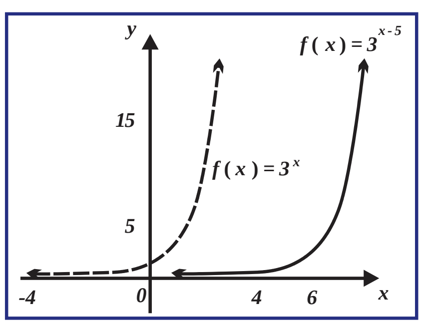


FIGURA 3.8

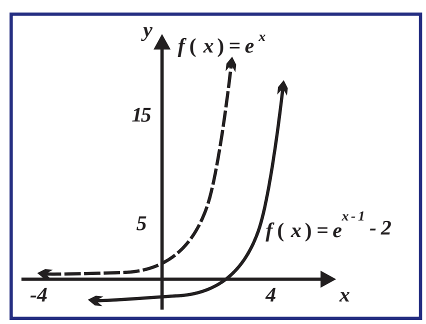


FIGURA 3.9

USO DE SOFTWARE DE MATEMÁTICAS
Trace la curva asociada a $f(x)=e^{x-1}-2$ y compare su resultado con la *figura 3.9*.

c. La curva asociada a $f(x)=3^{x-7}+4$ (curva continua en la *figura 3.10*) se generó desplazando horizontalmente 7 unidades a la derecha la curva asociada a $f(x)=3^x$ (curva punteada en la *figura 3.10*) y luego cuatro unidades verticalmente hacia arriba la curva antes obtenida. Las proyecciones de la curva asociada a $f(x)=3^{x-7}+4$ sobre los ejes coordenados son: $dom(f)=(-\infty,+\infty)$ y $img(f)=(4,+\infty)$.

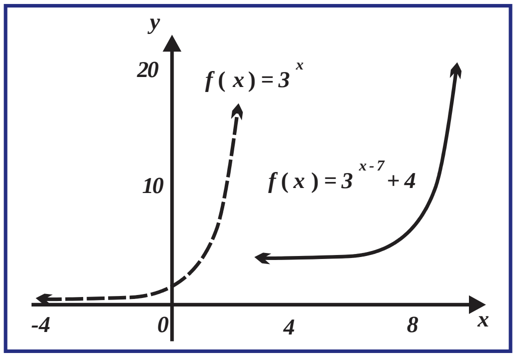


FIGURA 3.10

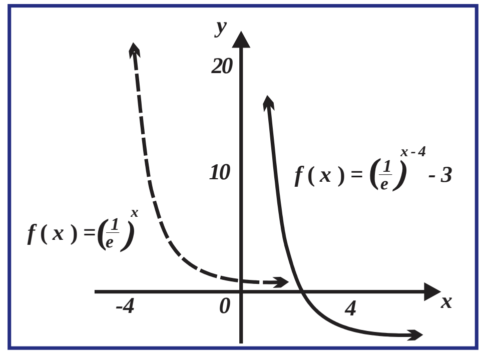


FIGURA 3.11

Trace la curva asociada a $f(x)=3^{x-7}+4$ y compare su resultado con la *figura 3.10*.

d. La curva asociada a $f(x)=\left(\frac{1}{e}\right)^{x-4}-3$ (curva continua en la *figura 3.11*) se generó desplazando horizontalmente 4 unidades a la derecha y luego 3 unidades verticalmente hacia abajo la curva asociada a $f(x)=\left(\frac{1}{e}\right)^{x}$ (curva punteada en la *figura 3.11*). Asimismo, $dom(f)=(-\infty,+\infty)$ y $img(f)=(-3,+\infty)$.

Trace la curva asociada a $f(x)=\left(\frac{1}{e}\right)^{x-4}-3$ y compare su resultado con la *figura 3.11*.

□

Ahora analicemos el papel que desempeña una constante D de la función $g(x)=Da^{x}$ en el trazo de la curva asociada a una función exponencial. Si en $g(x)=a^{x-h}$, aplicamos las leyes de los exponentes obtenemos $g(x)=a^{x-h}=a^{x}a^{-h}$, regla de correspondencia que puede escribirse como $f(x)=a^{x-h}=Da^{x}$, siempre que $D=a^{-h}$, por tanto el factor constante D en $g(x)=a^{x-h}=Da^{x}$ se relaciona con un desplazamiento horizontal de la curva correspondiente $f(x)=a^{x}$. Así, la curva asociada a $g(x)=Da^{x}$ se obtiene desplazando horizontalmente la curva asociada a $f(x)=a^{x}$ un total de $D=a^{-h}$ unidades.

NOTA

Hasta el momento no hemos tratado los aprendizajes necesarios para determinar la magnitud del desplazamiento señalado, es decir, obtener el valor de h en la ecuación $D=a^{-h}$ (en la siguiente sección veremos cómo resolver esta problemática, por lo que en las líneas siguientes sólo trataremos casos específicos).

La curva asociada a $g(x)=Da^{x}$ es idéntica a la curva asociada a $f(x)=a^{x}$, pero está desplazada horizontalmente $D=a^{-h}$ unidades.

EJEMPLO 3.7 (Casos particulares de trazo de curvas asociadas a funciones con regla de correspondencia $g(x)=Da^{x}$)

a. Curva asociada a $g(x)=\frac{1}{9}3^{x-1}$.

Para trazar la curva asociada a $g(x)=\frac{1}{9}3^{x-1}$, primero la rescribimos, así $g(x)=\frac{1}{9}3^{x-1}=\frac{1}{3^{2}}3^{x-1}=3^{-2}3^{x-1}=3^{x-3}$, por tanto, la curva asociada $g(x)=\frac{1}{9}3^{x-1}=3^{x-3}$ que se obtiene desplazando horizontalmente tres unidades a la derecha la curva asociada a $f(x)=3^{x}$ vea la *figura 3.12*.

b. Trazo de la curva asociada a $g(x)=16\cdot 2^{x-2}$.

Para trazar la curva asociada a $g(x)=16\cdot 2^{x-2}$, primero la rescribimos, así $g(x)=16\cdot 2^{x-2}=2^4\cdot 2^{x-2}=2^{x+2}$, por tanto, la curva asociada a $g(x)=8\cdot 2^{x-2}$ se obtiene desplazando horizontalmente dos unidades a la izquierda la curva asociada a $f(x)=2^x$, vea la *figura 3.13*.

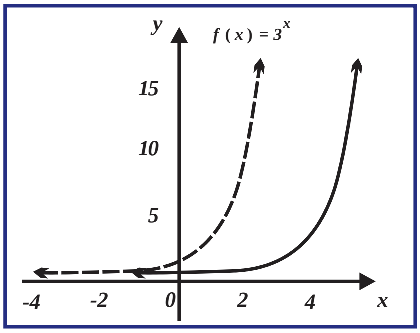


FIGURA 3.12

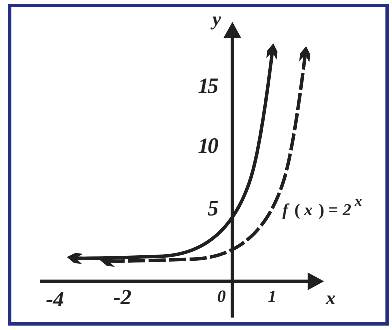


FIGURA 3.13

Trace las curvas asociadas a $g(x)=\frac{1}{9}3^{x-1}$ y $g(x)=8\cdot 2^{x-2}$, compare sus resultados con las *figuras 3.12 y 3.13* respectivamente.

c. Trazo de la curva asociada a $g(x)=-4\cdot 2^{x-2}-1$.

Puesto que $g(x)=-4\cdot 2^{x-3}-1=-2^2\cdot 2^{x-3}-1=-2^{x-1}-1$, obtenemos la curva correspondiente desplazando horizontalmente una unidad a la derecha la curva asociada a $f(x)=2^x$, luego la desplazamos una unidad hacia abajo en forma vertical, por último la curva así obtenida la reflejamos respecto al eje equis, vea la *figura 3.14*.

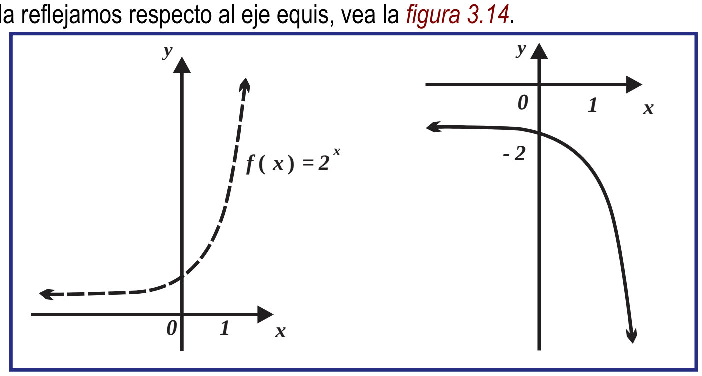


FIGURA 3.14

d. Trazo de la curva asociada a $g(x)=-16\cdot 4^{x-3}+1$.

Puesto que $g(x)=-16\cdot 4^{x-3}+1=-4^2\cdot 4^{x-3}+1=-4^{x-1}+1$, obtenemos la curva correspondiente desplazando horizontalmente una unidad a la derecha la curva asociada a $f(x)=4^x$, luego la desplazamos una unidad hacia arriba en forma vertical, por último, la curva así obtenida la reflejamos respecto al eje equis, vea la *figura 3.15*.

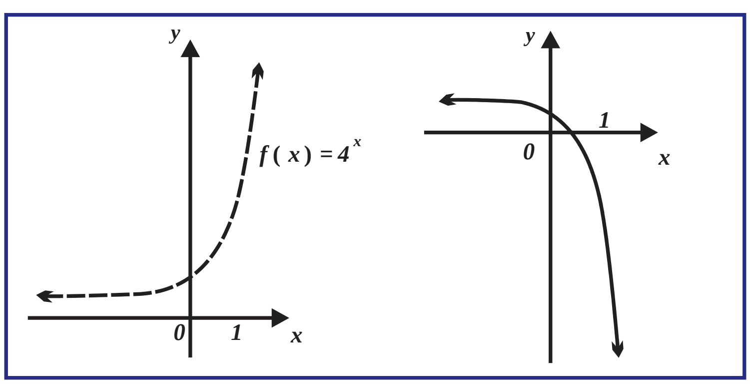


FIGURA 3.15

Trace la curva asociada a $g(x)=-4\cdot 2^{x-3}-1$ y $g(x)=-16\cdot 4^{x-3}+1$ y compare sus resultados con las *figuras 3.14 y 3.15* respectivamente.

Funciones exponenciales con bases diferentes están relacionadas, es decir, es posible transformar la base en una función exponencial específica de manera que se conserven sus propiedades.

Supongamos que las funciones exponenciales $f(x)=a^x$ y $g(x)=b^{mx}$ son iguales, entonces se cumple $a^x=b^{mx}$ ó equivalentemente $a^x=\left(b^m\right)^x$, por tanto $a=b^m$. Así, una función exponencial puede escribirse en la base que se desee (siempre y cuando ésta base no sea no negativa), sin embargo, este proceso requiere resolver, para m, la ecuación $a=b^m$ (que resulta de igualar $f(x)=a^x$ con $f(x)=b^{mx}$). Por el momento sólo trabajaremos cambios de base en el que el proceso a seguir sea inmediato y en la siguiente sección generalizaremos los métodos involucrados en el proceso de "cambio de base".

EJEMPLO 3.8 (Cambios de base inmediatos)

a. Podemos rescribir $f(x)=8^x$ en base dos, es decir, en la forma $f(x)=2^{mx}$, necesariamente $8=2^m$, de donde $m=3$ (puesto que $2^3=8$) y en consecuencia $f(x)=2^{3x}$.

b. Para rescribir $f(x)=9^x$ en base tres, es decir, en la forma $f(x)=3^{mx}$, necesariamente $9=3^m$, de donde $m=2$ (puesto que $3^2=9$) y en consecuencia $f(x)=9^x=3^{2x}$.

c. Para rescribir $f(x)=2^x$ en base $\frac{1}{2}$, es decir, en la forma $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^{mx}$, se debe cumplir $2=\left(\frac{1}{2}\right)^m$ en consecuencia $m=-1$ y $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^{-x}$.

d. La función $f(x)=2^x$ puede rescribirse en base 4 puesto que $f(x)=2^x=\left(4^{\frac{1}{2}}\right)^x=4^{\frac{1}{2}x}$.

Otra propiedad que presenta una función exponencial es la de poseer "razones de imágenes constantes" para asignaciones (a la variable) igualmente espaciadas, veamos qué significa esto.

EJEMPLO 3.9 (IMÁGENES DE ASIGNACIONES IGUALMENTE ESPACIADAS Y CONSECUTIVAS)

La *tabla 3.7* corresponde a la función $f(x)=2^x$ en la que se han hecho asignaciones a la variable x *"igualmente espaciadas"*, en este caso $d=2$, es decir, la diferencia entre dos asignaciones consecutivas a la variable x es $d=2$.La tercera columna muestra las imágenes de las asignaciones previas.

x	$d=x_{i+1}-x_i$	$f(x)=2^x$	$\frac{f(x_{i+1})}{f(x_i)}$
-2		$2^{-2}=\frac{1}{4}$	
0	2	$2^0=1$	4
2	2	$2^2=4$	4
4	2	$2^4=16$	4
6	2	$2^6=64$	4

TABLA 3.7

Note que la división de dos imágenes consecutivas es:

$$\frac{f(0)}{f(-2)}=\frac{1}{\frac{1}{4}}=4,\quad \frac{f(2)}{f(0)}=\frac{4}{1}=4,\quad \frac{f(4)}{f(2)}=\frac{16}{4}=4,\quad \frac{f(6)}{f(4)}=\frac{64}{16}=4 \text{ y } \frac{f(8)}{f(4)}=\frac{256}{64}=4,$$

es decir "la razón entre las imágenes de dos asignaciones a x igualmente espaciadas" es $\frac{f(4)}{f(2)}=\frac{16}{4}=4$, lo que significa que es constante..

□

La observación anterior se cumple en cualquier función exponencial de la forma $f(x)=a^x$ con $a>0$ y $a\neq 1$.

Supongamos que x_1, $x_2=x_1+d$, $x_3=x_2+d$, $x_4=x_3+d$, etc., pertenecen al dominio de una función $f(x)=D\cdot a^x$ (note que la diferencia de dos de éstos números consecutivos es constante, llamémosle d, $d>0$), es decir, son "números igualmente espaciados", vea la *figura 3.16*.

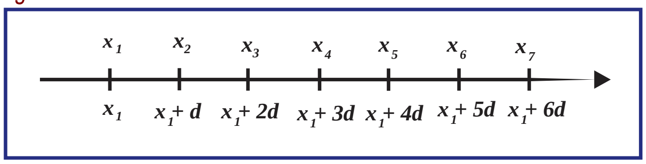


FIGURA 3.16

Las imágenes de x_1, $x_2=x_1+d$, $x_3=x_2+d$, $x_4=x_3+d$ bajo $f(x)=D\cdot a^x$, se muestran en la *tabla 3.8.*

x	$f(x)=D\cdot a^x$
x_1	$f(x_1)=D\cdot a^{x_1}$
$x_2=x_1+d$	$f(x_2)=D\cdot a^{x_1+d}=D\cdot a^{x_1}\cdot a^d$
$x_3=x_2+d$	$f(x_3)=D\cdot a^{x_2+d}=D\cdot a^{x_1}\cdot a^{2d}$
$x_4=x_3+d$	$f(x_4)=D\cdot a^{x_3+d}=D\cdot a^{x_1}\cdot a^{3d}$

TABLA 3.8

La división de dos imágenes consecutivas de la *tabla 3.8* da como resultado:

$$\frac{f(x_2)}{f(x_1)}=\frac{a^{x_1+d}}{a^{x_1}}=\frac{a^{x_1}\cdot a^d}{a^{x_1}}=a^d\,,\quad \frac{f(x_3)}{f(x_2)}=\frac{a^{x_1+2d}}{a^{x_1+d}}=\frac{a^{x_1}\cdot a^{2d}}{a^{x_1}\cdot a^d}=a^d\,,\quad \frac{f(x_4)}{f(x_3)}=\frac{a^{x_1+3d}}{a^{x_1+2d}}=\frac{a^{x_1}\cdot a^{3d}}{a^{x_1}\cdot a^{2d}}=a^d\,,$$

por tanto, en la función exponencial $f(x)=D\cdot a^x$ la razón entre dos imágenes de dos elementos del dominio igualmente espaciados es constante. Esta observación se generaliza de la siguiente forma:

PROPIEDAD 3.1 (RAZÓN ENTRE LAS IMÁGENES DE ASIGNACIONES A LA VARIABLE "IGUALMENTE ESPACIADAS")

"Si x_1, x_2, x_3, $\cdots$ y x_n son asignaciones a x en $f(x)=D\cdot a^x$ igualmente espaciadas" (digamos una distancia $d>0$), si y sólo si la razón de sus imágenes bajo $f(x)=D\cdot a^x$ es $\frac{f(x_{i+1})}{f(x_i)}=a^d$".

La *figura 3.17* ilustra la *propiedad 3.1*.

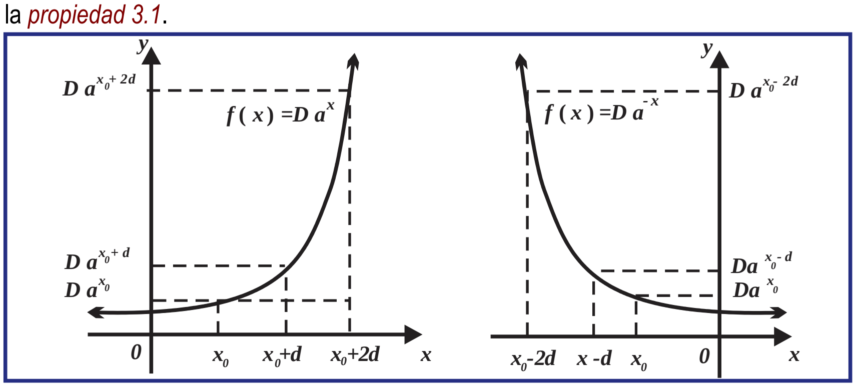


FIGURA 3.17

EJEMPLO 3.10 (Determinación de la regla de correspondencia de una función exponencial)

a. Supongamos que la *tabla 3.9* pertenece a una función exponencial. Observe que si dividimos dos imágenes consecutivas el cociente es constante, (la primera columna son asignaciones a la variable x y la segunda son las imágenes respectivas).

x	$f(x)$
-1	$\frac{1}{20}$
0	$\frac{1}{4}$
1	$\frac{5}{4}$
2	$\frac{25}{4}$
3	$\frac{125}{4}$

TABLA 3.9

Para determinar la regla de correspondencia (que es de la forma $f(x)=D\cdot a^x$), determinamos el valor del parámetro D, note que $f(0)=D\cdot a^0=D$, por tanto $D=\frac{1}{4}$ (vea la *tabla 3.9*). Por otra parte, la razón entre dos imágenes consecutivas (observe que las asignaciones a x están igualmente espaciadas) es $a^1=\frac{f(2)}{f(1)}=\frac{\frac{25}{4}}{\frac{5}{4}}=5$. La regla de correspondencia es

$$f(x)=\frac{1}{4}5^x.$$

□

EJEMPLO 3.11 (Determinación de la regla de correspondencia de una función exponencial)

a. Suponga que f es una función exponencial tal que $f(2)=\frac{9}{5}$ y $f(5)=\frac{243}{5}$. Para determinar la regla de correspondencia $f(x)=Da^x$, notemos que:

$f(2)=D\cdot a^2=\frac{9}{5}$ y $f(5)=D\cdot a^5=\frac{243}{5}$, por tanto, el cociente es $\frac{f(5)}{f(2)}=\frac{D\cdot a^5}{D\cdot a^2}$ ó $a^3=\frac{243}{9}$, entonces $a^3=27$ ó $a=3$. Para determinar D, sustituimos $a=3$ en la primera igualdad (se obtiene lo mismo si se sustituye en la segunda igualdad), por tanto $f(2)=D\cdot 3^2=\frac{9}{5}$, de donde $9D=\frac{9}{5}$ y $D=\frac{1}{5}$. La regla de correspondencia es $f(1)=\frac{1}{5}3^x$.

b. Supóngase que $f(x)$ es una función exponencial que satisface: $f(1)=\frac{3}{10}$ y $f(4)=\frac{3}{10000}$. Para determinar la regla de correspondencia $f(x)=Da^x$, procedemos como sigue:

$f(1)=D\cdot a=\frac{3}{10}$ y $f(4)=D\cdot a^4=\frac{3}{10000}$, por tanto, el cociente es $\frac{f(4)}{f(1)}=\frac{a^4}{a}=\frac{\frac{3}{10000}}{\frac{3}{10}}$ ó $a^3=\frac{1}{1000}$, entonces $a=\frac{1}{10}$.

Para determinar D, sustituimos $a=\frac{1}{10}$ en la primera igualdad (se obtiene lo mismo si se sustituye en la segunda igualdad), por tanto $f(1)=\left(\frac{1}{10}\right)D=\frac{3}{10}$, de donde $D=3$. La regla de correspondencia es $f(x)=3\left(\frac{1}{10}\right)^x$.

□

ECUACIONES QUE INVOLUCRAN LA INCÓGNITA EN EL EXPONENTE

La relación $a^x=m$, en la que x es la incógnita (se interpreta de la siguiente forma ¿a qué exponente x debe elevarse el número a para obtener el número m?), se denomina "ecuación exponencial". Resolver una ecuación exponencial significa determinar el valor de x (si es que existe) en $a^x=m$ (este tipo de ecuaciones fundamenta la necesidad de definir una nueva familia de funciones, las funciones logarítmicas, que trataremos en la próxima sección) .

EJEMPLO 3.12 (Solución de ecuaciones exponenciales)

a. La solución de $2^{x-1}=16$ es $x=5$ puesto que $2^{5-1}=2^4=16$.

b. Para resolver $3(4)^{2x+1}=192$ observe que esta ecuación es equivalente a $4^{2x+1}=64$ y que $4^3=64$ por tanto $2x+1=3$, de donde $x=1$ (Necesariamente los exponentes son iguales, dado que las bases lo son).

c. Para resolver $2\left(\frac{1}{5}\right)^{4-x}=50$, note que esta ecuación es equivalente a $\left(\frac{1}{5}\right)^{4-x}=25$ y que también es equivalente a $5^{x-4}=25$, pero $5^2=25$. Dado que los exponentes son iguales, dado que las bases lo son, $x-4=2$, y en consecuencia $x=6$.

d. Para resolver $16^{x-2}=32^{x+2}$, transformemos la ecuación de manera que los miembros tengan la misma base, entonces $16^{x-2}=32^{x+2}$ es equivalente a $\left(2^4\right)^{x-2}=\left(2^5\right)^{x+2}$, por tanto $2^{4x-8}=2^{5x+10}$. Necesariamente los exponentes son iguales, dado que las bases lo son, entonces $4x-8=5x+10$ y en consecuencia $x=-18$.

e. Para resolver $2^{x^2+4x}=\frac{1}{8}$, transformemos la ecuación de manera que sus miembros tengan la misma base, entonces $2^{x^2+4x}=2^{-3}$. Necesariamente los exponentes son iguales (dado que las bases lo son) entonces $x^2+4x=-3$ y en consecuencia, se obtiene la ecuación cuadrática $x^2+4x+3=0$. Esta última ecuación es equivalente a $(x+3)(x+1)=0$, sus soluciones son $x_1=-3$ y $x_2=-1$.

f. Para resolver $64^{8-x^2}=16^{3x+4}$, transformemos la ecuación de manera que sus miembros tengan la misma base, $\left(4^3\right)^{8-x^2}=\left(4^2\right)^{3x+4}$, entonces $4^{24-3x^2}=4^{6x+8}$, por tanto $3x^2+6x-16=0$, y $x_1=\frac{-6+\sqrt{228}}{6}$ y $x_2=\frac{-6-\sqrt{228}}{6}$.

□

PARA REFLEXIONAR

¿?	¿Qué relación existe entre las funciones: $f(x)=a^{kx}$ con $a>1$ y $k>0$ y $f(x)=a^{kx}$ con $0<a<1$ y $k<0$?

En la siguientes líneas responderemos las preguntas **¿qué papel desempeña el signo de k en $f(x)=a^{-kx}$ bajo la suposición de que $a>1$?, ¿qué aplicaciones tienen las funciones exponenciales?**

Antes vimos (revise el *ejemplo 3.4*) que la curva asociada a la función $f(x)=a^{kx}$ con $a>1$ y $k>0$ es creciente, ocurre lo contrario si $k<0$ (revise el *ejemplo 3.5*), es decir, la curva asociada a la función $f(x)=a^{kx}$ con $0<a<1$ y $k>0$ es decreciente, vea la *figura 3.18*.

NOTA

Recuerde que la característica de las funciones crecientes se manifiesta en el hecho de que para "asignaciones mayores a la variable independiente se obtienen imágenes mayores para la función".

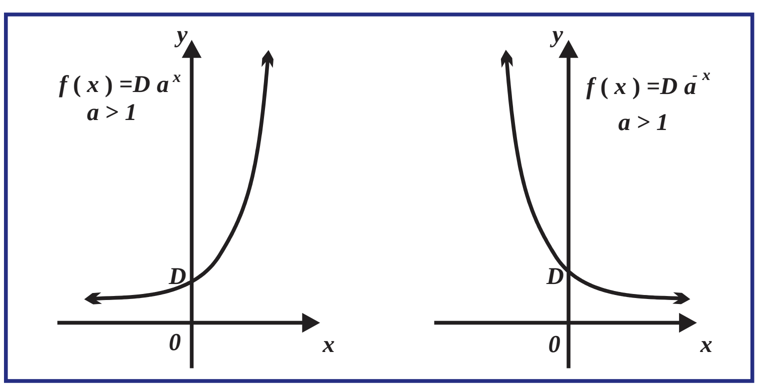


FIGURA 3.18

Así, cuando alguna situación o problema se modela mediante la función $f(x)=a^{kx}$ con $a>1$ y $k>0$, se dice que se tiene un problema de crecimiento exponencial, similarmente, cuando alguna situación se modela mediante la función $f(x)=a^{kx}$ con $a>1$ y $k<0$, se dice que se tiene un problema de decaimiento exponencial.

Definición 3.3 (CRECIMIENTO Y DECAIMIENTO EXPONENCIAL)

Cualquier situación o problema que se modela mediante la función $f(x)=Da^{kx}$ con $a>1$ y:

a. $k>0$, se dice que corresponde a un problema de crecimiento exponencial.
b. $k<0$, corresponde a un problema de decaimiento exponencial.
c. El coeficiente $D=f(0)$ se denomina cantidad o valor inicial.

PARA REFLEXIONAR

¿?	¿Cómo rescribiría la definición anterior si $0<a<1$?

EJEMPLO 3.13 (Identificación de funciones exponenciales)

a. $f(t)=12(2)^{3t}$, es una función que involucra crecimiento exponencial con cantidad inicial $D=12$.

b. La función $f(t)=8(3)^{-\frac{1}{2}t}$ involucra decaimiento exponencial (puesto que $k=-\frac{1}{2}$) y con cantidad inicial $D=8$.

c. $f(t)=\frac{1}{5}(4)^{\frac{1}{8}t}$ corresponde a una función que involucra crecimiento exponencial, la constante $k=\frac{1}{8}$ es positiva, su cantidad o valor inicial es $D=\frac{1}{5}$.

□

EJEMPLO 3.14 (Crecimiento de bacterias)

Supongamos que el número de bacterias en cierto cultivo está dado por $f(t)=D2^{k\cdot t}$, donde t representa el número de horas. Al cabo de 4 horas el número de bacterias en el cultivo es $\sqrt[8]{2}=2^{\frac{1}{8}}$ veces de las que había inicialmente.

a. Para determinar el valor de k, puesto que en $t=4$ horas existen $2^{\frac{1}{8}}A$ bacterias ó $f(4)=(D)2^{4\cdot k}$, entonces $(D)2^{4\cdot k}=2^{\frac{1}{8}}(D)$, así $2^{\frac{1}{8}}=2^{4k}$ y $\frac{1}{8}=4k$ ó $k=\frac{1}{32}$.

b. Por consiguiente, si $k=\frac{1}{32}$ en $f(t)=D\left(2^{k\cdot t}\right)$, entonces $f(t)=\frac{1}{32}(2)^{\frac{t}{32}}$.

□

EJEMPLO 3.15 (Crecimiento de una población)

En 1980 la población de la India era de 651 millones y ha estado creciendo a una tasa de 2% anual. La población $N(t)$, t años más tarde puede aproximarse mediante la relación $N(t)=651e^{0.02t}$. Suponga que ésta tasa de crecimiento es continua. Por tanto, $N(t)=651e^{0.02t}$ cuando $t=30$ años, entonces $N(30)=651e^{0.02\cdot 30}=651e^{0.60}=1186$, en consecuencia la población de la India, será para el año 2010, de aproximadamente 1186 millones.
Note que el número de pobladores es una variable discreta, sin embargo ha sido descrita utilizando un modelo continuo.

□

PARA REFLEXIONAR

¿?	La cantidad de bacterias es discreta, ¿Qué opina sobre el modelo continuo con el que ha sido modelada?

EJEMPLO 3.16 (Depreciación de un automóvil)

El precio de un automóvil es actualmente de $\$150\,000$. Si dicho automóvil se deprecia 12% durante cada uno de los 5 primeros años de uso. Al primer año su valor es $\$150000(0.88)$, al segundo $\$150\,000(0.88)(0.88)=\$150\,000(0.88)^2$, entonces la función que proporciona su valor en el año n es $V(t)=150{,}000(0.88)^t$. Si $t=5$ años, $V(5)=150{,}000(0.88)^5=79\,160$. El valor del automóvil es de $\$79\,160$ a los 5 años.

□

EJEMPLO 3.17 (Decaimiento radiactivo)
La vida media de una sustancia radiactiva, se define como el tiempo transcurrido en que se desintegra la mitad de la sustancia como resultado de su decaimiento. La relación en términos del tiempo t para calcular la vida media de una sustancia radiactiva es $Q(t)=Q_0\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{h}}$, donde Q es la cantidad de sustancia radiactiva existente en el tiempo t, Q_0 es la cantidad inicial y h representa la vida media. Si el Bario 140 tiene una vida media de 13 días e inicialmente se cuenta con 500 miligramos de esta sustancia:

a. La cantidad en miligramos de bario que quedan después de 26 días, se calcula como sigue: Inicialmente la cantidad en miligramos de bario es $Q_0=500$, la vida media es $h=13$ y a los $t=26$ días, entonces $Q(26)=500\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{26}{13}}=500\left(\frac{1}{2}\right)^{2}=125$. Después de 26 días sólo hay 125 miligramos de bario.

b. Para determinar la cantidad en miligramos de bario que quedan después de 100 días se toma en cuenta que: inicialmente $Q_0=500$, la vida media del Bario es de $h=13$ días, y $t=100$, por consiguiente $Q(100)=500\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{100}{13}}=2.4$. Después de 100 días quedan 2.4 miligramos de bario.

□

EJEMPLO 3.18 (Interés compuesto)
El monto final de una inversión está dada por $S(n)=P(1+r)^n$, donde P es el capital inicial de P pesos, r es la tasa de inversión y n el número de periodos.

a. Para determinar el monto acumulado por un principal de $\$7\,500$ durante 8 años al 8% de interés capitalizado semestralmente, debemos tener en cuenta que el número de semestres (periodos) en 8 años es 16, por tanto

$$S=7\,500\left(1+\frac{0.08}{2}\right)^{16}\approx 14{,}047 \text{ pesos.}$$

b. Para determinar el monto final acumulado por $\$12\,000$ durante 10 años al 10% capitalizado trimestralmente, se toma en cuenta que el número de trimestres en 10 años es 40, por tanto $S=12{,}000\left(1+\frac{0.08}{4}\right)^{40}\approx 32{,}221$ pesos.

□

¿Qué conceptos aprendí?

PARA COMPLETAR

1. En una función ______________________la variable independiente es la base.

2. El dominio de la función exponencial $f(x)=a^x$ es ____.

3. La curva asociada a una a función exponencial $f(x)=a^x$ tiene como ____________________________al eje de las abscisas.

4. La curva asociada a una a función exponencial es $f(x)=a^x$ ________________________________suave y contínua.

5. La curva asociada a una a función exponencial es $f(x)=a^{-x}$ ________________________________.

6. Si en una función exponencial calculamos las imágenes de funciones igualmente espaciadas entonces las ______________________________ son constantes.

7. Si en la función exponencial $f(x)=a^x$ ____________________________________ la curva correspondiente es decreciente.

8. La curva asociada a la función exponencial $f(t)=a^{t-4}$ se construye ____ la curva asociada a $f(t)=a^t$.

9. La ______________________________ de una sustancia radiactiva, se define como el tiempo transcurrido en que se desintegra la mitad de la sustancia como resultado de su decaimiento.

10. Cualquier situación o problema que se modela mediante la función $f(x)=Da^{kx}$ con $a>1$ y $k>0$, se dice que corresponde a ____.

CIERTO O FALSO (Explique)

1. Todas las funciones exponenciales tienen base positiva.

2. Si en una función exponencial la base es un número comprendido entre cero y uno, entonces tiene asociada una curva decreciente.

3. En una función exponencial creciente el conjunto imagen son los números reales positivos.

4. Las funciones exponenciales intersecan al eje de las ordenadas en el punto $(0\ ,\ 1)$.

5. La curva asociada a una función exponencial es creciente si su base es positiva.

6. Una función exponencial puede tener base uno.

7. Existen funciones exponenciales con base negativa.

8. Toda función exponencial puede rescribirse con base entera.

9. Toda función exponencial puede rescribirse con exponente positivo.

10. En $f(x)=Da^{kx}$, el parámetro k indica que tan rápido crece la curva asociada a $f(x)=Da^{kx}$.

11. En $f(x)=Da^{kx}$, $f(0)$ representa el valor inicial.

12. En $f(x)=Da^{kx}$, D representa el valor inicial.

PROBLEMAS PROPUESTOS 3.1

1. El número de bacterias de cierto cultivo se reproduce en forma exponencial mediante la relación $f(t)=600(3)^t$ en donde t representa el tiempo transcurrido en horas después de las $7:00$ en que se hizo la primera observación. De acuerdo con lo anterior complete la tabla siguiente y el dibujo de la gráfica correspondiente.

t	0	1	2	3	4	5
Número de bacterias						

2. En una reserva ecológica se introducen 50 zánganos que se reproducen exponencialmente de acuerdo a la función $f(t)=50(1.2)^t$, donde t es el número de años transcurridos desde que se inicia la actividad. Determine el número de zánganos que habrá después de 3, 5 y 10 años, represente el crecimiento de la población por medio de una tabla y gráficamente.

3. Si un principal P se invierte al 6% anual el monto alcanzado después de x años se calcula utilizando la relación $S=P(1.06)^t$ donde S es el capital final y t el tiempo en años. Si el principal P inicial es $\$1000$ complete la tabla y dibuje la gráfica correspondiente.

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8
S									

4. Un medicamento se elimina mediante la orina, si la dosis inicial es de 25 miligramos, t representa el número de horas transcurridas después de la ingestión de la sustancia y la cantidad de medicamento en el cuerpo se obtiene mediante la relación $f(t)=50(0.9)^t$. Complete la tabla y dibuje la gráfica correspondiente.

t	0	1	2	4	6	8	10	15	18
D									

5. De una lámina cuadrada de longitud de lado 1 se cortarán tantos cuadriláteros como se desee, suponga que la base del cuadrilátero posterior que se corta tiene base igual a la mitad del cuadrilátero previo. Determine la función que describe el área del cuadrilátero n.

6. Con un segmento de recta de longitud l efectúe el siguiente proceso: Divídalo en tres segmentos congruentes, elimine la parte central, remplace la parte central eliminada con dos segmentos de recta congruentes de forma que dos extremos coincidan y los otros dos extremos coincidan con los extremos (internos) de los segmentos no eliminados. Determine la función que describe el perímetro después que el proceso se ha efectuado n veces.

7. Una población de 5000 insectos crece a razón del 1% diario.
a. Determine el modelo que describe el número de insectos después de t días.
b. Determine el número de insectos a los 10 días (redondee su resultado al entero más cercano).

8. Una población de microbios se duplica cada minuto, determine la función que describe la cantidad de bacterias después de n minutos.

9. Una máquina transforma una cantidad específica de materia de forma que esta se reduce a la cuarta parte cada hora, determine la función que describe la cantidad de materia disponible después de n horas.

10. El precio inicial de una máquina para cosechar trigo es de $\$\,650\,000$. Si esta máquina se deprecia $6\,\%$ anualmente.
a. Obtenga una expresión para calcular el precio después de x años.
b. Elabore una tabla de precios para los primeros 10 años de uso.
c. Represente gráficamente el proceso de devaluación de la máquina.

11. De un elemento radiactivo quedan Q gramos después de t días, donde $Q = 20e^{-0.208t}$.
a. ¿Cuál es la cantidad inicial del elemento radiactivo?
b. ¿Cuántos gramos quedan del elemento a los 15 días?
c. ¿Cuántos días deben transcurrir para que quede la mitad del elemento?

12. La mitad de una sustancia radiactiva decayó en 10 años. ¿Cuánto tiempo debe transcurrir para que un gramo decaiga un 10 por ciento?

13. ¿Cuáles de las siguientes relaciones representan funciones exponenciales definidas sobre los números reales? Justifique su respuesta.

a. $f(x) = 8^x$. **c.** $k(x) = \left(\frac{7}{4}\right)^{-x}$.
b. $g(x) = (-2)^x$. **d.** $m(x) = \left(3^{-2}\right)^{-x}$.
e. $h(x) = 6^{-x}$. **g.** $n(x) = (-4)^{-x}$.
f. $j(x) = \left(-\frac{2}{5}\right)^{-x}$. **h.** $p(x) = -4^{-x}$.

14. Rescriba las funciones de forma que el exponente sea positivo. Trace la curva correspondiente, determine el dominio y el rango (recorrido).

a. $f(x) = (3.2)^{-x}$. **i.** $b(x) = 0.9^{-x}$.
b. $g(x) = 0.9^{-x}$. **j.** $c(x) = (0.4)^{-x}$.
c. $h(x) = 4^{-x}$. **k.** $d(x) = \left(\frac{3}{4}\right)^{-x}$.
d. $i(x) = 6(100)^{-x}$. **l.** $e(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^{-x}$.
e. $k(x) = -3(9)^{-x}$. **m.** $f(x) = \left(\frac{4}{9}\right)^{-x}$.
f. $l(x) = \frac{2}{3}(4)^{-x}$. **n.** $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{-x}$.
g. $m(x) = \frac{1}{6}(1.4)^{-x}$. **o.** $h(x) = (0.25)^{-x}$.
h. $a(x) = \left(\frac{1}{20}\right)^{-x}$.

15. Determine el dominio, el conjunto imagen y grafique.

a. $f(x) = \frac{3}{20}(3)^{x-5} + 4$. **g.** $f(x) = -\frac{1}{5}(3)^{x-2} + 24$.
b. $g(x) = -4^{x+3} - 18$. **h.** $g(x) = -2(3)^{x+\frac{1}{2}} - 1$.
c. $f(x) = -\frac{2}{5}(3)^{x-1} - 5$. **i.** $h(x) = \frac{2}{5}(3)^{x-\frac{2}{3}} - 2$.
d. $m(x) = 5(6)^{x+1} + 40$. **j.** $a(x) = -5(8)^{x+4} + 4$.
e. $n(x) = -\frac{2}{9}\left(\frac{3}{5}\right)^{x+5} + 12$. **k.** $b(x) = -\frac{4}{9}(4)^{x+5} + 10$.
f. $p(x) = -2\left(\frac{3}{5}\right)^{x-2} + 7$. **l.** $c(x) = -2\left(\frac{1}{5}\right)^{x+\frac{8}{3}} - 1$.

16. Determine el dominio, el conjunto imagen y trace la curva.

b. $g(x) = 2e^{x+3} - 1$. **h.** $s(x) = 8e^{-x} + 5$.
c. $h(x) = \frac{8}{15}e^{x-1} + 7$. **i.** $t(x) = 2e^{-x+12} + 2$.
d. $i(x) = -6e^{x-10} - 31$. **j.** $v(x) = -e^{-x} + 5$.
e. $j(x) = \frac{13}{9}e^{x-10} + 15$. **k.** $w(x) = -4e^{-x+12}$.
f. $k(x) = 2e^{x+12} + 4$. **l.** $u(x) = e^{-x} + 6$.
g. $f(x) = -\frac{3}{20}e^{x-5} + 8$.

17. ¿Cómo obtendría la curva asociada a $f(x) = a^x$ a partir de la curva asociada a $f(x) = a^{-x}$?

18. Describa cómo obtener la curva asociada a g utilizando la curva de f.

a. $f(x) = 2^x$, $g(x) = 2^{x-3} + 1$.
b. $f(x) = 3^x$, $g(x) = \frac{1}{2} \cdot 3^{x+1} + 1$.
c. $f(x) = 4^x$, $g(x) = -4^{x+2} - 2$.
d. $f(x) = 10^x$, $g(x) = \frac{1}{100} \cdot 10^{-x-1} + 4$.
e. $f(x) = e^x$, $g(x) = 3e^{x+2} - 2$.
f. $f(x) = e^x$, $g(x) = -\frac{3}{2}e^{x+2} - 5$.
g. $f(x) = e^x$, $g(x) = \frac{1}{8}e^{-x-5} - 5$.

19. Determine la regla de correspondencia de la función exponencial que satisface las condiciones:

a. Interseque al eje de las ordenadas en $I_y\left(0\ ,\ \frac{1}{2}\right)$, tenga como asíntota horizontal a la recta de ecuación $y=0$ y contenga al punto $p\left(2\ ,8\right)$.

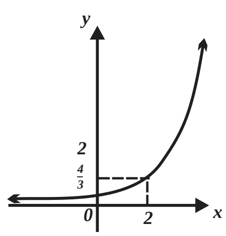
b. Interseque al eje de las ordenadas en $I_y\left(0\ ,\ 5\right)$, tenga como asíntota horizontal a la recta de ecuación $y=1$ y contenga al punto $p\left(1\ ,\ 13\right)$.

c. Tiene como asíntota horizontal la recta de ecuación $y=3$ y contiene a los puntos $I_y\left(0\ ,\ 6\right)$ y $J\left(1\ ,\ 12\right)$,

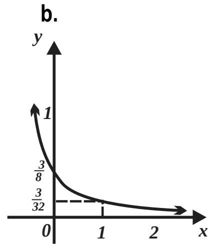
d. Tiene como asíntota horizontal la recta de ecuación $y=3$ y contiene a los puntos $I_y\left(0\ ,-6\right)$ y $J\left(1\ ,\ -12\right)$,

20. Determine la regla de correspondencia para la curva exponencial de la figura.

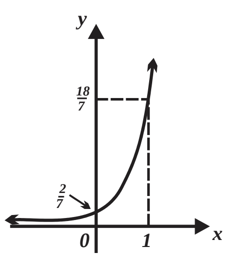
a.



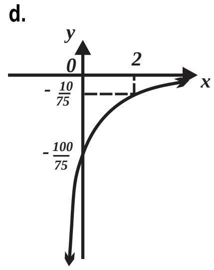
b.



c.



d.



21. Determine los pares de funciones exponenciales, que tienen asociada la misma curva.

a. $f\left(x\right)=3^{2x-4}$, $g\left(x\right)=3^{2x}+4$ y $h\left(x\right)=9^{x-2}$.

b. $f\left(x\right)=4^{3x-2}$, $g\left(x\right)=2\left(2^{3x-2}\right)$ y $h\left(x\right)=2^{3x-1}$.

22. Determine los pares de funciones exponenciales, que tienen asociada la misma curva.

a. $f\left(x\right)=27^{x+1}$, $g\left(x\right)=9^{1+x}+1$ y $h\left(x\right)=3^{3x+3}$.

b. $f\left(x\right)=2^{3x+3}$, $g\left(x\right)=2\left(2^{3x-2}\right)$ y $h\left(x\right)=8^{x+1}$.

23. Determine la regla de correspondencia y trace la curva asociada de las funciones exponenciales cuyas asignaciones a la variable x e imágenes correspondientes se encuentran en la siguiente tabla.

	a.	**b.**	**c.**	**d.**	**e.**
x	$f\left(x\right)$	$g\left(x\right)$	$h\left(x\right)$	$m\left(x\right)$	$n\left(x\right)$
-2	18	1	-48	$\frac{1}{45}$	6
-1	6	$\frac{1}{2}$	-12	$\frac{1}{15}$	3
0	2	$\frac{1}{4}$	-3	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{2}$
1	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{8}$	$-\frac{3}{4}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{3}{4}$
2	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{16}$	$-\frac{3}{64}$	$\frac{9}{5}$	$\frac{3}{8}$

24. Resuelva la ecuación.

a. $3^{x+3}=81$.

b. $4^{x-3}=64^{x+3}$.

c. $3^{x^2+1}=243$.

d. $2^{1-x^2+3x}=\frac{1}{8}$.

e. $4^{x^2+7x}=64^{x-1}$.

f. $2^{2x-1}=8$.

g. $2^{1-x^2}=\frac{1}{8}$.

h. $4^{x+1}+2^{x+3}=320$.

i. $2^{x+1}+2^{x}+2^{x-1}=28$.

25. Identifique si la función es una función de crecimiento o una función de decaimiento exponencial y determine: el valor inicial, y la constante de crecimiento o decrecimiento.

a. $f\left(x\right)=3\cdot 2^{-x}$.

b. $g\left(x\right)=\frac{1}{2}\cdot 0.9^{-x}$.

c. $h\left(x\right)=5\cdot 4^{-2x}$.

d. $a\left(x\right)=4\left(\frac{2}{7}\right)^{4x}$.

e. $g\left(x\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}\right)^{-2x}$.

f. $f\left(x\right)=3\left(\frac{3}{8}\right)^{\frac{1}{5}x}$.

g. $m\left(x\right)=6\left(\frac{4}{5}\right)^{-x}$.

h. $f\left(x\right)=2\left(1.4\right)^{x}$.

26. Determine la regla de correspondencia de la función exponencial que satisface las condiciones indicadas.

a. Valor inicial 3, constante de decrecimiento 3 y base 0.2.

b. Valor inicial $\frac{3}{7}$, constante de crecimiento 0.2 y base 3.

c. Valor inicial 6, constante de crecimiento 4 y base 7.

d. Valor inicial $\frac{5}{3}$, constante de decrecimiento y base 0.5.

27. Determine la regla de correspondencia de la función exponencial que satisface las condiciones indicadas.

a. Valor inicial 3, creciente a una taza del 3% por periodo de tiempo.

b. Valor inicial 7, creciente a una taza del 0.15% por periodo de tiempo.

c. Valor inicial 10, decreciente a una taza del 12% por periodo de tiempo.

d. Valor inicial 7, decreciente a una taza del 8% por periodo de tiempo.

e. Valor inicial 2, creciente a una taza del 22% por periodo de tiempo.

f. Valor inicial 25, creciente a una taza del 2.05% por periodo de tiempo.

28. Si dentro de t años la población de cierta región será de $p\left(t\right)=50e^{0.02\cdot t}$ millones.

a. ¿Cuál es la población actual?

b. ¿Cuál será la población dentro de 20 años?

29. En 1985 el gobierno del Estado de Chihuahua implementó un programa para la protección del borrego cimarrón, con el cual se pretendió incrementar la población de estos animales, de acuerdo a la relación $N\left(t\right)=200\left(1.3\right)^{t}$. Donde $N\left(t\right)$ es el número de borregos cimarrones después de t años, 200 era el número de estos animales en 1985 y t es el tiempo transcurrido en años. Estime el número de borregos cimarrones en el año:

a. 2000.

b. 2010.

c. 2013.

d. 2017.

e. 2022.

30. Se estima que la población de un país ha crecido exponencialmente. Si tenía una población de 60 millones en el año 2000 y de 90 millones en 2010, ¿cuál será la población en el año 2015?

31. El número de hamburguesas vendido por una cadena de comida rápida crece exponencialmente. Si se vendieron 4 millones en 2008 y 9 millones en 2014, ¿cuántas hamburguesas se vendieron en 2010?

32. Suponiendo que el crecimiento de las bacterias es exponencial y que el número de bacterias t horas después de las $7:00$ está dado por la relación $n(t)=600(3)^{\frac{1}{2}t}$.
a. Calcule el número de bacterias a las $8:00\ A.M.$, a las $10:00\ A.M.$ y a las $12:00\ A.M.$
b. Trace la gráfica desde $t=0$ hasta $t=5$.

33. En 1975 la población mundial era de alrededor de 4000 millones de personas y esta población aumentaba alrededor del 2% anual. Suponiendo que el incremento de la población obedece a la relación $P(t)=4(1.02)^t$, en la que P representa el número de personas en miles de millones, t los años después de 1975.
a. ¿Cuál será la población en los años, 2024 y 2050?
b. Investiga la población actual del planeta y compara ese dato con el obtenido en el problema.

34. El isótopo radiactivo ^{210}Bi tiene una vida media de 5 días. Si existen 100 miligramos de esta sustancia en el instante $t=0$ entonces la cantidad restante en el instante t está dado por $f(t)=100(2)^{-\frac{1}{5}t}$.
a. ¿Qué cantidad de sustancia resta después de 5 días?
b. ¿Después de 10 días?
c. ¿Después de 20.5 días?
d. Trace la gráfica de f desde $t=0$ hasta $t=30$.

35. Cierta sustancia radioactiva tiene una vida media de 90 minutos.
a. ¿Qué parte de la cantidad inicial de sustancia quedará después de 2 horas?
b. ¿Después de 3 horas?

36. Si 25 gramos de azúcar se añaden a cierta cantidad de agua, la cantidad de azúcar $Q(t)$ que no se disuelve después de t minutos está dada por $Q(t)=25(0.8)^t$. Trace una gráfica que muestre $Q(t)$ en cualquier momento desde $t=0$ hasta $t=30$.

37. El precio de un automóvil nuevo es de $\$\ 330000.00$. Su valor comercial después de t años de uso se calcula por la relación $v(t)=0.78C(0.85)^{t-1}$ donde C es el precio del auto nuevo. Calcule el precio, redondeando a miles de pesos el valor, después de:
a. 1 año.
b. 5 años.
c. 10 años.
d. 12.5 años.
e. 16 años.

38. Suponga que el porcentaje de inflación es de 9% anual y que la relación $P(t)=P_0(1.09)^t$ nos da el precio de un artículo que actualmente cuesta P_0 después de t años. Encuentre el precio esperado para cada uno de los artículos indicados después del periodo señalado.
a. Un kilogramo de café de $\$65.00$ después de 3 años.
b. Una lata de chiles de $\$7.50$ en 5 años.
c. Un frasco de mermelada de $\$20.50$ a los 10 años.
d. Un comedor de $\$\ 75000.00$ en 2 años.
e. Un motor de $\$6300.00$ después de 6 años.

39. Se invierten $\$1000\ 000.00$ a una tasa de interés anual del 8%, calcular el saldo si el interés se capitaliza:
a. Anualmente.
b. Mensualmente.
c. Trimestralmente.
d. Continuamente.

AUTOEVALUACIÓN

1. Escriba las características de la función exponencial $f(x)=a^{kx}$.

2. Explique el efecto que sufre la curva asociada a la función exponencial $f(x)=a^x$ si se transforma en $g(x)=Aa^{kx-c}+d$.

3. Determina la regla de correspondencia de la función exponencial que satisface las condiciones: valor inicial 10, constante de crecimiento 0.5.

4. Determine el conjunto imagen de la función exponencial $f(x)=-3\left(4^{2x-1}+1\right)$.

5. Trace la curva asociada a la función exponencial $f(x)=\frac{1}{6}2^{2x-1}-2$, también determina el dominio, el conjunto imagen y la ecuación de la asíntota.

6. Resuelva la ecuación $\left(\frac{1}{100}\right)^{4-2x}=1000$.

7. Resuelva la ecuación $4^{x^2+2x}=2^{x^2+5}$.

8. Determine la regla de correspondencia de una función exponencial tal que $f(2)=\frac{9}{5}$ y $f(5)=\frac{243}{5}$.

9. Una máquina transforma una cantidad específica de materia de forma que esta se reduce a la quinta parte cada hora, determine la función que describe la cantidad de materia disponible después de t horas.

10. ¿Cuánto tiempo debe transcurrir para que se duplique un capital de 5000 pesos si se invierte al 18% de interés compuesto anual?

3.2 FUNCIONES LOGARÍTMICAS

APRENDIZAJES

6. Verificará mediante gráficas o tablas que la función logarítmica es la función inversa de la exponencial. Expresa verbalmente las relaciones: $y(x)=a^x \Leftrightarrow x(y)=log_a y$.

7. Graficará funciones logarítmicas e identificará su dominio y rango.

8. Operará con logaritmos de distintas bases y aplicará las propiedades de éstos.

9. Resolverá problemas en diferentes contextos que se modelen con funciones logarítmicas y exponenciales.

10. Resolverá problemas de aplicación empleando los conocimientos adquiridos anteriormente.

La ecuación $a^x = y_0$, en la que x representa a la incógnita, se interpreta como el exponente al que debe elevarse el número a para obtener el número y_0, relacionando este hecho con las funciones, parte de nuestro propósito consiste en construir una función que "opere en forma inversa a la función exponencial", es decir construir una función cuyo conjunto imagen consista en los valores de los exponentes a los que se debe elevar la base para obtener un número específico.

EJEMPLO 3.19 (Construyendo una función)

a. Si $3^{y_0} = 1$, entonces " $y_0 = 0$ es el número al que se debe elevar el número 3 para obtener 1, luego 0 pertenece al conjunto imagen de la función.

b. Si $3^{y_0} = 9$, entonces $y_0 = 2$ es el número al que se debe elevar el número 3 para obtener 9, luego 2 pertenece al conjunto imagen de la función.

c. Si $3^{y_0} = 81$, entonces $y_0 = 4$ es el número al que se debe elevar el número 3 para obtener 81, luego 4 pertenece al conjunto imagen de la función.

d. Si $3^{y_0} = \frac{1}{9}$, entonces $y_0 = -2$ es el número al que se debe elevar el número 3 para obtener $\frac{1}{9}$, luego -2 pertenece al conjunto imagen de la función.

e. Si $3^{y_0} = x_0$, entonces y_0 es el número que se obtiene al elevar el número 3 para obtener x_0, luego x_0 pertenece al conjunto imagen de la función.

□

Generalizamos las observaciones del *ejemplo 3.19* como sigue:

Sí $a^{x_0} = y_0$, entonces x_0 es el número al que ha de "elevarse" la base " a " para "obtener" el número y_0. La notación formal para referirse a este hecho es $log_a y_0 = x_0$, por tanto consideraremos que la expresión $log_a y_0 = x_0$ es equivalente a $a^{x_0} = y_0$. Refiriéndonos a funciones, si $y(x)=a^x$ (siempre que $a>0$ y $a \neq 1$), es equivalente a $x=log_a y(x)$ (siempre que $a>0$ y $a \neq 1$). Así $y=a^x \Leftrightarrow x=log_a y$.

ⓘ

a. La forma $y=a^x$, se refiere a que el número y es el resultado de elevar el número a al exponente x.

b. La forma $x=log_a y$, indica que x es el exponente al que se ha de elevar el número a para obtener y.

La función $f(x)=log_a x$ se denomina función logaritmo de base a y más adelante la definiremos formalmente.

EJEMPLO 3.20 (Tránsito entre las formas $y=a^x$ y $x=log_a y$)

a. Puesto que $3^4 = 81$, entonces $4=log_3 81$ y viceversa, si $log_3 81=4$, entonces $3^4 = 81$.

b. Puesto que $5^3 = 125$, entonces $3=log_5 125$ y viceversa, si $log_5 125=3$, entonces $5^3 = 125$.

c. Puesto que $10^{-2}=\frac{1}{100}$, entonces $-2=log_{10}\frac{1}{100}$ y viceversa, si $log_{10}\frac{1}{100}=-2$, entonces $10^{-2}=\frac{1}{100}$.

d. Puesto que $\left(\frac{1}{4}\right)^{-2}=16$, entonces $-2=log_{\frac{1}{4}}16$ y viceversa, si $log_{\frac{1}{4}}16=-2$, entonces $\left(\frac{1}{4}\right)^{-2}=16$.

e. La expresión $4^3=64$ en forma “logarítmica es $log_4 64=3$.

f. La expresión $6^2=36$ en forma “logarítmica es $log_6 36=2$.

g. La expresión $10^{-3}=\frac{1}{1000}$ en forma “logarítmica es $log_{10}\frac{1}{1000}=-3$.

□

EJEMPLO 3.21 (Contenido de impurezas)

a. Suponga que una sustancia S puede utilizarse como medicamento, donde es posible eliminar sus impurezas, al filtrarse varias veces. Los filtros se encuentran en tubos y cada tubo elimina el 90% de las impurezas de la sustancia que entran a él (cada tubo permite que el 10% de las impurezas pasen a través de él). Para la sustancia S, si I_0 es la cantidad inicial de impurezas, e $I(x)$ es el contenido de impurezas que queda después de haberla hecho pasar por x tubos, entonces:

$I(0)=I_0$, representa el contenido inicial de impurezas.

$I(1)=(0.1)I_0$, representa el contenido de impurezas de la sustancia cuando ha pasado por un tubo.

$I(2)=(0.1)(0.1)I_0=(0.1)^2 I_0$, representa el contenido de impurezas de la sustancia cuando ha pasado por dos tubos.

$I(3)=(0.1)(0.1)(0.1)I_0=(0.1)^3 I_0$, representa el contenido de impurezas de la sustancia cuando ha pasado por tres tubos.

En general, $I(x)=(0.1)^x I_0$, representa el contenido de impurezas de la sustancia cuando esta ha pasado por x tubos. La *tabla 3.10* resume esta información

Número de tubo x	Contenido de impurezas $I(x)$
0	I_0
1	$(0.1)^1 I_0$
2	$(0.1)^2 I_0$
3	$(0.1)^3 I_0$
$\vdots$	$\vdots$
x	$(0.1)^x I_0$

TABLA 3.10

b. Cambiemos el punto de vista de la situación anterior y preguntemos por el número de tubos por los que ha sido filtrada la sustancia S cuando se ha detectado que posee un contenido específico de impurezas.

Si el contenido de impurezas en la sustancia es I_0, evidentemente la sustancia ha pasado por 0 tubos.

Si el contenido de impurezas en la sustancia es $(0.1)^1 I_0$, la sustancia ha pasado por un tubo.

Si el contenido de impurezas en la sustancia es $(0.1)^2 I_0$, la sustancia ha pasado por 2 tubos.

Si el contenido de impurezas en la sustancia es $(0.1)^3 I_0$, la sustancia ha pasado por 3 tubos.

Si el contenido de impurezas en la sustancia es $(0.1)^x I_0$, evidentemente la sustancia ha pasado por n tubos. La *tabla 3.11* resume esta información.

CONTENIDO DE IMPUREZAS	TUBOS UTILIZADOS
I_0	0
$(0.1)^1 I_0$	1
$(0.1)^2 I_0$	2
$(0.1)^3 I_0$	3
$\vdots$	$\vdots$
$(0.1)^x I_0$	x

TABLA 3.11

Respecto al problema antes descrito, podemos representar como I^{-1} al número de tubos por los que ha sido filtrada la sustancia, cuando en ella se ha detectado un contenido específico de impurezas.

Las dos funciones I y I^{-1} contienen la misma información pero la presenta de manera distinta, por ejemplo, el hecho de que al utilizar tres tubos la sustancia contenga $(0.1)^3 I_0$ impurezas puede escribirse en las formas $I(3)=(0.1)^3 I_0$ o en forma equivalente, $I^{-1}\left((0.1)^3 I_0\right)=3$.

□

Antes de continuar con la construcción de nuestra función haremos referencia al concepto y formalizaremos la definición de “función inversa”.

Cuando con el dominio y el conjunto imagen de la función f, podamos construir una nueva función (que representaremos por f^{-1}) de forma que su dominio sea el conjunto imagen de f y el conjunto imagen de f sea el dominio de f, le llamaremos función inversa de f, en la *figura 3.18* presentamos un esquema de lo antes dicho.

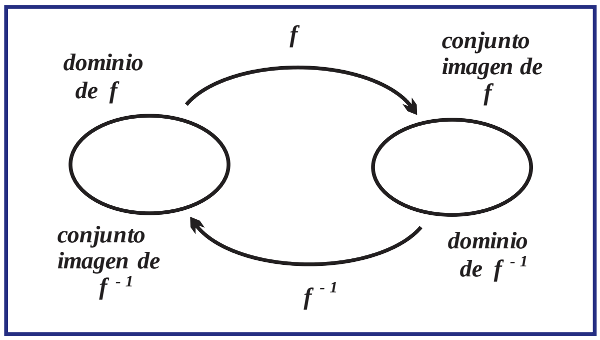


FIGURA 3.18

En resumen, cuando sea posible construir la función f^{-1} a partir de la función f mediante el proceso antes descrito, se dice que f es invertible y su inversa es f^{-1}, y viceversa, que f^{-1} es invertible y su inversa es f.

$$f : dom\,(f) \longrightarrow img\,(f) \qquad f^{-1} : img\,(f) \longrightarrow dom\,(f)$$

FIGURA 3.19

PARA REFLEXIONAR

¿Por qué una función constante no es invertible?

No todas las funciones tienen inversa (esto se estudiará posteriormente), pero cuando existe la función inversa se establece de acuerdo a la *definición 3.4.*

Definición 3.4 (FUNCIÓN INVERSA)

a. Si f y g son funciones tales que:
$f(g(x))=x$ para toda x en el dominio de g y $g(f(x))=x$ para toda x en el dominio de f, entonces se denominan invertibles.
b. La función g es la inversa de la función f y se representa por f^{-1}.
c. La función f es la inversa de la función g y se representa por g^{-1}.

No todas las funciones son invertibles, para que una función *(continua) lo* sea, es necesario que, sobre su dominio, *sea estrictamente creciente* (esto significa que, si incrementamos el valor de las asignaciones a la variable independiente se incrementan las imágenes correspondientes) o sea *estrictamente decreciente* (esto significa que, si incrementamos el valor de las asignaciones a la variable independiente disminuyen los valores de las imágenes correspondientes). En particular, la función $y(x)=a^x$ siempre que $a>1$ y $a\neq 1$, es creciente (decreciente si $0<a<1$) y como consecuencia es invertible. La función exponencial cumple con las condiciones ante señaladas, por tanto es invertible y con la *definición 3.5* definimos formalmente su función inversa.

Definición 3.5 (FUNCIÓN LOGARITMO DE BASE ***a***)

a. Sean $x>0$, $a>0$ y $a\neq 1$, entonces $f(x)=log_a x$ sí y sólo sí $x=a^{f(x)}$.
b. La función $f(x)=log_a x$ se denomina función logaritmo de base a.
c. $f(x)=log_a x$ se lee "logaritmo base a de x" y es la función inversa de $f(x)=a^x$.

PARA REFLEXIONAR

¿? ¿Por qué en la *definición 3.5* es necesario que $x>0$?

La *figura 3.20* ilustra la relación entre las funciones $f(x)=log_a x$ y $f(x)=a^x$.

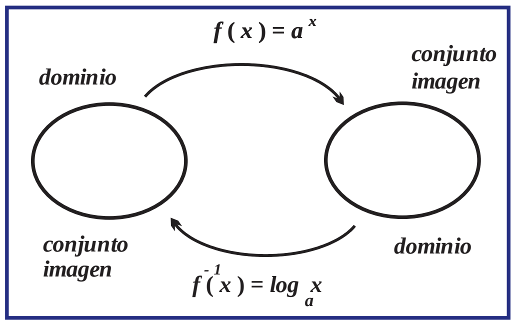


FIGURA 3.20

La expresión $y=log_a x$ se interpreta como: "y es el exponente al que ha de elevarse el número a para obtener el número x, es decir $x=a^y$"

EJEMPLO 3.21 (Funciones exponenciales e inversas)

a. Si $f(x)=2^x$, entonces $f^{-1}(x)=log_2 x$, $dom\left(log_2 x\right)=(0,+\infty)$ e $img\left(log_2 x\right)=(-\infty,+\infty)$.

b. Si $f(x)=8^x$, entonces $f^{-1}(x)=log_8 x$, $dom\left(log_8 x\right)=(0,+\infty)$ e $img\left(log_8 x\right)=(-\infty,+\infty)$.

c. Si $f(x)=\left(\frac{2}{5}\right)^x$, entonces $f^{-1}(x)=log_{\frac{2}{5}} x$, $dom\left(log_{\frac{2}{5}} x\right)=(0,+\infty)$ e $img\left(log_{\frac{2}{5}} x\right)=(-\infty,+\infty)$.

d. Si $f(x)=e^x$, entonces $f^{-1}(x)=log_e x$, $dom\left(log_e x\right)=(0,+\infty)$ e $img\left(log_e x\right)=(-\infty,+\infty)$.

e. Si $f(x)=4^{-x}$, entonces $f^{-1}(x)=log_{\frac{1}{4}}(x)$, $dom\left(log_{\frac{1}{4}} x\right)=(-\infty,0)$ e $img\left(log_{\frac{1}{4}} x\right)=(-\infty,+\infty)$.

□

Dada la relación existente entre una función y su función inversa, ***¿existe una relación entre sus curvas?***, la respuesta es sí. Utilizando la curva asociada a la función f (bajo la suposición de que es invertible), es posible trazar la curva de f^{-1}.
Si el punto (a,b) pertenece a la curva asociada a f, entonces el punto (b,a) pertenece a la curva asociada a f^{-1}.

PARA REFLEXIONAR

¿? ¿Por qué es correcta esta última afirmación?

La *figura 3.21* muestra que el punto (b,a) es la "reflexión" del punto (a,b) respecto a la línea recta de ecuación $i(x)=x$. Generalizando esta observación, se sigue que la curva asociada a la función f^{-1} es el reflejo de la curva de f respecto a la recta de ecuación $i(x)=x$, recíprocamente, la curva asociada a f es el reflejo de la curva asociada a f^{-1} respecto a la recta $i(x)=x$.

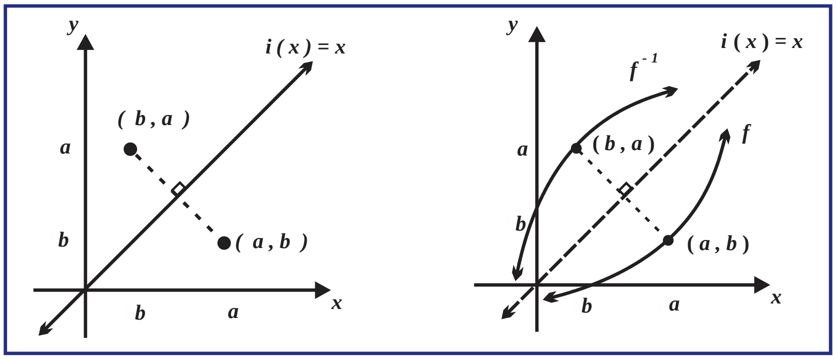


FIGURA 3.21

Dado que las funciones $f(x)=log_a x$ y $g(x)=a^x$ son funciones inversas entre sí, las propiedades mostradas en la *tabla 3.12* se justifican a partir de las propiedades de la función $g(x)=a^x$ tratadas en la sección anterior.

FUNCIÓN	$g(x)=a^x$	$f(x)=log_a x$
Dominio	$(-\infty\ ,\ +\infty)$	$(0\ ,\ +\infty)$
Conjunto imagen (o rango)	$(0\ ,\ +\infty)$	$(-\infty\ ,\ +\infty)$
Asíntotas	el eje x	el eje y
Intersecciones con los ejes coordenados	$I_y(0\ ,\ 1)$	$I_x(1\ ,\ 0)$
Creciente	$a>1$	$a>1$
Decreciente	$0<a<1$	$0<a<1$
Curva	suave y continua	suave y continua

TABLA 3.12

Las propiedades señaladas en la *tabla 3.12* y el hecho de que su función inversa es $g(x)=a^x$ garantizan que el comportamiento de la curva asociada a la función $f(x)=log_a x$, será una curva continua como lo muestra la *figura 3.22*.

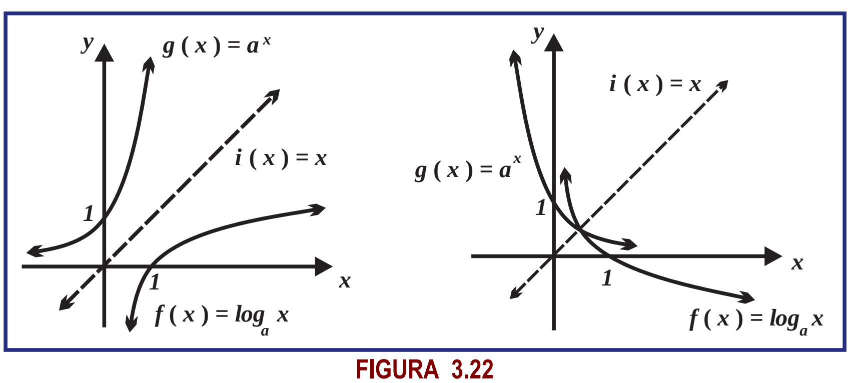


FIGURA 3.22

EJEMPLO 3.22 (Trazo de gráficas de funciones logarítmicas)

a. Para trazar la curva asociada a $f(x)=log_2 x$ reflejamos la curva asociada a $g(x)=2^x$ respecto a la recta de ecuación $i(x)=x$, vea la *figura 3.23*.

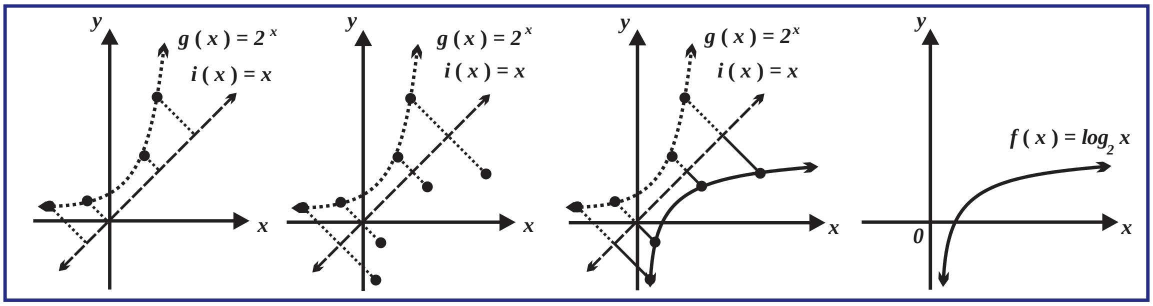


FIGURA 3.23

b. Para trazar la curva asociada a $f(x)=\log_4 x$ reflejamos la curva asociada a $g(x)=4^x$ respecto a la recta de ecuación $i(x)=x$, vea la *figura 3.24*.

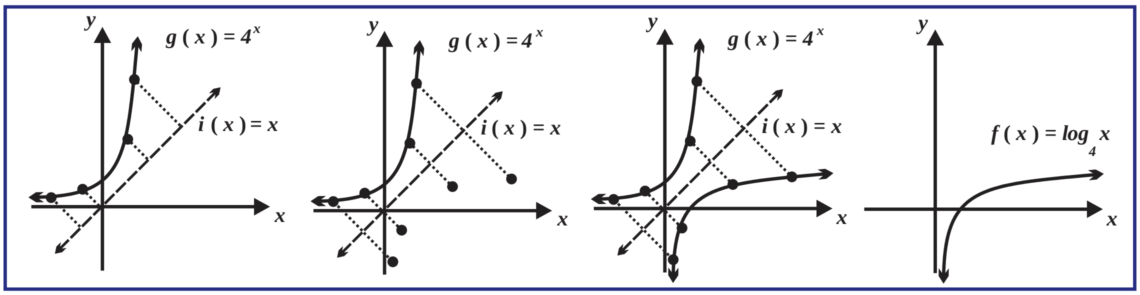


FIGURA 3.24

c. Para trazar la curva asociada a $f(x)=\log_{\frac{1}{2}} x$ reflejamos la curva asociada a $g(x)=2^{-x}$ respecto a la recta de ecuación $i(x)=x$, vea la *figura 3.25*.

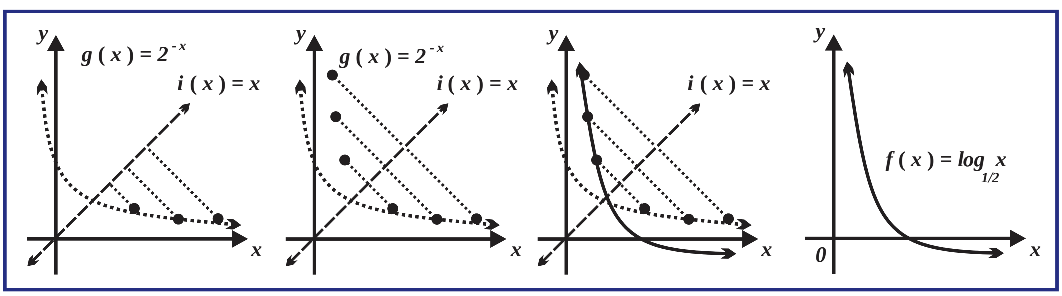


FIGURA 3.25

d. Para trazar la curva asociada a $f(x)=\log_{\frac{1}{4}} x$ reflejamos la curva asociada a $g(x)=4^{-x}$ respecto a la recta de ecuación $i(x)=x$, vea la *figura 3.26*.

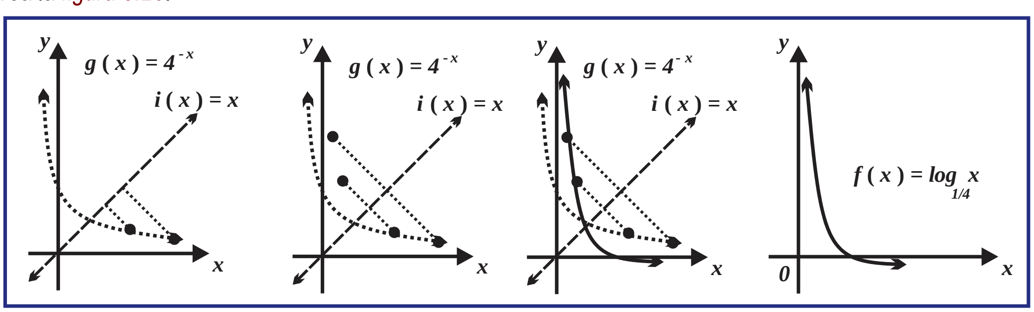


FIGURA 3.26

USO DE SOFTWARE DE MATEMÁTICAS

Trace las curvas asociadas a funciones logarítmicas de los incisos *a., b., c. y d.*, y compárelas con las mostradas en este ejemplo.

□

Las dos funciones logarítmicas que presentan mayor utilidad en matemáticas son la de base e y la de base 10, por tanto reciben un nombre especial.

Definición 3.6 (FUNCIÓN LOGARITMO NATURAL Y FUNCIÓN LOGARITMO)

a. Si $a=e$ en $f(x)=log_a x$, entonces la función $f(x)=log_e x=ln\,x$ se denomina "función logaritmo natural".
b. Si $a=10$ en $f(x)=log_a x$, entonces la función $f(x)=log_{10} x=log\,x$ se denomina "función logaritmo".

La *figura 3.27* muestra la curva asociada a las funciones $f(x)=ln\,x$ y $f(x)=log_{10} x$.

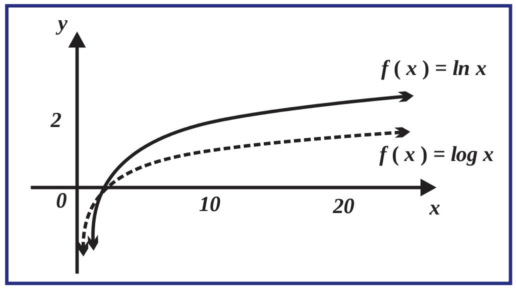


FIGURA 3.27

PROPIEDADES DE LOS LOGARITMOS

Los logaritmos (que también podemos interpretarlos como imágenes de números no negativos bajo la función $g(x)=log_a x$), independientemente de la base elegida, cumplen una serie de propiedades que son útiles (entre otras cosas) para simplificar operaciones aritméticas, en particular, utilizando logaritmos es posible rescribir productos como sumas, potencias como productos, raíces como productos, etc. Ahora deduciremos las propiedades más comunes, asignemos a la variable x de la función $y=log_a x$ dos valores específicos, digamos m y n (evidentemente m y n son números reales no negativos ¿por qué?) y denotemos por y y z las imágenes correspondientes, es decir:

$y=log_a m$ y $z=log_a n$. Estas dos últimas expresiones son equivalentes (respectivamente) a $a^y=m$ y $a^z=n$.

i. Su producto es $a^y.a^z=m\cdot n$, es decir $m\cdot n=a^{y+z}$, expresión que en forma logarítmica equivale a $log_a(m\cdot n)=y+z$.

De $y=log_a m$, $z=log_a n$ y $log_a(m\cdot n)=y+z$ obtenemos $log_a(m\cdot n)=log_a(m)+log_a(n)$.

ii. Su cociente es $\frac{a^y}{a^z}=\frac{m}{n}$, es decir $a^{y-z}=\frac{m}{n}$, expresión que en forma logarítmica equivale a $y-z=log_a\left(\frac{m}{n}\right)$.

De $y=log_a m$, $z=log_a n$ y $log_a\left(\frac{m}{n}\right)=y-z$ obtenemos $log_a\left(\frac{m}{n}\right)=log_a(m)-log_a(n)$.

iii. Si en $log_a(mn)=log_a(m)+log_a(n)$ se cumple que $m=n$, entonces $log_a(m\cdot m)=log_a(m)+log_a(m)$ ó $log_a(m^2)=2log_a(m)$, si repetimos n veces éste proceso obtenemos $log_a(m^n)=nlog_a(m)$ (en caso de que n sea un número real, la justificación requiere de otro tipo de conocimientos).

iv. Por otro lado, puesto que $a^0=1$ $(a\neq 0)$, entonces $log_a(1)=0$.

Las cuatro observaciones previas son generalizadas y formalizadas en la siguiente propiedad.

TEOREMA 3.2 (PROPIEDADES OPERATIVAS DE LOS LOGARITMOS)

Si $m\neq 0$ y $n\neq 0$ son números positivos y $a\neq 1$ también es un número positivo, entonces:

a. $log_a(mn)=log_a(m)+log_a(n)$ (propiedad del producto).

b. $log_a\left(\frac{m}{n}\right)=log_a(m)-log_a(n)$ (propiedad de la división).

c. $log_a(m^n)=n\,log_a(m)$ (propiedad de la potencia).

d. $log_a(1)=0$.

Con las propiedades señaladas en el *teorema 3.2* es posible transformar productos en sumas, divisiones en restas y exponentes en productos. Los *ejemplos 3.23 y 3.24* muestran la forma de uso de las propiedades de los logaritmos.

EJEMPLO 3.23 (Uso de las propiedades de los logaritmos)

a. Para rescribir $log_8\left(10x^3y^2\right)$ sin exponentes:

$$log_8\left(10x^3y^2\right)=log_8(10)+log_8\left(x^3\right)+log_8\left(y^2\right) \quad \text{propiedad del producto.}$$
$$=log_8(10)+3\,log_8\,x+2\,log_8\,y \quad \text{propiedad de la potencia.}$$

b. Para rescribir $log_3\left(\frac{(x-y)^2(x+2)^3}{\sqrt{2x+1}}\right)$ sin exponentes:

$$log_3\left(\frac{(x-y)^2(x+2)^3}{\sqrt{2x+1}}\right)=log_3\left((x-y)^2(x+2)^3\right)-log_3\left(\sqrt{2x+1}\right) \quad \text{propiedad de la división.}$$
$$=log_3(x-y)^2+log_3(x+2)^3-log_3\left(\sqrt{2x+1}\right) \quad \text{propiedad del producto.}$$
$$=2\,log_3(x-y)+3\,log_3(x+2)-\frac{1}{2}log_3(2x+1) \quad \text{propiedad de la potencia.}$$

c. Para rescribir $ln\left(\frac{\sqrt[3]{x^2-5x}}{x\sqrt{(2x-y)}}\right)$ sin exponentes:

$$ln\left(\frac{\sqrt[3]{x^2-5x}}{x\sqrt{(2x-y)}}\right)=ln\left(\sqrt[3]{x^2-5x}\right)-ln\left(x\sqrt{(2x-y)}\right) \quad \text{propiedad de la división.}$$
$$=ln\left(\sqrt[3]{x^2-5x}\right)-ln(x)-ln\left(\sqrt{(2x-y)}\right) \quad \text{propiedad del producto.}$$
$$=\frac{1}{3}ln\left(x^2-5x\right)-ln(x)-\frac{1}{2}ln(2x-y) \quad \text{propiedad de la potencia.}$$

□

EJEMPLO 3.25 (Uso de las propiedades de los logaritmos)

a. Utilizando las *propiedades b. y c.* (en ese orden), en $y=log_4\,64x^6$ obtenemos

$$y=log_4\,64x^6=log_4\,x^6+log_4\,64=6\,log_4\,x+3.$$

b. Al aplicar las *propiedades b. y c.* en $y=log_8\frac{x^{10}}{64}$ obtenemos $y=log_8\frac{x^{10}}{64}=log_8\,x^{10}-log_8\,64=10\,log_8\,x-2$.

c. Aplicando las *propiedades c. y d.* en $y=ln\frac{x^3}{e^2}$ obtenemos $y=ln\frac{x^3}{e^2}=ln\,x^3-ln\,e^2=3\,ln\,x-2$.

□

También es posible simplificar expresiones que incluyen logaritmos, de la misma base, en todos sus términos.

EJEMPLO 3.26 (Agrupando con logaritmos)

a. $\frac{1}{4}log_3(x)+5log_3(x-2)=log_3(x)^{\frac{1}{4}}+log_3(x-2)^5=log_3\left[(x)^{\frac{1}{4}}(x-2)^5\right]$, propiedades: potencia y producto.

b. $8ln(x+4)-4ln(x+8)=ln(x+4)^8-ln(x+8)^4=ln\frac{(x+4)^8}{(x+8)^4}$, propiedades: potencia y división.

c. $\frac{1}{5}\left[log_6(x+4)-log_6(x+2)\right]=\frac{1}{5}\left[log_6\frac{(x+4)}{(x+2)}\right]=log_6\sqrt[5]{\frac{(x+4)}{(x+2)}}$, propiedades: división y potencia.

□

CAMBIO DE BASE LOGARÍTMICO

Dos funciones logarítmicas con distinta base están relacionadas, es posible expresar una de ellas en términos de la otra, es decir, en una base distinta, así, la función $f(x)=log_a\,x$ (en base a) puede escribirse en términos de una función logarítmica $g(x)=log_b\,x$ (en base b), veamos cómo.

Recordemos que $x = a^y$ si y sólo si $y = log_a\, x$, ahora apliquemos $log_b\, x$ a la ecuación $x = a^y$, obtenemos $log_b x = log_b\left(a^y\right)$, por tanto: $log_b x = y \cdot log_b a$ de donde $y = \frac{log_b x}{log_b a}$, considerando que $y = log_a\, x$, obtenemos $y = log_a x = \frac{log_b x}{log_b a}$. La relación $log_a x = \frac{log_b x}{log_b a}$ se conoce como expresión del cambio de base.

TEOREMA 3.3 (CAMBIO DE BASE LOGARITMICO)

Si $f(x) = log_a\, x$, $g(x) = log_b\, x$ *y* x *es un número positivo, entonces* $f(x) = log_a x = \frac{1}{log_b a} log_b x$.

El *teorema 3.3* establece el método a seguir (y las condiciones que deben cumplirse) para transformar la función logarítmica $f(x) = log_a\, x$ (cuya base es a) en otra función logarítmica $h(x) = log_b\, x$ (cuya base es b).

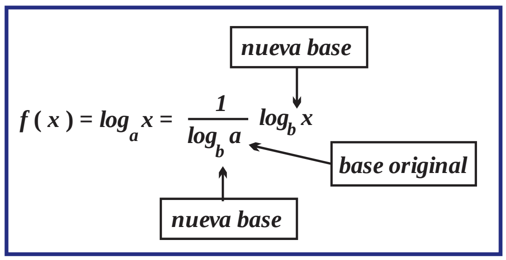


FIGURA 3.28

EJEMPLO 3.27 (Cambio de base)

a. Para rescribir $f(x) = log_4\, x$ en base 2, se toma en cuenta que $a = 4$ y $b = 2$, por tanto $log_4 x = \frac{log_2 x}{log_2 4} = \frac{1}{2} log_2 x$, de donde $f(x) = log_4\, x = \frac{1}{2} log_2\, x$ en base 2 es $f(x) = \frac{1}{2} log_2\, x$.

b. Para rescribir $f(x) = log_{81}\, x$, en base 3, se toma en cuenta que $a = 81$ y $b = 3$, por consiguiente $log_{81} x = \frac{log_3 x}{log_3 81} = \frac{1}{4} log_3 x$, en consecuencia $f(x) = log_{81}\, x = \frac{1}{4} log_3\, x$.

c. Para rescribir $f(x) = log_{10}\, x$ en base e, se toma en cuenta que $a = 10$ y $b = e$, por tanto $log_{10} x = \frac{log_e x}{log_e 10}$, de donde $f(x) = log_{10} x = \frac{1}{log_e 10} log_e\, x$.

d. Para rescribir $f(x) = log_2\, 8x$ en base 4, puesto que $y = log_2\, 8x = log_2\, x + log_2\, 8 = log_2\, x + 3$, entonces

$$f(x) = log_2\, 8x = log_2\, x + 3 = \frac{log_4 x}{log_4 2} + 3 = \frac{1}{\sqrt{2}} log_4 x + 3 \text{, en resumen } f(x) = log_2\, 8x = \frac{1}{\sqrt{2}} log_4 x + 3.$$

e. Para rescribir $f(x) = log_4\, 4x$ en base e, puesto que $f(x) = log_4\, 4x = log_4\, x + log_4\, 4 = log_4\, x + 1$, entonces

$$f(x) = log_4\, 4x = log_4\, x + 1 = \frac{log_e\, x}{log_e\, 4} + 1 = \frac{1}{log_e\, 4} log_e\, x + 1 = \frac{1}{ln\, 4} ln\, x + 1 \text{, de donde } f(x) = log_4 4x = \frac{1}{ln\, 4} ln\, x + 1.$$

□

NOTA

¿Por qué es importante cambiar la base de una función logarítmica?
Regularmente, con las "calculadoras científicas" no es posible calcular logaritmos en cualquier base, sin embargo, utilizando el *teorema 3.3* es posible cubrir ésta deficiencia.

En el *ejemplo 3.28* transformamos logaritmos a base natural y luego con una calculadora se determina el valor correspondiente.

EJEMPLO 3.28 (Uso del cambio de base logarítmico)

a. Para calcular $log_2 25$, primero lo expresamos en otra base, por ejemplo en la base e, por tanto

$$log_2 25 = \frac{ln\ 25}{ln\ 2} = \frac{3.218875825}{0.6931471806} = 4.64385619\ .$$

b. Para calcular $log_5 18.5$, primero lo expresamos en otra base, por ejemplo en la base e, por tanto

$$log_5 18.5 = \frac{ln\ 18.5}{ln\ 5} = \frac{2.917770732}{1.609437912} = 1.812912887\ .$$

c. Para calcular $log_{\frac{1}{2}} 41$, primero lo expresamos en otra base, por ejemplo en la base e, por tanto

$$log_{\frac{1}{2}} 41 = \frac{ln\ 41}{ln\ \frac{1}{2}} = \frac{3.713572067}{-0.6931471806} = -5.357552005\ .$$

d. Para calcular $log_2 25$, primero lo expresamos en otra base, por ejemplo en la base e, por tanto

$$log_{\frac{6}{5}} 327.2 = \frac{ln\ 327.2}{ln\ \frac{6}{5}} = \frac{5.790571605}{0.1823215568} = 31.76021369\ .$$

e. Para calcular $log_{\frac{1}{3}} 200$, primero lo expresamos en otra base, por ejemplo en la base e, por tanto

$$log_{\frac{1}{3}} 200 = \frac{ln\ 200}{ln\ \frac{1}{3}} = \frac{5.298317367}{-1.098612289} = -4.822736302\ .$$

□

CAMBIO DE BASE EXPONENCIAL

Dos funciones exponenciales con distinta base están relacionadas, es decir, es posible expresar una de ellas en términos de la otra, así la función $f(x) = a^x$ (en base a) puede escribirse en términos de la función exponencial $f(x) = b^{kx}$ (en base b), veamos la forma en que se hace esto. Para rescribir la función $f(x) = a^x$ en la forma $f(x) = b^{kx}$, se requiere resolver la ecuación $\left(b^k\right)^x = a^x$, de donde obtenemos $b^k = a$ y en consecuencia $k = log_b a$, sustituyendo esta última expresión en $f(x) = b^{kx}$ obtenemos $f(x) = b^{(log_b a)x}$, es decir $a^x = b^{(log_b a)x}$.

TEOREMA 3.4 (CAMBIO DE BASE EXPONENCIAL)

Si $f(x) = a^x$, $f(x) = b^{kx}$, entonces $f(x) = a^x = b^{(log_b a)x}$.

El *teorema 3.4* establece el método a seguir (y las condiciones que deben cumplirse) para rescribir la función logarítmica $f(x) = a^x$ (cuya base es a) en otra función logarítmica $f(x) = b^{kx}$ (cuya base es b).

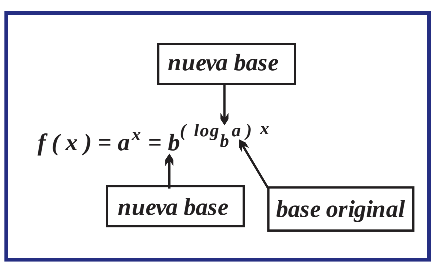


FIGURA 3.29

EJEMPLO 3.29 (Cambiando la base de funciones exponenciales)

a. Si queremos rescribir $f(x) = 4^x$ en base 2, entonces $a = 4$, $b = 2$ y $f(x) = 4^x = 2^{(log_2 4)x} = 2^{(2)x}$.

b. Si queremos rescribir $f(x) = 3^x$ en base e, entonces $a = 3$, $b = e$ y $f(x) = 3^x = e^{(log_e 3)x} = e^{(ln\ 3)x}$.

c. Si queremos rescribir $f(x) = 5^x$ en base 7, entonces $a = 5$, $b = 7$ y $f(x) = 5^x = 7^{(log_7 5)x}$.

□

¿También existen ecuaciones logarítmicas?

Las funciones $f(x)=a^x$ y $g(x)=log_a x$ son inversas entre sí, por tanto, si aplicamos una de ellas a la otra obtenemos la función identidad $i(x)=x$, esta propiedad es útil en la resolución de ecuaciones en las que la incógnita se encuentra en el exponente.

EJEMPLO 3.30 (Resolución de ecuaciones)

a. Para resolver $log_4(x-2)^3=2$, aplicamos $f(x)=4^x$ a la ecuación, esto es:

$$(x-2)^3=4^2 \text{ ó } (x-2)^3=16 \text{, entonces } x=\sqrt[3]{16}+2.$$

b. Para resolver $e^{x^2+5x}=e^{-6}$ aplicamos $f(x)=ln\,x$, esto es:

$$x^2+5x=-6 \text{ ó } x^2+5x+6=0 \text{, entonces } (x+2)(x+3)=0 \text{, entonces } x=-2 \text{ y } x=3.$$

c. Para resolver $5^{3x+1}=32$ aplicamos $f(x)=log_5 x$, esto es: $3x+1=log_5(32)$, o bien $3x+1=2$, luego $x=\frac{1}{3}$.

d. La ecuación $log_4(3x+8)-log_4 12=log_4(x-1)$, es equivalente a $log_4\frac{3x+8}{12}=log_4(x-1)$.

Aplicando $f(x)=4^x$ a la ecuación $log_4\frac{3x+8}{12}=log_4(x-1)$ se obtiene $\frac{3x+8}{12}=x-1$ ó $3x+8=12x-12$, entonces

$$20=9x \text{ y } x=\frac{20}{9}.$$

e. Para resolver la ecuación $log_2 x+log_2(x-1)=log_2 6$, la rescribimos como $log_2 x(x-1)=log_2 6$.

Aplicamos $f(x)=2^x$ y obtenemos $x(x-1)=6$, o bien $x^2-x-6=0$, entonces $(x-3)(x+2)=0$, así $x_1=3$ y $x_2=-2$, sin embargo éste último valor de x no es solución de la ecuación inicial ¿por qué?

f. Para resolver la ecuación $(67.38)(1.026)^x=100$, dividimos ambos lados de la ecuación por 67.38 y obtenemos $(1.026)^x=\frac{100}{67.38}=1.484$, aplicando logaritmos a ambos lados obtenemos $x\cdot log(1.026)=log(1.484)$, por tanto $x=\frac{log(1.484)}{log(1.026)}$, utilizando una calculadora obtenemos $x\approx 15.4$.

□

ALGUNAS APLICACIONES

¿Qué tipo de problemas se modelan utilizando funciones logarítmicas?

La descripción de las siguientes situaciones requieren del uso de las *funciones logarítmicas*, funciones que tienen una íntima relación con las funciones exponenciales y una gran importancia en el terreno de la ciencia.

EJEMPLO 3.31 (Destrucción del ozono de la atmósfera)

a. La emisión de "aerosoles" destruye el ozono de la atmósfera, suponiendo que la cantidad del ozono de la atmósfera está decayendo exponencialmente a una razón continua del 0.15% anual, para determinar en cuánto tiempo desaparecerá la mitad del ozono de la atmósfera, procedemos como sigue.

Sea M_0 la cantidad inicial de ozono en la atmósfera, entonces $M=M_0e^{-0.0015\cdot t}$, deseamos determinar t_m de manera que $M=\frac{1}{2}M_0$, por consiguiente se debe despejar t_m de $\frac{1}{2}M_0=M_0e^{-0.0015\cdot t_m}$ o equivalentemente de $\frac{1}{2}=e^{-0.0015\cdot t_m}$, al aplicar logaritmos naturales obtenemos $-0.0015t_m=ln\left(\frac{1}{2}\right)$, por tanto $t_m=\frac{1}{-0.0015}ln\left(\frac{1}{2}\right)\approx 462.98$ años.

□

EJEMPLO 3.32 (Intensidad del sonido)

Un decibel, denominado así por Alexander Graham Bell, es el incremento mínimo del volumen de un sonido detectable por el oído humano. Los físicos han demostrado que cuando ocurren dos sonidos de intensidades I_1 y I_2, la diferencia de volumen es L decibeles, donde $L=10\,log_{10}\frac{I_2}{I_1}$.

□

EJEMPLO 3.33 (Intensidad de un terremoto)

En la escala de Ritcher, la magnitud R de un terremoto de intensidad I está dada por $R(I)=\frac{ln\, I}{ln\, 10}$ ó $R(I)=log\ I$

□

EJEMPLO 3.34 (Trabajo)

El trabajo (en Joules) realizado por una muestra de un Kilogramo de gas nitrógeno cuando su volumen cambia de un valor inicial V_i a un valor final V_f durante un proceso a temperatura constante está dado por $W=8.1\times10^4 ln\frac{V_f}{V_i}$.

□

EJEMPLO 3.35 (Población de células)

En Biología, para cierta población de células, el número N de células en el instante t está dado por la relación $N(t)=N_0(2)^{\frac{t}{k}}$ donde N_0 es el número de células en $t=0$ (inicialmente) y k es una constante positiva. Por consiguiente, el tiempo que toma en tener una población N_1 de células puede ser escrito como $t=k\ log\ _2\frac{N_1}{N_2}$.

□

EJEMPLO 3.36 (Duplicación de un principal)

Para determinar el tiempo en que se duplicará un principal de $\$800$, invertido a una tasa del 10% anual capitalizable trimestralmente, debemos considerar que: duplicar un principal P de $\$800$ significa que al término de cierto tiempo se tendrá un monto de $\$1600$. Dado que $S=1600$, $P=800$, que un año contiene cuatro trimestres y que la relación entre éstas cantidades es $S_n=P\left(1+\frac{r}{n}\right)^{nt}$, se obtiene $1600=800\left(1+\frac{0.10}{4}\right)^{4t}$, o bien $1600=800(1+0.025)^{4t}$, entonces $2=(1.025)^{4t}$.

Aplicando logaritmos a ambas partes de la ecuación y despejando t obtenemos $log\, 2=4t\, log\, 1.025$ y $t=\frac{log\, 2}{4\, log\, 1.025}\cong 7$.

□

EJEMPLO 3.37 (Intensidad de un terremoto)

El 19 de septiembre de 1985 un terremoto sacudió la Ciudad de México con una intensidad de 8.1 grados en la escala de Richter. ¿Cuántas veces fue más intenso respecto a la actividad sísmica que puede medirse?

En la escala de Richter, la magnitud de un terremoto de intensidad I está dada por $R=log\ I$, donde I es el número de veces que es más intenso el sismo respecto de la actividad sísmica más pequeña que puede medirse. Luego $8.1=log\ I$ y $I=10^{8.1}=125892541.2$.

□

EJEMPLO 3.38 (Intensidad de la luz)

La intensidad de un haz de luz que se proyecta verticalmente hacia abajo y dentro del agua está dada por la función $I(x)=Ke^{-1.4x}$, en donde K representa la intensidad en la superficie. De acuerdo con lo anterior, para determinar la profundidad del cristal en la que la intensidad será la tercera parte que la intensidad en la superficie, procedemos de la siguiente forma. Si en la superficie $x=0$, entonces $I(0)=Ke^{-1.4\cdot0}$, se desea determinar el valor de x tal que $I(x)=\frac{1}{3}K$, luego $Ke^{-1.4x}=\frac{1}{3}K$ ó $e^{-1.4x}=\frac{1}{3}$. Para despejar x aplicamos a ambas partes de la ecuación $ln\, x$ y obtenemos $-1.4x=ln\frac{1}{3}$, o bien $-1.4x=ln\, 1-ln\, 3$, luego $x=\frac{-ln\ 3}{-1.4}=\frac{-1.099}{-1.4}$ y $x\approx0.78$ metros. La intensidad de la luz será $\frac{1}{3}$ de la que hay en superficie a 0.78 metros de profundidad.

□

EJEMPLO 3.39 (Densidad de población)

La densidad de población a x kilómetros de la Ciudad de México se modela por una función de la forma $P(x)=Ae^{-kx}$.

Para determinar el valor de la constante k tomando en cuenta que: la densidad de población en el centro de la Ciudad de México es de $15\,000$ personas por kilómetro cuadrado y la densidad a 10 kilómetros del centro es de 9000 personas por kilómetro cuadrado, primero simplificamos la notación utilizando como unidades "miles de personas por kilómetro cuadrado". La primera condición establece que $P(0)=15$ o equivalentemente $15=Ae^{-k\cdot 0}=A$, por tanto $P(x)=15e^{-kx}$. La segunda condición indica que $P(10)=15e^{-10k}=9$, o bien $e^{-10k}=\frac{9}{15}$. Si aplicamos la función logaritmo natural en ambas partes de la ecuación anterior obtenemos $-10k=ln\frac{3}{5}$, entonces $k=-\frac{ln\ 3/5}{10}=0.051$.

□

¿Qué conceptos aprendí?

PARA COMPLETAR

1. La función con regla de correspondencia $f(x)=a^x$ es equivalente a la función________________________ y viceversa, la función con regla de correspondencia____________________________ es equivalente a la función______________________________.

2. El dominio de la función logaritmo natural es ____.

3. La curva asociada a una a función exponencial $f(x)=a^x$ tiene como ___________________________al eje de las abscisas.

4. La ____ a una a función logarítmica es suave y contínua.

5. La función $f(x)=log_a x$ es invertible y su inversa es la función ____.

6. El número e recibe el nombre de ____________________y es la base de la función logaritmo ________________________.

7. La curva asociada a la función $f(x)=log_a x$ interseca al eje de las abscisas en el punto ___________________________.

8. El logaritmo de un producto de números positivos es igual a ____.

9. El logaritmo de un número positivo menor que uno es ____.

10. En $f(t)=Ae^{kt}$, A recibe el nombre de ___________________________________.

11. En $f(t)=Ae^{kt}$, k recibe el nombre de ___________________________________.

CIERTO O FALSO (Explique su respuesta)

1. Una función logarítmica puede tener base negativa.
2. Un número negativo posee imagen bajo una función logarítmica.
3. Todas las curvas asociadas a funciones logarítmicas intersecan al eje de las ordenadas en el punto $(0,1)$.
4. Todas las funciones logarítmicas son invertibles y su inversa es una función exponencial.
5. Todas las funciones logarítmicas son crecientes.
6. Para cualquier base a, $f(1)=log_a 1=0$.
7. Si el punto (a,b) se encuentra sobre la curva asociada a $f(x)=log_a x$, entonces el punto (b,a) pertenece a la curva asociada a $f(x)=a^x$.
8. En $f(t)=Ae^{kt}$, A recibe el nombre de valor inicial.
9. $f(t)=Ae^{kt}$ representa un modelo de crecimiento exponencial.

PROBLEMAS PROPUESTOS 3.2

1. Rescriba en la forma $x = log_a y$:

a. $y = 4^x$.

b. $y = (2x+3)^x$.

c. $y = (x-3)^{3x-2}$.

d. $y = (x^2+4)^{x+5}$

e. $x+1 = (x^2+1)^{x+2}$.

f. $2x+7 = (1-x)^{4x+2}$.

2. Rescriba en la forma $y = a^x$:

a. $x = log_6 y$.

b. $3x-2 = log_4 y$.

c. $x-5 = log_{(x-4)} y$.

d. $3x-2 = log_{(x-4)} y$.

3. Construya una tabla de valores para f^{-1}, si f es invertible y tiene asignada la tabla dada a continuación.

a.

x	0	1	2	3	4	5
$f(x)$	$\frac{1}{160}$	$\frac{1}{40}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{4}{10}$	$\frac{16}{10}$	$\frac{64}{10}$

b.

x	0	1	2	3	4	5
$f(x)$	16	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$

4. Trace la curva asociada a la función (puede utilizar un software graficador) y decida si es o no invertible.

a. $f(x) = x^2 - 5x + 6$.

b. $f(x) = x^2 - 5x + 10$.

c. $f(x) = x^3 - x - 6$.

5. Determine la función inversa (regla de correspondencia, dominio y conjunto imagen), trace las curvas correspondientes a $f(x)$ y $f^{-1}(x)$.

a. $f(x) = x^3 - 4$.

b. $f(x) = x + 9$.

c. $f(x) = 4x + 7$.

d. $f(x) = x^5 + 6$.

e. $f(x) = x^2 + 6$, sí $x \geq 0$.

f. $f(x) = x^2 - 1$, sí $x \geq 0$.

6. Determine la “función exponencial” equivalente (en términos de la función inversa).

a. $f(x) = log_3(x-2)$.

b. $f(x) = \frac{1}{2} log_2(x-3)$.

c. $f(x) = log_2(x-1) + 2$.

d. $f(x) = -\frac{1}{3} log_7 x + 3$.

e. $f(x) = log_4(x-3) - 2$.

f. $f(x) = log_3(-x) + 1$.

7. Exprese en forma exponencial.

a. $y = log_{10} 10000$.

b. $y = log_5 625$.

c. $y = log_3 2187$.

d. $y = log_2 1024$.

e. $y = log_2 \frac{1}{128}$.

f. $y = log_4 4096$.

g. $y = log_{10} \frac{1}{1000}$.

h. $y = log_5 \frac{1}{625}$.

i. $y = log_3 \frac{1}{243}$.

j. $y = log_4 \frac{1}{256}$.

8. Sin utilizar calculadora obtenga.

a. $log_{10} 10000$.

b. $log_5 625$.

c. $log_3 2187$.

d. $log_2 1024$.

e. $log_4 4096$.

f. $log_{10} \frac{1}{1000}$.

g. $log_5 \frac{1}{625}$.

h. $log_3 \frac{1}{243}$.

9. Rescriba en forma logarítmica.

a. $5^4 = 625$.

b. $4^3 = 64$.

c. $10^{-3} = 0.001$.

d. $12^0 = 1$.

e. $2^6 = 64$.

f. $10^{-1} = 0.1$.

g. $y^x = z$.

h. $v^w = u$.

10. Determine $f^{-1}(x)$ y trace la curva asociada.

a. $f(x) = 9^x$.

b. $f(x) = (2.2)^x$.

c. $f(x) = 6^x$.

d. $f(x) = 7^x$.

e. $f(x) = (4/5)^x$.

f. $f(x) = -(9)^x$.

g. $f(x) = -(6)^x$.

h. $f(x) = (8/3)^x$.

i. $f(x) = (1/2)^x$.

j. $f(x) = (1/10)^x$.

11. Suponga que conoce la forma de la curva asociada a $f(x) = log_3 x$. Sin utilizar calculadora, explique cómo trazaría la curva asociada a:

a. $f(x) = log_3(x-2) + 1$.

b. $f(x) = log_3(x-1) + 2$.

c. $f(x) = 4 log_3(x-4) + 1$.

d. $f(x) = \frac{2}{5} log_3(x+4) - 3$.

e. $f(x) = 3^{x-2} - 1$.

f. $f(x) = 3^{x-1} + 2$.

g. $f(x) = (4)3^{x+4} + 1$.

h. $f(x) = -\left(\frac{3}{4}\right)3^{-x+1} + 2$.

12. Suponga que conoce la forma de la curva asociada a $f(x) = ln\ x$. Sin utilizar un graficador, explique cómo trazaría la curva asociada a:

a. $f(x) = 4 ln(x-2)$.

b. $f(x) = \frac{2}{3} ln(x+2)$.

c. $f(x) = \frac{8}{5} ln(2-x) + 3$.

d. $f(x) = -2 \cdot ln(4-x)$.

e. $f(x) = \frac{8}{5} e^{x+1}$.

f. $f(x) = -2e^{4-x}$.

13. Suponga que conoce la forma de la curva asociada a $f(x)=e^{-x}$. Sin utilizar calculadora, explique cómo trazaría la curva asociada a:

a. $f(x)=-4\ln(x-2)$.

b. $f(x)=-\frac{2}{3}\ln(x+3)-1$.

c. $f(x)=\frac{8}{5}\ln(2-x)+3$.

d. $f(x)=-2\ln(4-x)-1$.

14. Trace la curva asociada, determine el dominio y el recorrido.

a. $f(x)=\log_3(x-2)$.

b. $f(x)=\log_6(x+2)$.

c. $f(x)=\log_2(x-1)+2$.

d. $f(x)=\frac{1}{2}\log_2(x-3)$.

e. $f(x)=-\frac{1}{3}\log_7 x+3$.

f. $f(x)=\log_4(x-3)-2$.

g. $f(x)=\log_3(-x)+1$.

h. $f(x)=4-\log_2(2-x)$.

15. Suponga que x y y son positivas y escriba las siguientes expresiones como una suma, o una diferencia, o como múltiplo de logaritmos.

a. $\log_3 10x$.

b. $\log_6 3x$.

c. $\log_8 \frac{8}{x}$.

d. $\log_6 \frac{3x}{4}$.

e. $\log_3 x^{-4}$.

f. $\log_7\left(x^4y^6\right)$.

g. $\log_{12}\left(x^{-2}y^{-3}\right)$.

h. $\log_{18}\frac{x^{-4}}{y^{-2}}$.

i. $\log_2\sqrt{\frac{x^3}{y^2}}$.

j. $\log_4\frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[5]{y}}$.

16. Exprese cada función en la forma $f(x)=\log_a kx^n$.

a. $f(x)=7\log_{12}x-2$.

b. $f(x)=-6\log x-2$.

c. $f(x)=\frac{1}{5}\log_6 x-\log_6 36$.

d. $f(x)=-6\ln x+\ln 36$.

e. $f(x)=4\ln x+\ln e^4$.

f. $f(x)=\ln x-\ln\frac{1}{e}$.

g. $f(x)=3\log_2 x-\log_4 16$.

17. Reescriba las funciones con un solo logaritmo.

a. $f(x)=\log_3 10x-\log_3 x$.

b. $g(x)=3\log_6 3x-2\log_6 5x$.

c. $h(x)=\log_6\frac{8}{x}+3\log_6\frac{2}{x}$.

d. $a(x)=\log_6\frac{3x}{5}+\log_6 7x$.

e. $b(x)=\log_4 ax-2\log_4 x$.

f. $c(x)=3\log_{10}\left(ax^3\right)+\log_{10}\left(b^3\right)$.

g. $d(x)=3\ln\frac{x^{-4}}{a^{-2}}-2\ln\frac{x^2}{a^2}$.

h. $e(x)=2^{-1}\ln\frac{1}{x^{-1}}+2^2\ln x^4$.

18. Escriba cada función en la base indicada.

a. $f(x)=\log_4 x$, base 2.

b. $f(x)=\log_2 x$, base 4.

c. $f(x)=\log_{81} x$, base 3.

d. $f(x)=\ln x$, base 4.

e. $f(x)=\ln x$, base $1/2$.

f. $f(x)=3\log_2\frac{1}{4}x$, en base 4.

g. $f(x)=\frac{1}{2}\log_4 16x$, en base e.

h. $f(x)=-3\log_{10}\frac{x^3}{100}$, en base 5.

i. $f(x)=5+4\log_2\frac{1}{2}x$, en base 4.

j. $f(x)=7-\log_6 36x^3$, en base e.

19. Rescriba en la base indicada.

a. $f(x)=4^x$, base 2.

b. $f(x)=3\left(4^x\right)-2$, base 5.

c. $f(x)=8\left(4^x\right)-2\left(4^{-x}\right)$, base 2.

d. $f(x)=14^x(x-2)$, base $\frac{1}{2}$.

20. Para rescribir la función $f(x)=a^x$ en la (base natural o base e) forma $f(x)=e^{kx}$, se requiere resolver la ecuación $\left(e^k\right)^x=a^x$, es decir $e^k=a$.

a. ¿Cuál es el valor de k?

b. Sustituya el valor de k (que encontró en el inciso anterior) en $\left(e^k\right)^x=a^x$, para así determinar la expresión de cambio de base de funciones exponenciales.

21. Utilice el hecho de que $a^x=e^{x\cdot\ln a}$ y rescriba las funciones en la base natural.

a. $f(x)=4^x$.

b. $f(x)=3\left(4^x\right)-2$.

c. $f(x)=8\left(4^x\right)-2\left(4^{-x}\right)$.

d. $f(x)=14^x(x-2)$.

e. $f(x)=x^x$.

f. $f(x)=x^{\sqrt{x+1}}-x^2$.

g. $f(x)=x^{2x+1}$.

h. $f(x)=x^{x^x}$.

22. Utilice el hecho de que $a^x=e^{x\cdot\ln a}$ y rescriba las funciones en la base que se pide.

a. $f(x)=4e^{4x}$ en base 2.

b. $f(x)=3e^x-2e^{-2x}$ en base 3.

c. $f(x)=2\left(e^{5x}\right)+4$ en base 4.

d. $f(x)=5x^x(x-1)$ en base e.

23. Demuestre que: si a y b son dos números positivos, entonces $(\log_a b)(\log_b a)=1$.

24. Transforme los logaritmos a base e y luego con una calculadora determine el valor correspondiente.

a. $\log_4 250$. **c.** $\log_{\frac{1}{3}} 4$. **e.** $\log_{\frac{7}{3}} 200.18$.

b. $\log_3 328.3$. **d.** $\log_{\frac{6}{5}} 213.2$. **f.** $\log_9 2750$.

25. Transforme los logaritmos a base 10 y luego con una calculadora determine el valor correspondiente.

a. $\log_4 250$. **c.** $\log_{\frac{1}{2}} 4$. **e.** $\log_{\frac{7}{3}} 200.18$.

b. $\log_3 328.3$. **d.** $\log_{\frac{6}{5}} 213.2$. **f.** $\log_9 2750$.

26. Resuelva para x.

a. $\log_8(x-5)=\dfrac{2}{3}$.

b. $\log_9 x=\dfrac{3}{2}$.

c. $\log_4 x=-\dfrac{3}{2}$.

d. $\log_3(x-4)=2$.

e. $\log_{10} x^2=-4$.

f. $2\log_3 x=3\log_3 5$.

27. Resuelva:

a. $\log_4(x+1)=2+\log_4(x-2)$.

b. $\log_5(2x-1)+\log_5(x+2)=0$.

c. $\log_2(3x+1)-\log_2(2x+4)=0$.

d. $\log_{(x-1)}16=2$.

e. $\log_{(4x-6)}100=1$.

f. $2\log_{(x-6)}9=4$.

g. $3\log_{(x-4)}5=3$.

h. $\frac{1}{2}\log_{(x+2)^{\frac{1}{2}}}9=1$.

28. Resuelva.

a. $\dfrac{2^x+2^{-x}}{2}=1$.

b. $e^{x^2}=e^{-2x+3}$.

c. $4\left(3^x\right)=36$.

d. $8+4\log_2 x=16$

e. $2\log_5 3x=4$.

f. $4\left(4^{6-2x}\right)+13=77$.

g. $\dfrac{5}{1+2e^{-3x}}=2$.

h. $\dfrac{200}{1+25e^{2x}}=20$.

29. Resuelva.

a. $2^{x-1}+2^x+2^{x+1}=7$. **f.** $9^x-(7)3^x-18=0$.

b. $3^{x-1}+3^x+(3)3^{x+1}=837$. **g.** $5^{x+2}=25^x$.

c. $4^{x-2}=(16)2^{x-3}$. **h.** $8^{2x+3}=4^{x+2}$.

d. $\left(\frac{1}{4}\right)2^{x+3}+48=(16)4^{x-2}$. **i.** $\sqrt[x]{27}=3^{x-2}$.

e. $2^{x+4}-4^{x+1}=16^x$. **j.** $\sqrt[x]{625}=5^{x+2}$.

30. Despeje x:

a. $a-20=50(1.2)^x$. **e.** $2^{x-4}=32$.

b. $\ln(x-13)=at+b$. **f.** $2^{x-2}=\frac{1}{32}$.

c. $\ln(3x-1)-\ln x=-4$. **g.** $\left(\frac{1}{4}\right)^{x+1}=64$.

d. $3^{x+2}=81$. **h.** $e^{4x+2}=e^4$.

31. La magnitud M, de Richter, de un terremoto se define en términos de la energía E en Joules liberada por el terremoto, por $\log_{10}E=4.4+1.5M$.

a. Determine la energía para terremotos con magnitudes:
i. 5. **ii.** 6. **iii.** 8. **iv.** 10.

b. Quienes no están familiarizados con terremotos, les parece extraño que un terremoto de grado 6 se considere mucho más severo que uno de magnitud 3 grados, compare la cantidad de energía liberada en ambos casos.

32. El enfoque más común para la medición de la intensidad del sonido es el uso de los decibeles, así $B=10\log_{10}\frac{I}{I_0}$ donde $I_0=10^{-12}\,\frac{watts}{m^2}$. Calcule los niveles de intensidad de sonido con:

a. 80 decibeles. **c.** 100 decibeles.

b. 90 decibeles. **d.** 120 decibeles.

33. En golf, la tarea es golpear una bola para que caiga en un hoyo pequeño. Si la superficie cercana al hoyo no es plana, el jugador debe juzgar cuanto curvar la trayectoria de la bola. Suponga que el jugador está en el punto $(-13,0)$, el hoyo en el punto $(0,0)$ y la trayectoria de la bola sobre $-13\le x\le 0$ es $y=-1.672x+72\ln(1+0.02x)$. Muestre que la bola cae en el hoyo y estime el punto del eje y en el que el golfista golpeó la bola.

34. El trabajo, en Joules, realizado por una muestra de 1 Kilogramo de gas nitrógeno cuando su volumen cambia de un valor inicial V_i a un valor final V_f durante un proceso a temperatura constante está dado por $W=8.1\times10^4\ln\dfrac{V_f}{V_i}$. Si tal muestra se expande de un volumen inicial de 3 litros a un volumen de 9 litros, determine el trabajo realizado por el gas.

35. La ecuación de oferta de un fabricante es $p(q)=\log_{10}\left(10+\frac{q}{2}\right)$. Donde q es el número de unidades ofrecidas con el precio p por unidad. ¿A qué precio el fabricante ofrecerá 1980 unidades?

36. Para una compañía el costo c para producir q unidades de un producto está dada por la ecuación $c(q) = 2q\ln q + 20$, evalúe el costo cuando $q = 6$.

37. Se invierte un principal de $\$10000$ en una cuenta de ahorros con un interés capitalizable continuamente a una tasa del 7% anual. El monto S en la cuenta t años después está dado por $S = 10000e^{0.07t}$.
a. ¿En cuánto tiempo habrá $\$35000$ en la cuenta de ahorros?
b. ¿En qué tiempo se duplicará el capital de la cuenta?
c. ¿Cuánto tiempo tardarán en duplicarse $\$1000$ si se invierten al 12% de interés capitalizado trimestralmente?

38. Un medicamento, que es eliminado a través de la orina, tiene una dosis inicial de 10 miligramos y la cantidad que queda en el cuerpo t horas después está dada por $A(t) = 10(0.8)^t$.
a. En qué tiempo queda en el cuerpo 2 miligramos.
b. ¿Cuál es la vida media del medicamento?

39. El número de cierto tipo de bacterias después de t horas se obtiene mediante el modelo $N = N_0e^{0.34t}$, donde N_0 representa el número inicial de bacterias. ¿Cuánto tardarán 400 bacterias en aumentar a 4000?

40. El número de gramos de una sustancia radiactiva después de t horas se determina mediante la relación $N = N_0e^{-0.45t}$, donde N_0 representa el número inicial de gramos. ¿En qué tiempo 2500 gramos de esa sustancia se reducirán a 1250 gramos?

41. Suponga que $B = 10\log_{10}\frac{I}{I_0}$ donde $I_0 = 10^{-12}\ \frac{watts}{m^2}$ y calcule el valor en decibeles de un sonido tal que:
a. $I = 125I_0$ (un susurro).
b. $I = 12{,}000I_0$ (nivel normal de la voz).

42. Si un sonido tiene un valor en decibeles que se indica, determine I en términos de I_o. Suponga que $B = 10\log_{10}\frac{I}{I_0}$ donde $I_0 = 10^{-12}\ \frac{watts}{m^2}$.
a. $d = 95$ (un camión de carga).
b. $d = 118$ (heavy metal, el rock pesado).

43. Suponga que el crecimiento está dado por una función de la forma $f(t) = A(10^{kt})$ donde t representa el tiempo en días o años, $A > 0$ y K positiva o negativa.
a. Cierta semana hay 6800 moscas de la fruta el lunes y 7400 el viernes. ¿Cuántas moscas habrá el domingo?
b. Inicialmente, cierta población tenía 1000 habitantes, 10 años después de que se instaló una fábrica en el lugar tuvo 2200 habitantes ¿Cuál era la población al año de instalada la fábrica?

44. Resuelva la ecuación $1.07^n = 2$, que indica el tiempo necesario para que una inversión se duplique, si ésta se invierte al 7% de interés compuesto capitalizable anualmente.

45. La ley de enfriamiento de Newton establece que la rapidez con que se enfría un objeto es directamente proporcional a la diferencia de temperatura entre el objeto y el medio circundante. Así, la temperatura T de un objeto en un tiempo t está dada por $T = 75e^{-2t}$. Exprese t como función de T.

46. Una persona que acaba de terminar un curso de cómputo. El porcentaje del curso que él recordará dentro de x meses está dado por la función $r(x) = 92 - 47.9\log(x+1)$ con $0 \le x \le 46.9$. Determine el porcentaje del curso que recordará la persona en los tiempos señalados.
a. 3 meses.
b. 1.5 meses.
c. ¿En cuánto tiempo recordará sólo él 30 % del curso?
d. ¿En cuánto tiempo recordará sólo él 75 % del curso?

47. Una persona que acaba de terminar un curso de cómputo. El porcentaje del curso que él recordará dentro de x meses está dado por la función $r(x) = 83.5 - 42.7\log(x+1)$ con $0 \le x \le 46.9$. Determine el porcentaje del curso que recordará la persona en los tiempos señalados.
a. 1.5 meses.
b. 0.3 meses.
c. ¿En cuánto tiempo recordará sólo él 37 % del curso?
d. ¿En cuánto tiempo recordará sólo él 62 % del curso?

48. La escala de Richter, relaciona la magnitud M, del terremoto con la energía que libera E (en ergios) por la relación $M = \dfrac{\log E - 11.8}{1.5}$.
a. Si un terremoto liberó 1.34×10^{22} ergios, ¿cuál fue su magnitud?
b. Si un terremoto liberó 1.04×10^{20} ergios, ¿cuál fue su magnitud?
c. ¿Un terremoto de magnitud 8.2 que cantidad de energía liberó?
d. ¿Un terremoto de magnitud 4.32 que cantidad de energía liberó?

49. Utilizando el modelo $r(x) = 83.5 + 42.7\log(x+1)$, en el que x representa el número de años después de 2011 y r es la población mundial en miles de millones de personas.
a. Estime la población en el año 2050 en miles de millones de personas.
b. ¿En qué año se duplicará la población que había en el año 2011?

AUTOEVALUACIÓN

1. Mencione las características básicas de una función logarítmica (dominio, conjunto imagen, asíntotas).

2. Rescriba la función $r(x) = 4log(x+1)$, como una función exponencial.

3. Rescriba la función $r(x) = e^{(2x+1)}$, como una función logarítmica.

4. Determine: el dominio, el conjunto imagen la intersecciones con los ejes coordenados de la función $r(x) = 3log(x+2) - 1$.

5. Trace la gráfica de la función $r(x) = -4log(x-1)$.

6. Trace la gráfica de la función $r(x) = 2log(x+3) + 1$.

7. Resuelva la ecuación $log_4(2x+1) = 1 + log_4(x-2)$.

8. Resuelva la ecuación $e^{x^2} = e^{-5x-6}$.

9. Rescriba $f(x) = 3e^x - 2e^{-2x}$ en base 3.

10. Resuelva la ecuación $2^{x-1} + 2^{x+2} + 2^{x+1} = 8$.

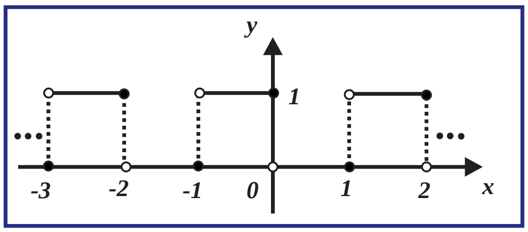
11. La temperatura T de un objeto en un tiempo t está dada por $T = 8e^{-6t}$, exprese t como función de T.

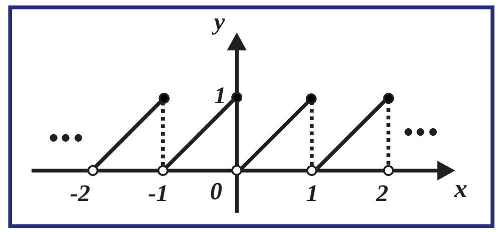
4 FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

PROPÓSITOS:
Al finalizar la unidad el alumno:
Extenderá el concepto de razón trigonométrica a función trigonométrica.
Estudiará las funciones seno y coseno en su forma característica de variación y el análisis de sus parámetros.
Modelará situaciones de comportamiento periódico para resolver problemas.

CONTENIDO:

4





4.1 ANTECEDENTES DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

APRENDIZAJES

1. Explorará situaciones o fenómenos de variación periódica.
2. Convertirá medidas angulares de grados a radianes y viceversa.
3. Comprenderá la forma en que se extienden o generalizan las razones trigonométricas para ángulos arbitrarios.

¿Qué es la variación periódica? En la vida real existe una gran variedad de fenómenos (descritos por funciones) que se comportan de manera cíclica (repetitiva) sobre un intervalo de tiempo (llamado un periodo y que tiene longitud T). La función f describe este tipo de fenómenos tiene la característica $f(x)=f(x+T)$, donde $T>0$ es constante; en el plano cartesiano, esto significa que la curva que describe el fenómeno puede trazarse utilizando "una copia" de una de sus partes.

EJEMPLO 4.1 (Movimientos oscilatorios)

a. Un oscilador armónico es un "cuerpo" que al moverlo fuera de su posición de equilibrio oscila en torno a ella. En la *figura 4.1* (el "oscilador armónico", compuesto por un sistema masa-resorte) el resorte ha sido estirado respecto a su posición de equilibrio O y luego se ha dejado en libertad, como consecuencia la masa (bloque negro) oscila en torno a su posición de equilibrio O. El desplazamiento de la masa la describe la función $x(t)$ (y bajo condiciones ideales) y varía desde $-x_0$ y hasta x_0 en el tiempo $t=T$, esta variación es periódica y cumple la condición $x(t)=x(t+T)$ donde t representa el tiempo, vea la *figura 4.1*.

NOTA

La parte positiva de la curva asociada a $x(t)$ indica que la masa se ha desplazado a la derecha del punto de equilibrio O, la parte negativa indica que la mase se ha desplazado a la izquierda del punto de equilibrio O.

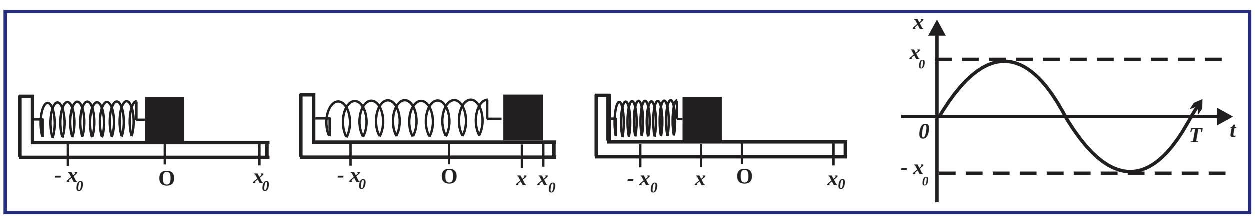


FIGURA 4.1

b. Un péndulo simple consiste en un objeto suspendido de un hilo de peso (despreciable). Cuando un péndulo se desvía hacia un lado (por ejemplo hacia la izquierda) de su posición de equilibrio (digamos un ángulo θ_0) y luego se abandona, oscila (sobre un plano) alrededor de su posición de equilibrio O, desde $-\theta_0$ hasta θ_0 con un movimiento, que es a la vez, periódico y oscilatorio (suponiendo condiciones ideales). Si $\theta(t)$ describe el movimiento angular del péndulo, se cumple $\theta(t)=\theta(t+T)$ donde T es el periodo de oscilación, vea la *figura 4.2*.

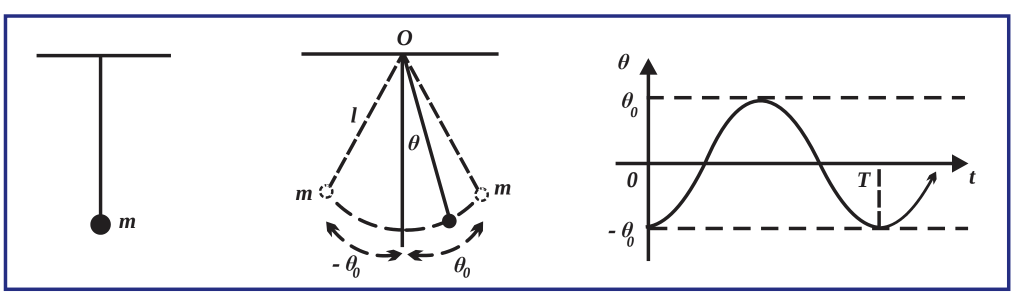


FIGURA 4.2

PARA REFLEXIONAR

¿? ¿Cómo cambia la gráfica de la *figura 4.2* si el péndulo se desvía inicialmente a la derecha θ_0 grados?

c. Un oscilador de pozo cuadrado (o “partícula de caja”) puede interpretarse como un “carrito” que se mueve en ambos sentidos a lo largo de una vía horizontal entre dos puntos fijos, la rapidez con que se mueve es constante. Los puntos de inversión P_1 y P_2 son paredes paralelas rígidas entre las que oscila el “carrito” tras efectuar choques perfectamente elásticos con ellas, vea la *figura 4.3*.

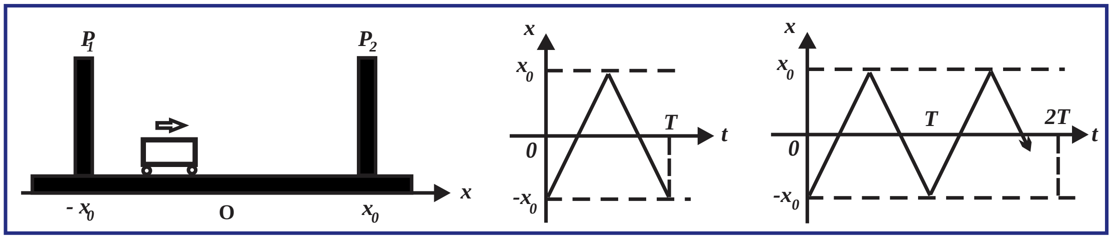


FIGURA 4.3

La *figura 4.3* muestra el comportamiento del desplazamiento $x(t)$ en función del tiempo, la elección del origen es arbitraria. El desplazamiento máximo del carrito se denomina *amplitud de oscilación* y tiene longitud $A = 2x_0$. Un ciclo del “carrito” está descrito por el trayecto $P_1P_2P_1$ y se llama periodo de oscilación.

PARA REFLEXIONAR

¿? ¿Cómo cambia la gráfica de la *figura 4.3* si el “carrito” inicia su movimiento en x_0 ?

d. Sobre un disco (circular), de radio unitario y con centro en el origen del plano cartesiano se selecciona el punto $P(x, y)$ y se proyecta sobre los ejes coordenados, esto da origen a los segmentos rectilíneos “dirigidos” $\overline{OA}$ y $\overline{OB}$ cuya longitud depende de la amplitud del ángulo central θ, explícitamente $\overline{OA} = x(\theta)$ y $\overline{OB} = y(\theta)$. Después de n ciclos completos del punto P se cumple: $\overline{OA} = x(\theta) = x(\theta + 360° \cdot n)$ y $\overline{OB} = y(\theta) = y(\theta + 360° \cdot n)$, vea la *figura 4.4*.

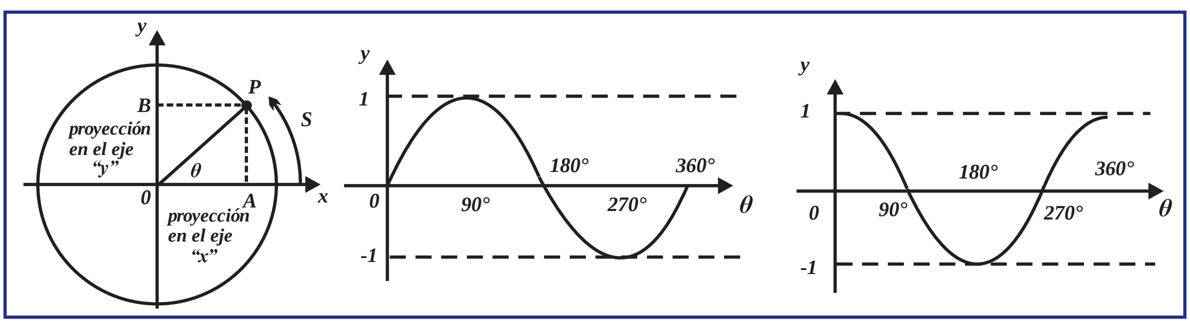


FIGURA 4.4

□

Las funciones con un comportamiento similar a las descritas en el *ejemplo 4.1* corresponden a fenómenos periódicos y son el objeto de estudio de la presente unidad.

Definición 4.1 (FUNCIÓN PERIÓDICA)

a. La función regla de correspondencia f que satisface $f(x) = f(x+T)$ para cualquier número x en su dominio y para algún número real positivo T se denomina función periódica con periodo T .
b. El valor positivo más pequeño posible de T es el periodo de la función.
c. La amplitud de una función periódica es la semidiferencia entre su valor máximo y su valor mínimo.

El *ejemplo 4.2* muestra el comportamiento de varias funciones periódicas y presenta algunas de sus características (regla de correspondencia, gráfica, periodo y amplitud).

EJEMPLO 4.2 (Funciones periódicas)

a. La *figura 4.5* muestra la función periódica "onda cuadrada", con periodo $T=2$, amplitud $A=0.5$ y regla de correspondencia $f(x)=\begin{cases} 0 & 0<x\leq 1 \\ 1 & 1<x\leq 2 \end{cases}$.

b. La función periódica llamada "diente de sierra" (*figura 4.6*) tiene periodo $T=1$, inicia y termina en los puntos $(0,0)$, $(1,1)$, respectivamente. Tiene pendiente $m=1$ y regla de correspondencia $f(x)=x$ siempre que $0<x\leq 1$. Su amplitud es $A=0.5$.

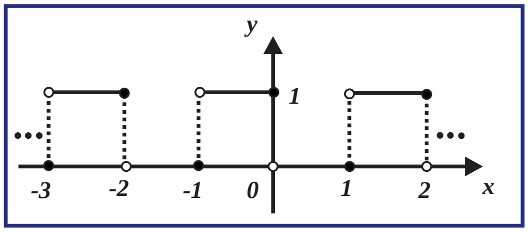


FIGURA 4.5

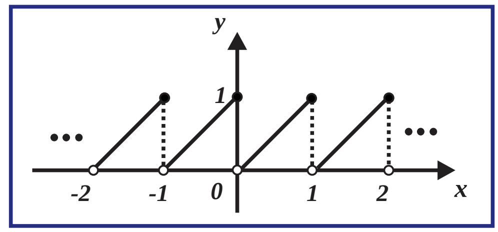


FIGURA 4.6

c. La *figura 4.7* muestra otro tipo de función periódica, también llamada "diente de sierra", tien periodo $T=2$ y regla de correspondencia $f(x)=\begin{cases} 2x & si \quad 0\leq x\leq 1 \\ -2x & si \quad 1<x<2 \end{cases}$ y amplitud $A=1$.

d. La función periódica de la *figura 4.8* tiene regla de correspondencia $f(x)=\begin{cases} -1.2 & -1<x\leq 0 \\ 1.2 & 0<x\leq 1 \end{cases}$, su periodo es $T=2$, su amplitud es $A=1.2$.

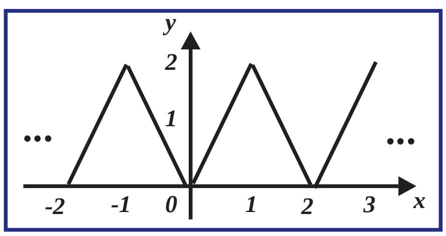


FIGURA 4.7

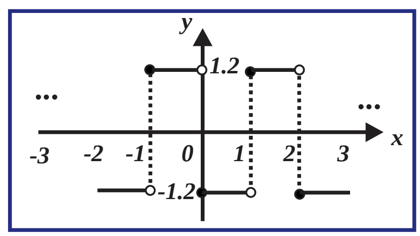


FIGURA 4.8

□

MEDIDA DE UN ÁNGULO, GRADOS Y RADIANES

Estrechamente relacionadas con las funciones periódicas se encuentran los ángulos por lo que es necesario que recordemos algunas de sus características. En la geometría plana un ángulo se define como la parte del plano limitada por dos segmentos de línea recta (o en su caso semirrectas o rayos). Como puede observarse en la *figura 4.9*, el ángulo AOB también incluye un punto común entre los rayos O que es el vértice.

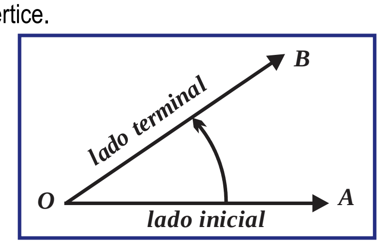


FIGURA 4.9

Todo ángulo tiene asignada una amplitud (o medida), para asignar unidades de medida a un ángulo, trazamos en el plano cartesiano una circunferencia de radio uno y centro en el origen, posteriormente colocamos (en el plano cartesiano) el ángulo de manera que su vértice coincida con el origen de coordenadas y el lado inicial coincida con la parte positiva del eje de las abscisas (en estas condiciones se dice que el ángulo se encuentra en posición normal), luego medimos la longitud del arco de circunferencia contenida entre los puntos de intersección de los lados del ángulo y la circunferencia, el número así obtenido se llama medida o amplitud del ángulo (esta medida o amplitud no depende de la orientación del ángulo, por lo que es una medida absoluta).

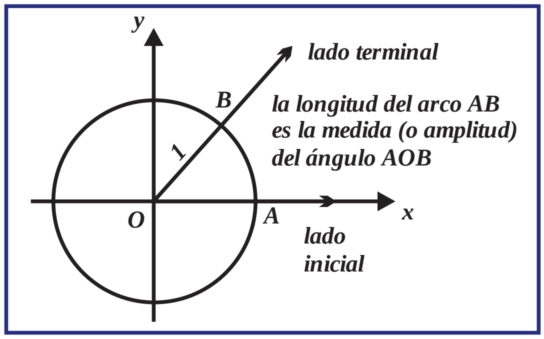


FIGURA 4.10

A un ángulo se le pueden asignar como unidades de amplitud grados o los radianes. Para medir un ángulo en grados se considera una circunferencia cuyo radio tiene una longitud r, de esta circunferencia tomamos como unidad de medida un arco que tenga longitud $\frac{2\pi r}{360}$, un ángulo mide un radián, si sus lados determinan un arco de longitud igual a un radio, vea la *figura 4.11*.

Definición 4.2 (GRADO Y RADIÁN)

Sea una circunferencia de radio de longitud r, entonces

a. Un ángulo de medida (amplitud) de un grado interseca a un arco cuya longitud es $\frac{2\pi r}{360}$.

b. Un ángulo mide un radián, si sus lados determinan un arco de longitud igual a un radio en una circunferencia.

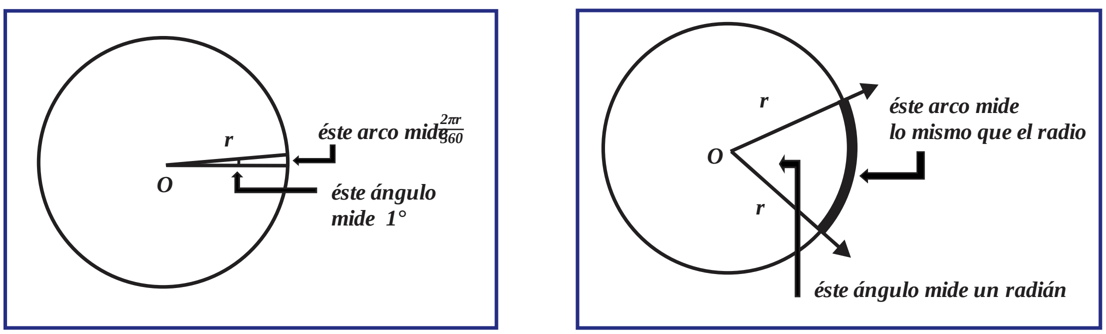


FIGURA 4.11

Los grados y los radianes se utilizan, tanto para referirse a las amplitudes de los ángulos como a las longitudes de los arcos. ¡Ambas unidades también son medidas de longitud!

Una ventaja que se adquiere al medir arcos en radianes es que la misma unidad con que medimos el radio nos sirve para medir arcos de circunferencias. Sí, si el radio de una circunferencia mide un centímetro, el radián también mide un centímetro y el arco también mide un centímetro, mientras que la medida de un grado en centímetros es $\frac{2\pi}{360} \approx 0.0174533$.

NOTA

Evidentemente, un arco y un ángulo son entes diferentes, sin embargo se miden con las mismas unidades.

Puesto que la longitud de una circunferencia de radio 1 es $l = 2\pi$, entonces un ángulo de un giro completo mide 2π radianes (lo que representaremos por $2\pi^r$), un ángulo llano mide π radianes (π^r) y un ángulo recto mide $\frac{\pi}{2}$ radianes ($\frac{\pi^r}{2}$), vea la *figura 4.12*.

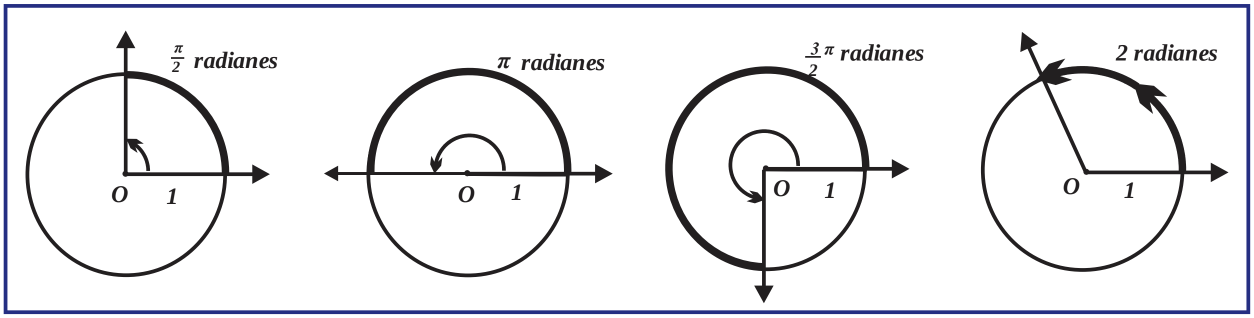


FIGURA 4.12

Puesto que un ángulo de giro completo equivale a $360°$ o $2\pi^r$, entonces $360° = 2\pi^r$, relación que se utiliza para transformar grados a radianes o radianes a grados.

Proposición 4.1 (TRANSFORMACIÓN DE UNIDADES DE MEDIDA DE ÁNGULOS)

Sean θ^r y $\theta°$ las amplitudes del ángulo θ en radianes y grados respectivamente, entonces

a. $180° = \pi^r$.

b. Para transformar $\theta°$ grados a radianes se utiliza la relación $\theta^r = \frac{\pi}{180}\theta°$.

c. Para transformar θ^r radianes a grados se utiliza la relación $\theta° = \frac{180}{\pi}\theta^r$.

En lo sucesivo, para referirnos a un ángulo utilizaremos el símbolo $\angle$, así, $\angle\theta$ significa el "ángulo theta".
Si no utilizamos el símbolo $\angle$ estaremos refiriéndonos a la amplitud de un ángulo, así θ significa la amplitud del ángulo $\angle\theta$.

EJEMPLO 4.3 (Transformación de unidades de medida de ángulos)

a. El ángulo de amplitud $45°$ también tiene como amplitud $(45)\frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{4} \approx 0.7854$ radianes.

b. El ángulo de amplitud $\theta = -18°$ también tiene como amplitud $(-18)\frac{\pi}{180} = -\frac{\pi}{10} \approx -0.31416$ radianes.

c. El ángulo de amplitud $\theta = 1.64^r$ también tiene amplitud $(1.64)\frac{180°}{\pi} \approx 93.965°$.

d. El ángulo de amplitud $\theta = -5.072^r$ equivale al ángulo de amplitud $(-5.072)\frac{180°}{\pi} \approx -290.604°$.

□

El estudio de las razones trigonométricas, objeto de la presente sección, requiere del uso de "*ángulos en posición normal*".

Definición 4.3 (ÁNGULO EN POSICIÓN NORMAL)

Un ángulo, en el plano cartesiano, está en posición normal, si su vértice coincide con el origen del plano cartesiano y su lado inicial coincide con la parte positiva del eje x.

La *figura 4.13* muestra cuatro ángulos en posición normal.

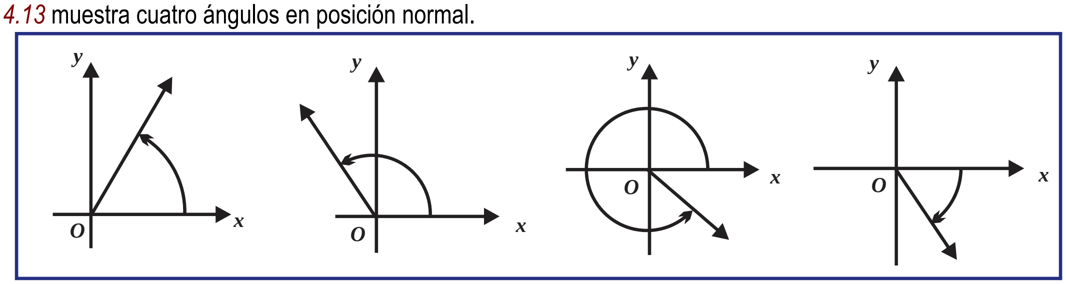


FIGURA 4.13

Definición 4.4 (ÁNGULOS COTERMINALES)

Si sus lados de dos (o más) ángulos en posición normal coinciden, entonces son coterminales.

En la *figura 4.14*, los ángulos $\angle\alpha$ y $\angle\beta$ son coterminales.

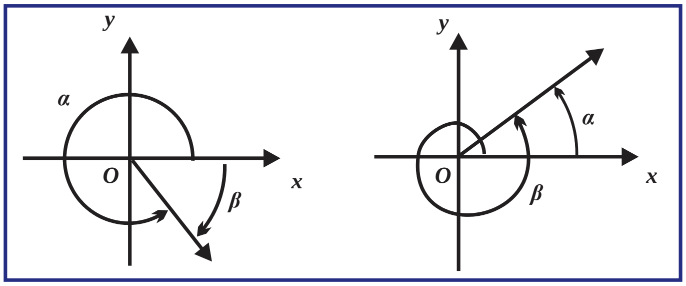


FIGURA 4.14

Para determinar ángulos coterminales a un ángulo específico de amplitud θ, basta con agregarle un múltiplo entero de 2π, por ejemplo, el ángulo de amplitud θ^r es coterminal con los ángulos de amplitudes $\theta_n = \theta^r \pm 2n\pi^r$ (donde n representa un número entero).

EJEMPLO 4.4 (Ángulos coterminales)

a. Ángulos coterminales con el ángulo (en posición normal) de amplitud $\theta = \frac{\pi}{6}^r$, son los ángulos de amplitudes $\theta_n = \frac{\pi}{6}^r \pm 2n\pi^r$ (donde n representa un número entero), en particular los ángulos de amplitudes $\frac{13\pi}{6}^r$, $\frac{25\pi}{6}^r$ y $\frac{37\pi}{6}^r$.

b. Ángulos coterminales al ángulo (en posición normal) de amplitud $\theta = -\frac{\pi}{3}^r$, son los ángulos de amplitudes $\theta_n = -\frac{\pi}{3}^r \pm 2n\pi^r$ (donde n representa un número entero), en particular lo son los ángulos de amplitudes $-\frac{7\pi}{3}^r$, $\frac{5\pi}{3}^r$ y $\frac{11\pi}{3}^r$.

c. Ángulos coterminales a $\theta = 60°$ son aquellos de la forma $\theta_n = 60° \pm 360°(n)$ (n representa un número entero), en particular lo son los que tienen amplitudes de $-660°$, $-300°$, $420°$, , etc.

d. Ángulos coterminales con el ángulo de amplitud $\theta = -25°$, son los ángulos con amplitudes $\theta_n = -25° \pm 360°(n)$ (n representa un número entero), por ejemplo, los ángulos que miden $-385°$, $335°$, $695°$, etc.

□

Para determinar un ángulo coterminal al ángulo $\angle\theta$ (comprendido entre 0^r y $2\pi^r$, o entre $0°$ y $360°$) basta con reescribirlo como una fracción mixta.

NOTA

Un número mixto incluye: un número entero y un número racional de la forma $\frac{a}{b}$.

EJEMPLO 4.5 (Ángulos coterminales)

a. Para determinar la amplitud del ángulo coterminal al ángulo de amplitud $\theta = \frac{32}{7}\pi^r$, lo rescribimos como fracción mixta, así $\theta = \frac{32}{7}\pi^r = 4\pi + \frac{4}{7}\pi^r = 4\frac{4}{7}\pi^r$, la parte fraccionaria es el ángulo coterminal contenido entre 0^r y $2\pi^r$, es decir, el ángulo en posición normal de medida $\theta_c = \frac{4}{7}\pi^r$.

b. Para determinar el ángulo coterminal a $\theta = -\frac{13}{3}\pi^r$, lo rescribimos como fracción mixta, así $\theta = -\frac{13}{3}\pi^r = -4\pi^r - \frac{1}{3}\pi^r = -4\frac{1}{3}\pi^r$, la parte fraccionaria es el ángulo coterminal contenido entre 0^r y $2\pi^r$, es decir, el ángulo en posición normal de medida $\theta_c = -\frac{1}{3}\pi^r$.

c. El ángulo coterminal de $1295°$, comprendido entre los $0°$ y los $360°$ asociado a $1295°$, se obtiene como sigue $\frac{1295°}{360°} = 3(360°) + \frac{215°}{360°}$, el numerador de la parte fraccionaria es la medida del ángulo coterminal, es decir $\theta_c = 215°$.

d. El ángulo coterminal de $-753°$, comprendido entre los $0°$ y los $360°$, se obtiene como sigue $-\frac{753°}{360°} = -2(360°) - \frac{33°}{360°}$, el numerador de la parte fraccionaria es la medida del ángulo coterminal, es decir $\theta_c = -33°$.

□

RAZONES TRIGONOMÉTRICAS: SENO, COSENO Y TANGENTE

Trataremos las *razones trigonométricas* del triángulo rectángulo AOB refiriéndolas al plano cartesiano, para ello coloquemos el triángulo AOB en el plano cartesiano de forma que el ángulo $\angle BOA$ esté en posición normal (*figura 4.15*). Las seis razones trigonométricas del ángulo $\angle\theta = \angle BOA$ se definen en términos de la abscisa, la ordenada y la longitud de la hipotenusa $r = \sqrt{x^2 + y^2} \neq 0$ de acuerdo a la *definición 4.5*.

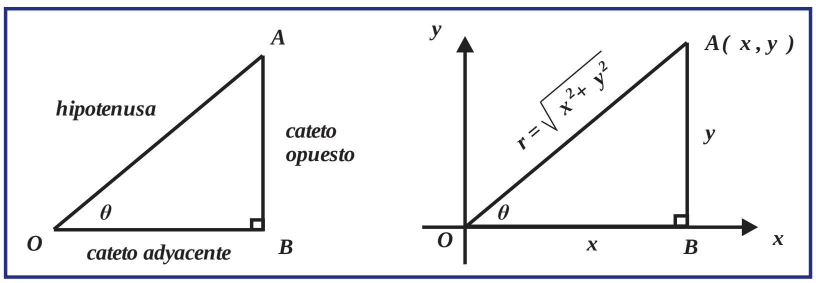


FIGURA 4.15

Definición 4.5 (RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE UN ÁNGULO AGUDO)

Sean: el triángulo AOB en el plano cartesiano de forma que el ángulo $m\angle BOA = \theta$ esté en posición normal, $m\angle BOA = \theta$, $A(x, y)$ un punto del lado terminal y $r = \sqrt{x^2 + y^2} \neq 0$ la distancia del origen al punto $A(x, y)$, entonces:

a. $seno\ \theta = sen\ \theta = \frac{ordenada}{longitud\ de\ OA} = \frac{y}{r}$.

b. $coseno\ \theta = cos\ \theta = \frac{abscisa}{longitud\ de\ OA} = \frac{x}{r}$.

c. $tangente\ \theta = tg\ \theta = \frac{ordenada}{abscisa} = \frac{y}{x}$.

c. $cotangente\ \theta = ctg\ \theta = \frac{1}{tg\ \theta} = \frac{abscisa}{ordenada} = \frac{x}{y}$.

d. $secante\ \theta = sec\ \theta = \frac{1}{cos\ \theta} = \frac{longitud\ de\ OA}{abscisa} = \frac{r}{x}$.

e. $cosecante\ \theta = csc\ \theta = \frac{1}{sen\ \theta} = \frac{longitud\ de\ OA}{ordenada} = \frac{r}{y}$.

NOTA

En la *definición 4.5*, el ángulo θ tiene asociado un valor fijo, lo mismo sucede con las longitudes de los lados del triángulo de referencia.

El *ejemplo 4.6* muestra el cálculo de algunas razones trigonométricas.

EJEMPLO 4.6 (Razones trigonométricas)

Sea AOB un triángulo en el plano cartesiano de forma que el ángulo $\angle BOA$ está en posición normal y $m\angle BOA = \theta$.

a. Si el lado terminal de un ángulo $\angle BOA$ contiene al punto $A(4, 10)$, entonces $x = 4$ y $y = 10$. Por tanto $r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{4^2 + (10)^2} = \sqrt{116}$, y en consecuencia $sen\ \theta = \frac{10}{\sqrt{116}}$, $cos\ \theta = \frac{4}{\sqrt{116}}$ y $tg\ \theta = \frac{10}{116}$, vea la *figura 4.16 a*.

b. Si el lado terminal de un ángulo $\angle BOA$ contiene al punto $A(4, 3)$, entonces $x = 4$ y $y = 3$. La longitud de la hipotenusa mide $r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$, entonces $sen\ \theta = \frac{3}{5} = 0.6$, $cos\ \theta = \frac{4}{5} = 0.8$, $tg\ \theta = \frac{3}{4} = 0.75$, $ctg\ \theta = \frac{4}{3}$, $sec\ \theta = \frac{5}{4}$ y

$csc\ \theta = \frac{5}{3}$, vea la *figura 4.16 b*.

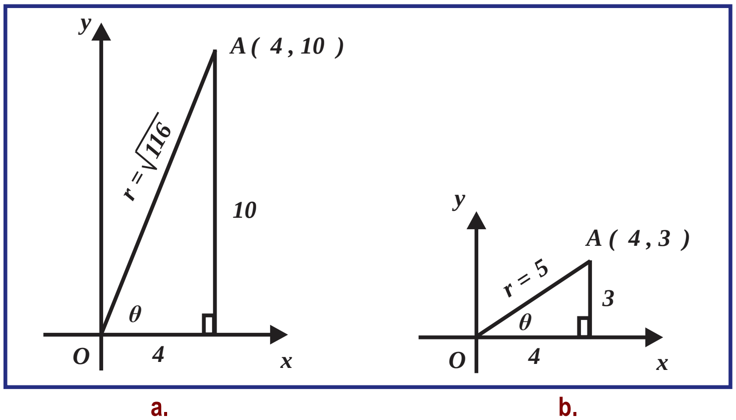


FIGURA 4.16

□

En la *definición 4.5* es posible considerar como variable (independiente) al ángulo $\angle\theta$, si éste es el caso nos referiremos a éstas "razones" como relaciones trigonométricas, por tanto, consideraremos a una razón trigonométrica como un caso especial de una relación trigonométricas.

El cálculo de las imágenes de las relaciones trigonométricas para asignaciones mayores a $\frac{\pi}{2}$ radianes se facilita tomando como base el ángulo de referencia.

Definición 4.6 (ÁNGULO DE REFERENCIA)

Sea $\angle\theta$ un ángulo colocado en posición normal en el plano cartesiano, el ángulo de referencia $\angle\theta_{ref}$ es el ángulo agudo positivo que forma el lado terminal del ángulo $\angle\theta$ con el eje x .

NOTA

Un ángulo se considera positivo cuando se mide en sentido opuesto a las manecillas de un reloj (levógiro).

Los ángulos en posición normal pueden rescribirse en términos de los ángulos de referencia positivos comprendidos entre 0^r y $\frac{\pi^r}{2}$, para ello se debe tener en cuenta: el signo de la relación trigonométrica y el cuadrante en el que se encuentra el lado terminal del ángulo $\angle\theta$, vea la *figura 4.17*.

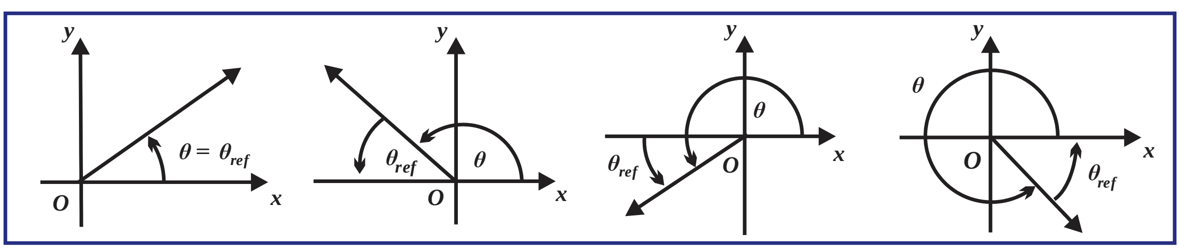


FIGURA 4.17

Si $\angle\theta$ es un ángulo positivo en posición normal y el lado terminal está en el cuadrante:

$$\begin{array}{ll} I & \theta_{ref} = \theta\ , \\ II & \theta_{ref} = 180° - \theta \text{ ó } \theta_{ref} = \pi - \theta\ , \\ III & \theta_{ref} = \theta - 180° \text{ ó } \theta_{ref} = \theta - \pi\ , \\ IV & \theta_{ref} = 360° - \theta \text{ ó } \theta_{ref} = 2\pi - \theta\ . \end{array}$$

La *figura 4.18* presenta las relaciones trigonométricas positivas en los respectivos cuadrantes del plano cartesiano.

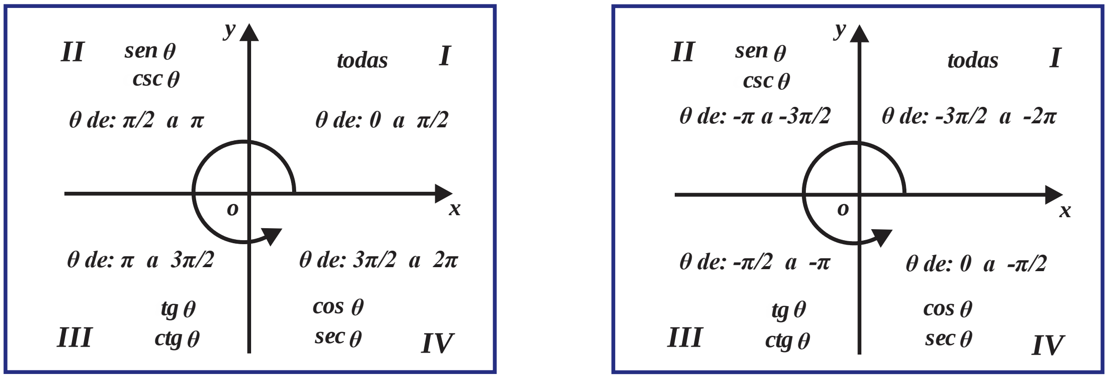


FIGURA 4.18

EJEMPLO 4.7 (Uso del ángulo de referencia y relaciones trigonométricas)

a. El ángulo, en posición normal y medida $\theta = \frac{8\pi}{5}^r$, tiene lado terminal en el cuadrante IV, por tanto, el ángulo de referencia es $\theta_{ref} = \frac{2}{5}\pi^r$, por tanto $sen\,\frac{8\pi}{5}^r = -sen\,\frac{2\pi}{5}^r$ y $tg\,\frac{8}{5}\pi^r = -tg\,\frac{2}{5}\pi^r$ y $csc\,\frac{8}{5}\pi^r = -csc\,\frac{2}{5}\pi^r$, vea la *figura 4.19 a*.

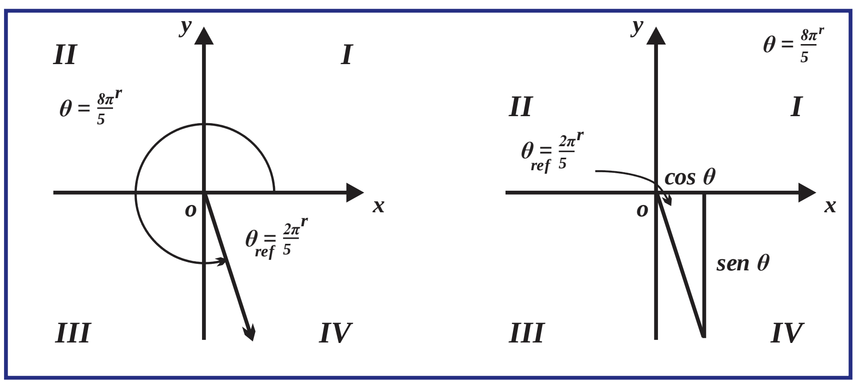


FIGURA 4.19 a.

b. El ángulo, en posición normal y medida $\theta = \frac{4\pi}{9}^r$ tiene lado terminal en el cuadrante I, entonces el ángulo de referencia es $\theta_{ref} = \frac{4}{9}\pi^r$, entonces $cos\,\frac{4\pi}{9}^r = cos\,\frac{4\pi}{9}^r$, $ctg\,\frac{4\pi}{9}^r = ctg\,\frac{4\pi}{9}^r$ y $sec\,\frac{4\pi}{9}^r = sec\,\frac{4\pi}{9}^r$ vea la *figura 4.19 b*.

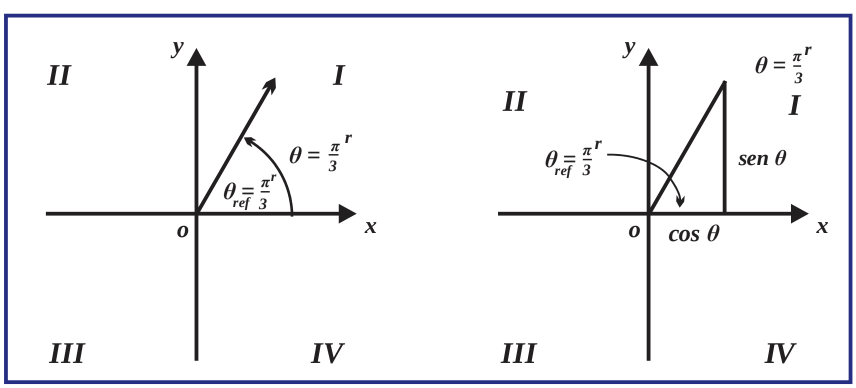


FIGURA 4.19 b.

c. El ángulo, en posición normal y medida $\theta=\frac{7\pi^r}{3}$ tiene lado terminal en el cuadrante I, entonces $\theta_{ref}=\frac{1}{3}\pi^r$ y $sen\,\frac{7\pi^r}{3}=sen\,\frac{\pi^r}{3}$, $cos\,\frac{7\pi^r}{3}=cos\,\frac{\pi^r}{3}$, $tg\,\frac{7\pi^r}{3}=tg\,\frac{\pi^r}{3}$ $ctg\,\frac{7\pi^r}{3}=ctg\,\frac{\pi^r}{3}$, $sec\,\frac{7\pi^r}{3}=sec\,\frac{\pi^r}{3}$ y $\csc\frac{7\pi^r}{3}=\csc\frac{\pi^r}{3}$, vea la *figura 4.19 c*.

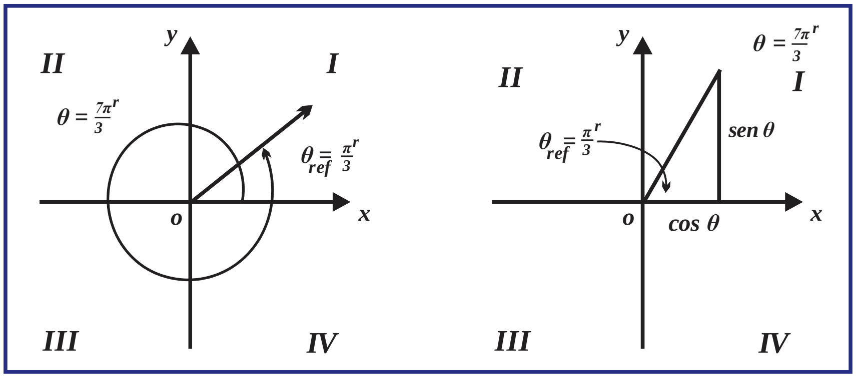


FIGURA 4.19 c.

d. El ángulo, en posición normal y medida $\theta=\frac{11}{4}\pi^r$ tiene lado terminal en el cuadrante II, entonces $\theta_{ref}=\frac{1}{4}\pi^r$ y en consecuencia $sen\,\frac{11}{4}\pi^r=sen\,\frac{\pi^r}{4}$, $cos\,\frac{11}{4}\pi^r=-cos\,\frac{\pi^r}{4}$, $tg\,\frac{11}{4}\pi^r=-tg\,\frac{\pi^r}{4}$, $ctg\,\frac{11}{4}\pi^r=-ctg\,\frac{\pi^r}{4}$, $sec\,\frac{11}{4}\pi^r=-sec\,\frac{\pi^r}{4}$ y $\csc\frac{11}{4}\pi^r=\csc\frac{\pi^r}{4}$, vea la *figura 4.19 d*.

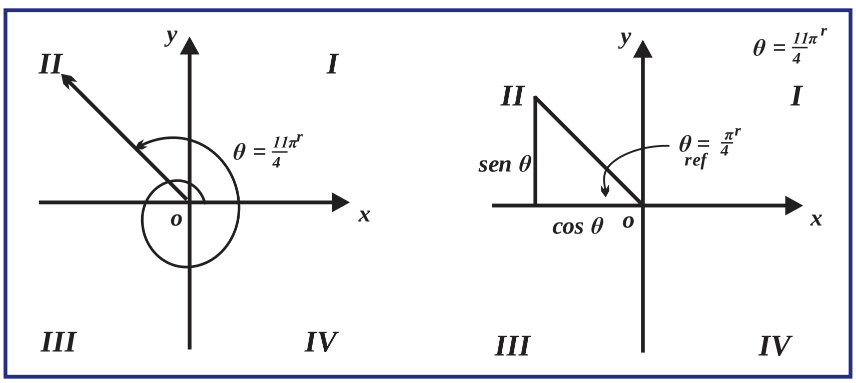


FIGURA 4.19 d.

e. El ángulo $\theta=-1.3\pi^r$ tiene lado terminal en el cuadrante II, así: $\theta_{ref}=\pi^r-(-1.3)\pi^r=2.3\pi^r$ y en consecuencia: $sen\left(-1.3\pi^r\right)=-sen\left(0.3\pi^r\right)$, $cos\left(-1.3\pi^r\right)=-cos\left(0.3\pi^r\right)$, $tg\left(-1.3\pi^r\right)=-tg\left(0.3\pi^r\right)$, $ctg\left(-1.3\pi^r\right)=-ctg\left(0.3\pi^r\right)$, $sec\left(-1.3\pi^r\right)=-sec\left(0.3\pi^r\right)$ y $csc\left(-1.3\pi^r\right)=-csc\left(0.3\pi^r\right)$, vea la *figura 4.19 e*.

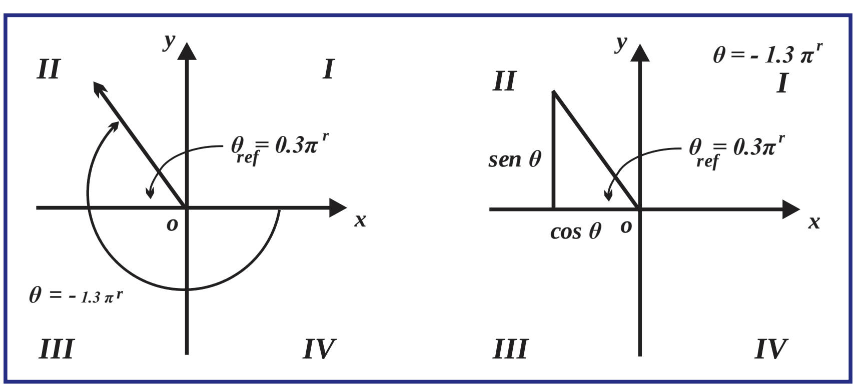


FIGURA 4.19 e.

f. El ángulo, en posición normal y medida $\theta = -2.6\pi^r$ tiene lado terminal en el cuadrante III, por tanto $\theta_{ref} = 0.4\pi^r$ y $sen\left(-2.6\pi^r\right) = sen\left(0.4\pi^r\right)$, $cos\left(-2.6\pi^r\right) = cos\left(0.4\pi^r\right)$, $tg\left(-2.6\pi^r\right) = tg\left(0.4\pi^r\right)$, vea la *figura 4.19 f*.

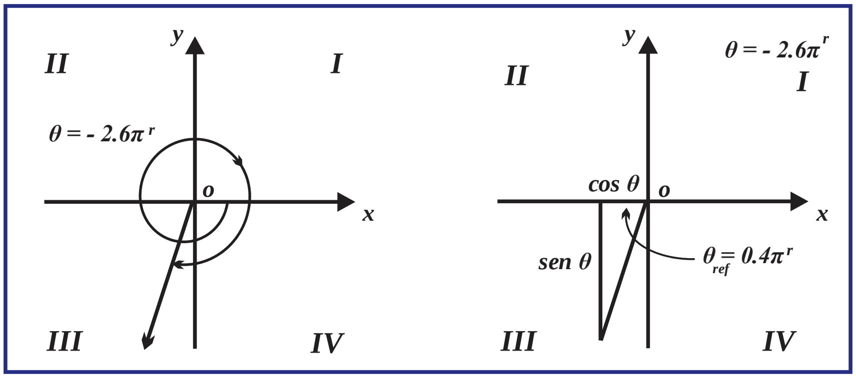


FIGURA 4.19 f.

g. El ángulo, en posición normal y medida $\theta = 1.3\pi^r$ está en el cuadrante III, por tanto $\theta_{ref} = 0.3\pi^r$, por lo que $tg\left(1.3^r\right) = tg\left(0.3\pi^r\right)$, vea la *figura 4.19 g*.

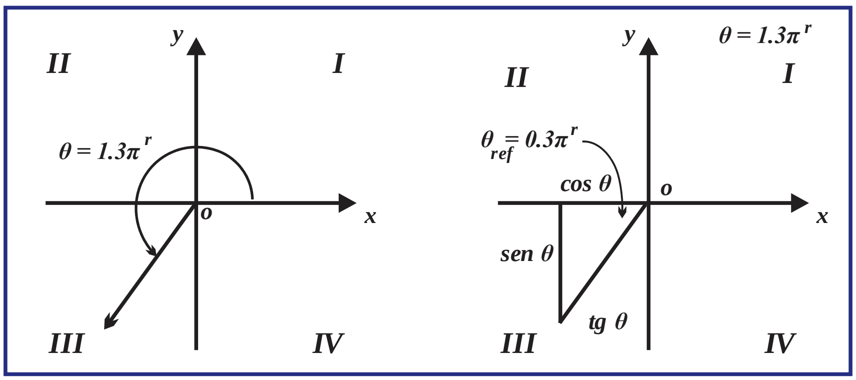


FIGURA 4.19 g.

□

¿Qué conceptos aprendí?

PARA COMPLETAR

1. En la función periódica _________________________ T recibe el nombre de periodo y tiene signo_________________________.

2. La amplitud de una función periódica se define como ____.

3. La curva correspondiente a una función periódica puede construirse a partir de _____________________________.

4. Un ángulo mide un radián, si sus lados determinan___________________________________.

5. Para transformar _________________________a radianes se utiliza la relación $\theta^r = \dfrac{\pi}{180}\theta^\circ$.

6. Si los lados de dos _______________________en posición normal coinciden, entonces son coterminales.

7. Sea $\angle\theta$ un ángulo colocado en __________________________________, el ángulo de referencia $\angle\theta_{ref}$ es el ángulo agudo positivo que forma el lado terminal del ángulo $\angle\theta$ con el eje x.

8. Las _________________________________ $\angle\theta = \angle BOA$ se definen en términos de la abscisa, la ordenada y la longitud de la hipotenusa $r = \sqrt{x^2 + y^2} \neq 0$.

CIERTO O FALSO (Justifique su respuesta)

1. Una función periódica puede tener periodo negativo.

2. la amplitud de una función periódica es positiva.

3. La amplitud de una función periódica es positiva.

4. Con la sección curva de curva de un periodo, de una función periódica, es posible trazar toda la curva asociada a una función periódica.

5. Las funciones periódicas tienen como variable independiente al tiempo.

6. Las funciones periódicas tienen como dominio a los números reales no negativos.

7. Las razones trigonométricas son también funciones trigonométricas.

8. Los términos de relación y razón trigonométrica son equivalentes.

PROBLEMAS PROPUESTOS 4.1

1. Un reloj (digital) tiene en su carátula los números 1, 3, $\cdots$, 12. Suponga que en este instante indica que son las 9 horas.
a. ¿Dentro de 3 horas, ¿qué hora indicará?
b. ¿Dentro de 9 horas, ¿qué hora indicará?
c. ¿Dentro de 12 horas, ¿qué hora indicará?
d. Trace la gráfica que describe la hora señalada por el reloj en un periodo de 12 horas a partir de la hora inicial.
e. Trace varios periodos.

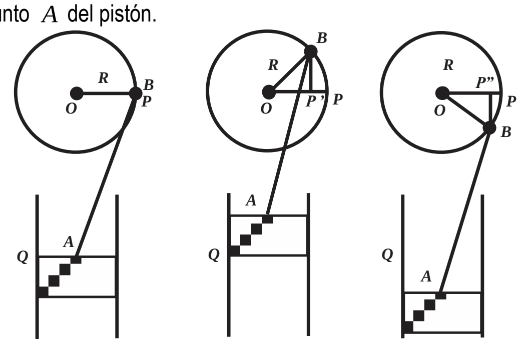
2. Una hormiga se desplaza, a velocidad constante, sobre una línea (de longitud igual a 20 centímetros, misma que recorre en 2 segundos), para luego retornar a la misma velocidad al punto inicial. Suponga que realiza este recorrido “muchas veces”.
a. Trace la “curva” que describe esta situación.
b. Determine la regla de correspondencia de la función que describe esta situación.

3. Suponga que cada dos segundos se emite una señal sonora cuya intensidad es constante y dura 3 segundos.
a. Trace la “curva” que describe la intensidad de la señal.
b. Determine la regla de correspondencia de la función que describe esta situación.

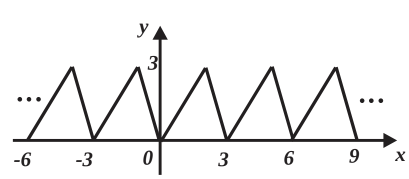
4. a. ¿Qué distancia recorre un triciclo si sus llantas tienen un radio exterior de 40 centímetros y éstas giran 40 veces?
b. ¿Qué distancia a recorrido el punto extremo de la manecilla de un reloj desde las cero horas hasta las $10:45$ horas?, suponga que la manecilla tiene una longitud de 12 centímetros.
c. ¿Qué distancia recorre un ciclista, si los radios exteriores de sus llantas son 29 centímetros y éstas dan 253 revoluciones?
d. De una pizza de forma circular de radio de longitud de 20 centímetros se ha cortado un rebanada que forma un ángulo central de 30 grados, suponga que la altura de la pizza mide 2 centímetros y es uniforme, ¿cuál es su volumen?
e. ¿Cuál es el volumen de una rebanada de pastel que forma un ángulo de 18 grados (es cilíndrico, su radio mide 18 y su altura mide 8 centímetros).

5. En un reloj analógico, considere el movimiento de las manecillas y el ángulo que forman respecto al segmento de recta de $6h \rightarrow 12h$. Determine la regla de correspondencia que describe el punto extremo de la manecilla en función del tiempo y trace la curva de la función.
a. Suponga que la longitud del minutero es 8 centímetros.
b. Suponga que la longitud del horario es 5 centímetros.

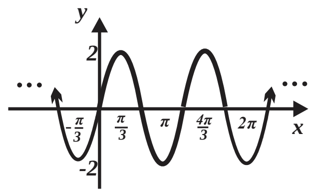
6. La siguiente figura representa un pistón, el punto B se desplaza sobre la circunferencia de radio OP, mismo que forma un ángulo de amplitud x respecto al segmento de recta OP que es paralelo a la parte superior del pistón. Q es el punto de equilibrio, para un periodo.
a. ¿En qué instantes el pistón tiene un menor desplazamiento?
b. ¿En qué instantes el pistón tiene un mayor desplazamiento?
c. Trace una curva aproximada, que describa el movimiento del punto A del pistón.



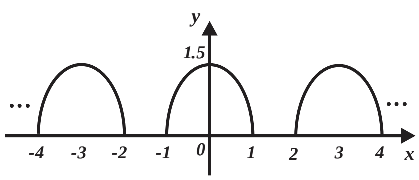
7. Determine el periodo y la amplitud.
a.



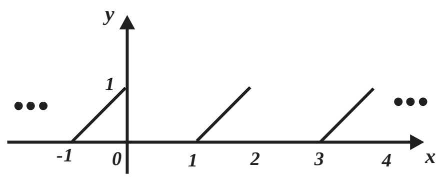
b.



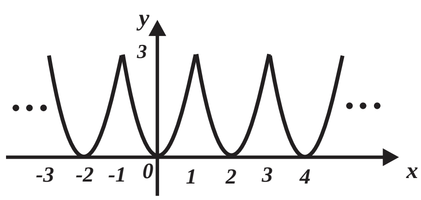
c.



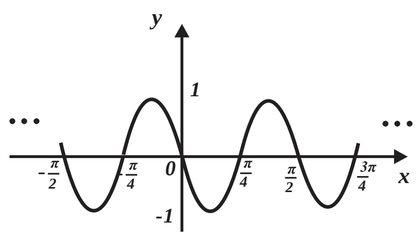
d.



e.



f.



8. Transforme a radianes.

a. $\theta = 5°$.
b. $\theta = 23°$.
c. $\theta = 98°$.
d. $\theta = 162°$.
e. $\theta = 191°$.
f. $\theta = 583°$.
g. $\theta = 883°$.
h. $\theta = -19°$.
i. $\theta = -87°$.
j. $\theta = -503°$.

9. Transforme a grados.

a. $\theta = 0.3^r$.
b. $\theta = 1.64^r$.
c. $\theta = 5.38^r$.
d. $\theta = 0.072^r$.
e. $\theta = 8.3^r$.
f. $\theta = -2.3^r$.
g. $\theta = -1.6^r$.

10. La longitud de un arco de circunferencia de radio r se calcula por medio de la función $l\left(\theta^r\right) = r \cdot \theta^r$. Determine la longitud de arco de las circunferencias:

a. $\theta = 30^0$ y $r = 4$.
b. $\theta = 120^0$ y $r = 2$.
c. $\theta = \frac{\pi}{2}$ y $r = 6$.
d. $\theta = \frac{14\pi}{9}$ y $r = 5$.

11. Un auto en una pista circular recorre un ángulo de $135°$ y barre un arco de longitud 54π.

a. Determine el radio de la pista circular.
b. Determine el área del sector circular recorrida.

12. Un caballo está amarrado a un poste con una cuerda de longitud "L", el caballo solo se puede movilizar en el área que la cuerda se lo permita. Si incrementamos 10 metros la longitud de la cuerda, el área por el cual se moviliza el caballo se cuadruplica. ¿Cuál es la longitud de la cuerda original?

13. a. El péndulo de un reloj al balancearse describe un ángulo de $20°$ y un arco de longitud 3π. ¿Cuál es la longitud del péndulo?
b. La llanta de una bicicleta de radio 0.4 metros recorre 5 vueltas por minuto ($5rpm$) ¿calcular la distancia que recorrió la llanta en 30 minutos?

14. El área de un sector circular de radio r, se calcula por medio de la función $s\left(\theta\right) = \frac{1}{2} r^2 \theta^r$. Determine el área de un sector circular:

a. $\theta = 15^0$ y $r = 4$.
b. $\theta = 110^0$ y $r = 2$.
c. $\theta = \frac{\pi}{9}$ y $r = 6$.
d. $\theta = \frac{20\pi}{9}$ y $r = 5$.

15. El área de un huso esférico (parte de la superficie de una esfera comprendida entre dos planos que se cortan en el diámetro) de radio r se calcula por medio de la función $A\left(\theta^r\right) = 4\pi r^2 \left(\frac{\theta^r}{2\pi}\right)$. Determine el área de un huso esférico si:

a. $\theta = 30^0$ y $r = 4$.
b. $\theta = 120^0$ y $r = 2$.
c. $\theta = \frac{\pi}{12}$ y $r = 6$.
d. $\theta = \frac{5\pi}{6}$ y $r = 5$.

16. El volumen V de una cuña esférica (de radio de longitud r) se calcula utilizando la función $V\left(\theta^r\right) = \frac{4}{3}\pi r^3 \left(\frac{\theta^r}{2\pi}\right)$.

Determine el volumen de una cuña esférica si:

a. $\theta = 45^0$ y $r = 2$.
b. $\theta = 120^0$ y $r = 2$.
c. $\theta = \frac{\pi}{12}$ y $r = 3$.
d. $\theta = \frac{4\pi}{3}$ y $r = 2$.

17. Determine la forma genérica y tres ángulos coterminales de:

a. $25°$.
b. $-43°$.
c. $112°$.
d. $-143°$
e. $210°$.
f. $-198°$.
g. $-313°$.

18. Determine el ángulo de referencia comprendido entre $0°$ y $360°$ coterminal a:

a. $\theta = 906°$. **d.** $\theta = 1520°$.
b. $\theta = 412°$. **e.** $\theta = -2140°$.
c. $\theta = -411°$. **f.** $\theta = 1310°$.

19. El lado terminal de un ángulo θ contiene al punto $P(-5, 7)$ determine:

a. $sen\,\theta$. **d.** $ctg\,\theta$.
b. $\cos\theta$. **e.** $\sec\theta$.
c. $tg\,\theta$. **f.** $\csc\theta$.

20. El lado terminal de un ángulo θ contiene al punto $P(4, -5)$ determine:

a. $sen\,\theta$. **d.** $ctg\,\theta$.
b. $\cos\theta$. **e.** $tg\,\theta$.
c. $\sec\theta$. **f.** $\csc\theta$.

21. Rescriba en términos del ángulo de referencia, incluya el signo correspondiente.

a. $sen\,106°$. **d.** $tg\,(-206°)$.
b. $\cos(-28°)$. **e.** $sen\,415°$.
c. $tg\,477°$. **f.** $\cos 713°$.

22. Rescriba las razones trigonométricas en términos del ángulo de referencia, incluya el signo correspondiente.

a. $sen\,336°$. **d.** $sen\,(-772°)$.
b. $\cos(-258°)$. **e.** $tg\,477°$.
c. $tg\,448°$. **f.** $\cos(-1028°)$.

23. Rescriba las razones trigonométricas en términos del ángulo de referencia, incluya el signo correspondiente.

a. $\cos\left(\frac{5}{4}\pi^r\right)$. **c.** $tg\left(-\frac{8}{3}\pi^r\right)$.
b. $sen\left(\frac{18}{7}\pi^r\right)$. **d.** $sen\left(-\frac{21}{13}\pi^r\right)$.

24. Rescriba las razones trigonométricas en términos del ángulo de referencia, incluya el signo correspondiente.

a. $sen\left(-\frac{22}{7}\pi^r\right)$. **c.** $tg\left(\frac{21}{5}\pi^r\right)$.
b. $\cos\left(-\frac{18}{8}\pi^r\right)$. **d.** $\cos\left(\frac{13}{3}\pi^r\right)$.

AUTOEVALUACIÓN

1. Trace la gráfica de una función periódica que tenga periodo $T = 2$ y amplitud $A = 1$.

2. Una función periódica tiene periodo $T = 3$ y amplitud $A = 2$, si $f(4) = 1$ ¿cuál es la imagen de $f(7) = 1$?

3. ¿Qué es un movimiento oscilatorio?

4. ¿Qué es un radián?

5. Transforme a grados $\frac{\pi}{8}^r$.

6. Transforme a radianes $-386°$.

7. Determina la forma genérica de todos los ángulos coterminales a $\theta = \frac{\pi}{4}^r$.

8. Determina los valores de las razones trigonométricas asociadas a un ángulo de un triángulo rectángulo con hipotenusa de longitud uno y cateto opuesto de longitud 0.5.

9. Rescriba la razón trigonométrica en términos del ángulo de referencia, incluya $sen\left(-\frac{10}{7}\pi^r\right)$ el signo correspondiente.

10. El volumen V de una manzana puede modelarse a de una esfera. Un gajo de la manzana tiene forma de cuña esférica (de radio de longitud r) se calcula por medio de la función $V(\theta^r) = \frac{4}{3}\pi r^3\left(\frac{\theta^r}{2\pi}\right)$. Determine el volumen de un gajo de manzana si $\theta = 30^0$ y $r = 4$ centímetros.

4.2 FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS Y APLICACIONES

APRENDIZAJES

4. Extenderá el concepto de razón trigonométrica a función, mediante la elaboración de una tabla o gráfica de: $f(x) = sen\, x$, $g(x) = cos\, x$.

5. Analizará e identificará los parámetros que aparecen en las funciones: $f(x) = Asen(Bx - C) + D$ **y** $g(x) = Acos(Bx - C) + D$, A **como amplitud,** B **frecuencia,** D **desplazamiento vertical y desfasamiento.**

6. Utilizará las funciones trigonométricas para representar fenómenos de variación periódica.

Un concepto de mayor formalidad y acabado que el de relación trigonométrica es el de función trigonométrica, mismo que desarrollaremos en la presente sección. La *circunferencia unitaria* es el eslabón entre las razones trigonométricas (que están definidas con base a un triángulo rectángulo) y las funciones trigonométricas. En la circunferencia unitaria la longitud de un arco es numéricamente igual a la amplitud (medida en radianes) del ángulo central que subtiende (vea la *figura 4.20*), esto implica que un ángulo (medido en radianes) es equivalente a un segmento de la "recta numérica", en consecuencia la unión de un "número infinito" de estos arcos equivale a la recta numérica.

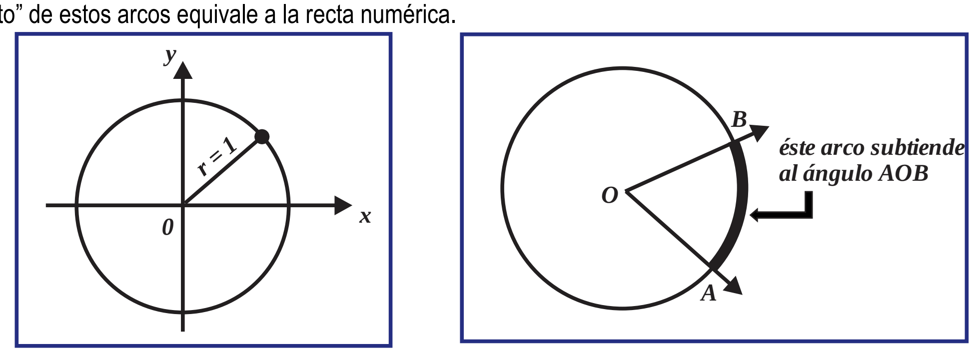


FIGURA 4.20

La *figura 4.21* muestra la relación entre la longitud de un arco de la circunferencia de radio uno y la recta real IR, note que la recta real IR es tangente a la circunferencia de radio uno en el punto $A(1,0)$, punto a partir del que se miden los ángulos positivos. Así, cada punto t en la recta numérica tiene asociado un punto de la circunferencia unitaria (por consecuencia un ángulo medido en radianes) y viceversa, cada punto $P(x,y)$ en la circunferencia de radio uno tiene asociado un punto t en la recta numérica.

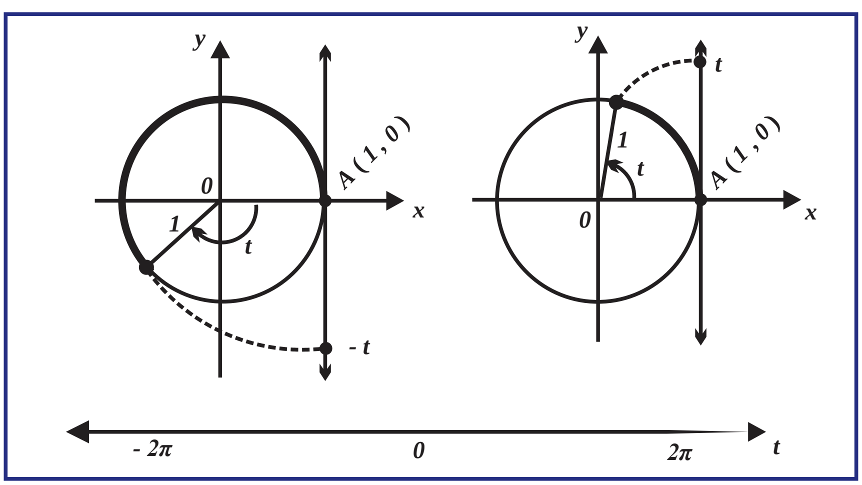


FIGURA 4.21

¡Los radianes relacionan la longitud de un arco de una circunferencia con un número real!

En la *figura 4.22*, O es el origen, el punto P pertenece a la circunferencia de radio uno y Q es la proyección (perpendicular) del punto P en el eje x, estos tres puntos definen el triángulo OPQ. Utilizando las razones trigonométricas $sen\, t = \dfrac{longitud\ \ del\ \ cateto\ \ opuesto}{longitud\ \ de\ \ la\ \ hipotenusa}$, $cos\, t = \dfrac{longitud\ \ del\ \ cateto\ \ adyascente}{longitud\ \ de\ \ la\ \ hipotenusa}$ y considerando que la hipotenusa es el radio del círculo obtenemos: $\left|\overline{PQ}\right| = sen\, t$ y $\left|\overline{OQ}\right| = cos\, t$.

Note que las longitudes de los segmentos (dirigidos por lo que admiten signo negativo) $\overline{PQ}$ y $\overline{OQ}$ dependen (son función) de la amplitud del ángulo t, es decir $\left|\overline{PQ}(t)\right| = sen\, t$ y $\left|\overline{OQ}(t)\right| = cos\, t$. En la circunferencia de radio uno mostrado en la *figura 4.22*, la longitud del segmento dirigido $\overline{PQ}$ (altura del triángulo OPQ) es el valor de la función $f_0(t) = sen\, t$ para el ángulo específico t. También, la longitud del segmento de recta dirigido $\overline{OQ}$ (base del triángulo OPQ) es la imagen de la función $f(t) = cos\, t$ para el ángulo específico t. Puesto que el punto P pertenece a la circunferencia de radio uno y puede rotarse tantas veces como se desee el dominio de las funciones $f(t) = sen\, t$ y $g(t) = cos\, t$ es el conjunto de los números reales ($dom(sen\, t) = IR$ y $dom(cos\, t) = IR$). La *figura 4.22* también muestra que en el círculo unitario, la longitud del segmento dirigido $\overline{PQ}$ (altura del triángulo OPQ) varía entre -1 y 1, en consecuencia $img(sen\, t) = [-1, 1]$, lo mismo ocurre con la longitud del segmento dirigido $\overline{OQ}$ (base del triángulo OPQ), en consecuencia $img(cos\, t) = [-1, 1]$.

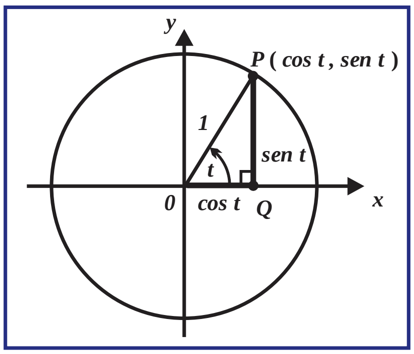


FIGURA 4.22

La *definición 4.7* formaliza las observaciones anteriores.

Definición 4.7 (FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS SENO Y COSENO)

Sea t un número real y $P(x, y)$ el punto terminal del radio correspondiente al ángulo $\angle t$ en la circunferencia unitaria, entonces:

a. La función seno tiene regla de correspondencia $f_0(t) = sen\, t$, $dom(sen\, t) = IR$, e $img(sen\, t) = [-1, 1]$.

b. La función coseno tiene regla de correspondencia $g_0(t) = cos\, t$, $dom(cos\, t) = IR$ e $img(cos\, t) = [-1, 1]$.

En el círculo unitario mostrado en la *figura 4.23*, justifica los valores de las funciones trigonométricas de la *tabla 4.1*.

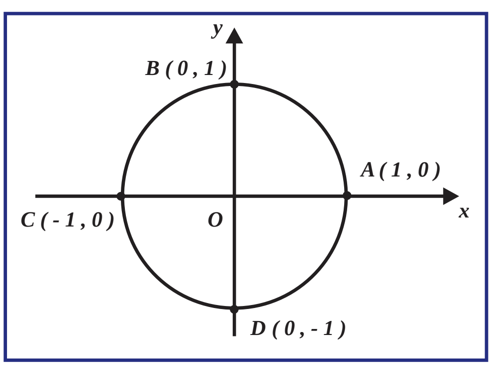


FIGURA 4.23

Ángulo	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π
$sen\, t$	0	1	0	–1	0
$cos\, t$	1	0	–1	0	1

TABLA 4.1

Es posible obtener algunas imágenes de $f_0(t) = sen\, t$ y $g_0(t) = cos\, t$ utilizando consideraciones geométricas, por ejemplo, las imágenes de $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{4}$ y $\frac{\pi}{3}$, la *figura 4.24.* se toma como base para este propósito.

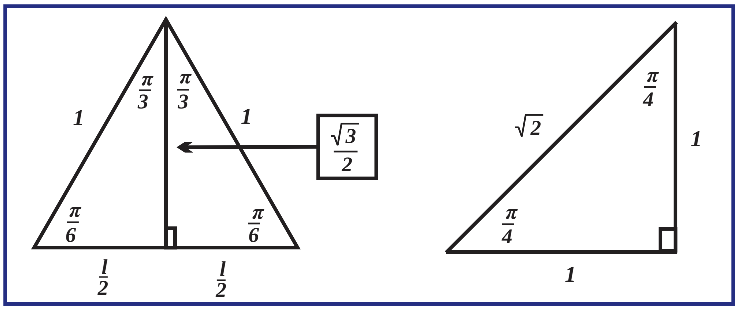


FIGURA 4.24

Las imágenes de las funciones trigonométricas $f_0(t) = sen\, t$ y $g_0(t) = cos\, t$, para las asignaciones $t = \frac{\pi}{6}$, $t = \frac{\pi}{4}$ y $t = \frac{\pi}{3}$ se presentan en la *tabla 4.2*.

t	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
$sen\, t$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$cos\, t$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$

TABLA 4.2

La *tabla 4.3* describe los comportamientos de $f_0(t) = sen\, t$ y $g_0(t) = cos\, t$, sobre el intervalo $[0, 2\pi]$.

Intervalo para t	$f(t) = sen\, t$	$f(t) = cos\, t$
$\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$	crece desde 0 hasta 1.	decrece desde 1 hasta 0
$\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$	decrece desde 1 hasta 0.	decrece desde 0 hasta -1.
$\left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$	decrece desde 0 hasta -1.	crece desde -1 hasta 0.
$\left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$	crece desde -1 hasta 0.	crece desde 0 hasta 1.

TABLA 4.3

Como consecuencia de la información antes obtenida, las curvas asociadas a $f_0(t) = sen\, t$ y $g_0(t) = cos\, t$, sobre el intervalo $[0, 2\pi]$ tienen el comportamiento mostrado en la *figura 4.25*.

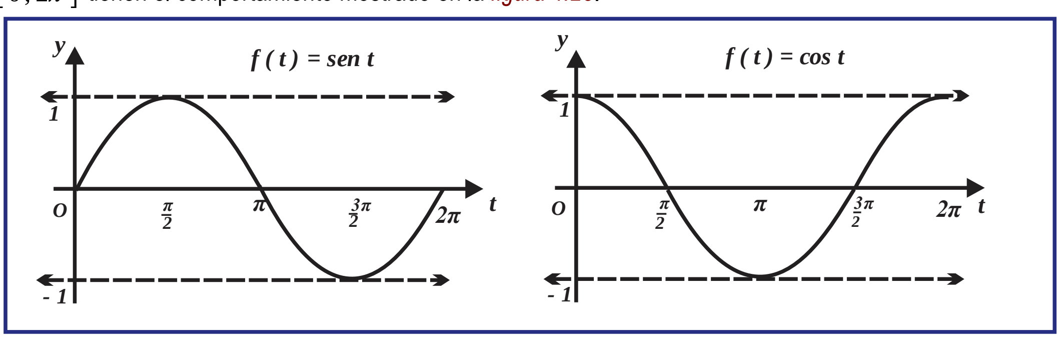


FIGURA 4.25

La *figura 4.26* muestra que el punto P genera un triángulo rectángulo en el que la base mide $\cos t$ y la altura mide $\operatorname{sen} t$, si este punto (a partir de su posición antes descrita y sobre la circunferencia unitaria) se rota $t = 2\pi$ radianes (ya sea en forma positiva o en forma negativa), para generar el punto P', entonces los puntos P y P' coinciden, por tanto

$\operatorname{sen} t = \operatorname{sen}(t+2\pi)$ y $\cos t = \cos(t+2\pi)$ ó $\operatorname{sen} t = \operatorname{sen}(t-2\pi)$ y $\cos t = \cos(t-2\pi)$, respectivamente.

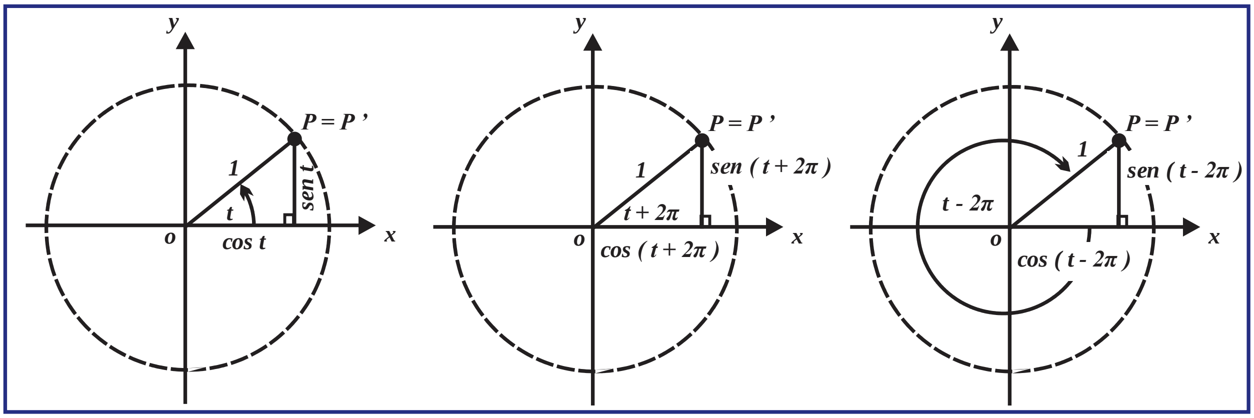


FIGURA 4.26

Si el punto P da n giros, entonces $f_0(t) = \operatorname{sen} t = \operatorname{sen}(t \pm 2n\pi)$ y $g_0(t) = \cos t = \cos(t \pm 2n\pi)$. Por tanto, las funciones $f_0(t) = \operatorname{sen} t$ y $g_0(t) = \cos t$ son periódicas y tienen periodo $T = 2\pi$. La *figura 4.27* muestra una parte de las curvas asociada a $f_0(t) = \operatorname{sen} t$ y $g_0(t) = \cos t$.

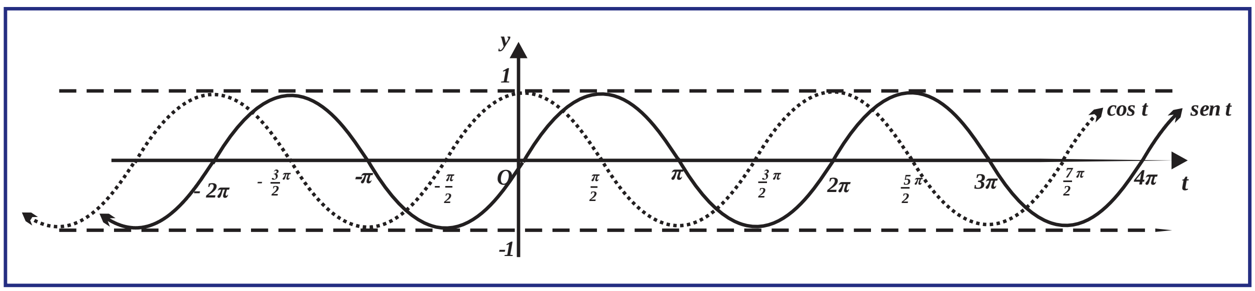


FIGURA 4.27

PARA REFLEXIONAR

¿? ¿Cuál es la diferencia entre una relación y una función?

A partir de cada relación trigonométrica se puede definir una función trigonométrica, sin embargo, las restantes funciones trigonométricas se definen en términos de las funciones $f_0(t) = \operatorname{sen} t$ y $g_0(t) = \cos t$, por ejemplo, la función trigonométrica "tangente" se define en términos de la división de las funciones $f_0(t) = \operatorname{sen} t$ y $g_0(t) = \cos t$, es decir, $h(t) = tg\, t = \dfrac{\operatorname{sen} t}{\cos t}$, la *definición 4.8* formaliza estas observaciones.

Definición 4.8 (FUNCIÓN TANGENTE)

Sea t un número real, tal que $t \neq \pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{3\pi}{2}, \pm\frac{5\pi}{2}, \pm\frac{7\pi}{2}, \ldots$, entonces la función tangente tiene regla de correspondencia $h_0(t) = tg\, t = \dfrac{\operatorname{sen} t}{\cos t}$.

PARA REFLEXIONAR

¿? En la definición anterior, ¿por qué es necesario que $t \neq \pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{3\pi}{2}, \pm\frac{5\pi}{2}, \pm\frac{7\pi}{2}, \ldots$?

Para trazar la curva asociada a $h_0(t)=tg\,t$, tomaremos como base la *figura 4.28*, observe que la imagen bajo $h_0(t)=tg\,t$ del ángulo central t, corresponde a la longitud del segmento de recta con extremos en los puntos $Q(1,0)$ y $R(1,y)$. En el primer cuadrante la longitud del segmento de recta $\overline{QR}$ aumenta al incrementarse la amplitud del ángulo t y lo hace ilimitadamente, en el cuarto cuadrante la longitud del segmento de recta $\overline{QR}$ aumenta (en forma negativa) ilimitadamente al incrementarse la amplitud del ángulo t.

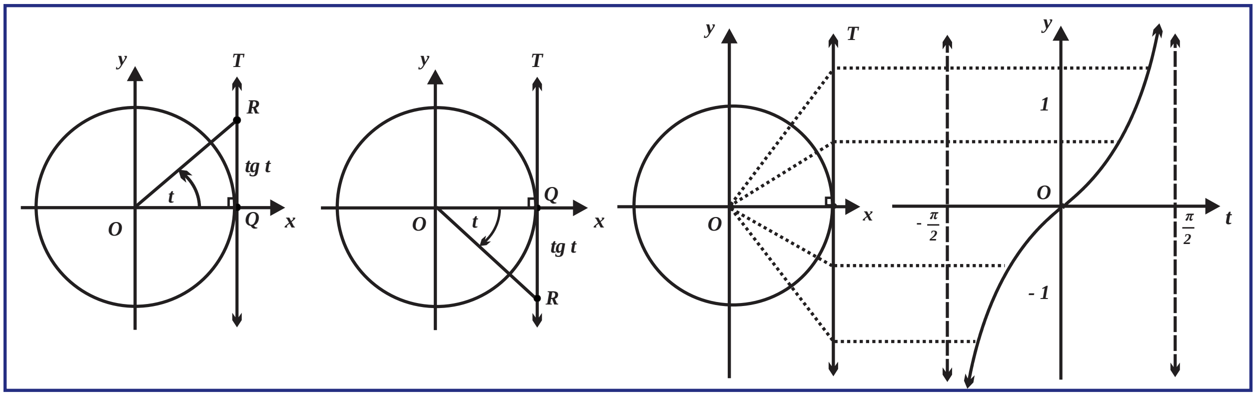


FIGURA 4.28

La curva asociada a la función $h_0(t)=tg\,t$ es periódica, con periodo $T=\pi$. Es creciente, tiene como asíntotas verticales a las rectas de ecuaciones $x=-\frac{\pi}{2}$ y $x=\frac{\pi}{2}$. Su dominio son todos los números reales excepto los de la forma $(2n+1)\frac{\pi}{2}$ donde n es un número entero. Su conjunto imagen es $img(tg\,t)=IR$. La curva correspondiente se muestra en la *figura 4.29*.

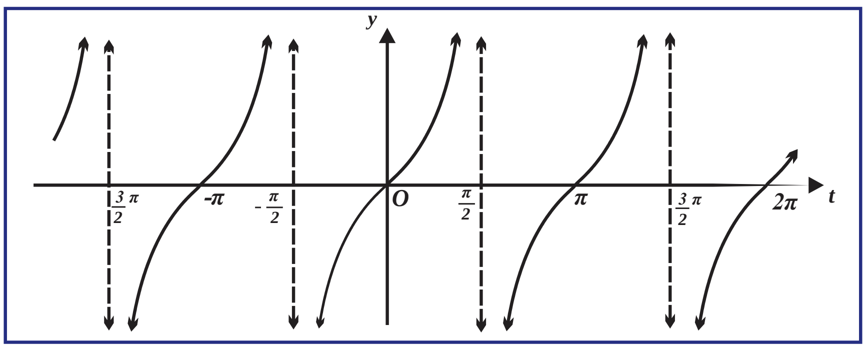


FIGURA 4.29

¿Qué otras características identifican a una función circular?

Continuamos nuestro estudio de las funciones trigonométricas analizando el papel que desempeñan los parámetros A, B y C en la forma de la curva asociada a cada una de las de las funciones $f(t)=A sen(Bt+C)$ y $g(t)=A cos(Bt+C)$, mismas que se denominan funciones senoidales (o cosenoidales).

Dado que el conjunto imagen de las funciones $f_0(t)=sen\,t$ y $g_0(t)=cos\,t$ es el intervalo $[-1,1]$, entonces las imágenes de las funciones $f(t)=A sen\,t$ y $g(t)=A cos\,t$ es el intervalo $[-A,A]$. El parámetro A tiene los siguientes efectos en las curvas asociadas a $f_0(t)=sen\,t$ y $g_0(t)=cos\,t$:

i. Si $A>1$, la curva asociada a $f(t)=A sen\,t$ (o en su caso, de $g(t)=A cos\,t$) representa un "alargamiento" vertical de A unidades de la curva asociada a $f_0(t)=sen\,t$ (o en su caso, de $g(t)=cos\,t$).

ii. Si $0<A<1$, la curva asociada a $f(t)=A sen\,t$ (o en su caso, de $g(t)=A cos\,t$) consiste en una "contracción" vertical de A unidades de la curva asociada a $f_0(t)=sen\,t$ (o de la curva asociada a $g_0(t)=cos\,t$).

iii. Si $A<0$, además de los efectos antes señalados es necesario agregar una rotación de π radianes respecto al eje de las abscisas, vea la *figura 4.30*.

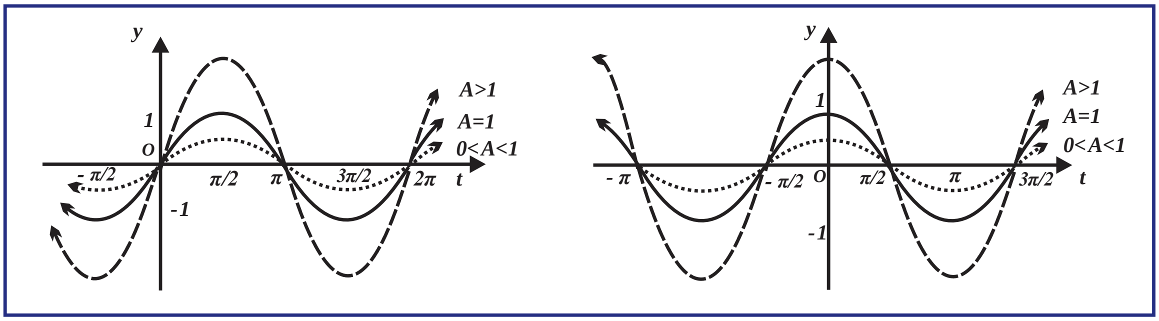


FIGURA 4.30

De acuerdo con la *definición 4.1*, la amplitud de las funciones $f(t)=A\,sen\,t$ y $g(t)=A\cos t$, es $|A|$.

EJEMPLO 4.8 (Amplitud)

a. $g(t)=-2\cos t$ oscila entre -2 y 2, tiene amplitud $A=|-2|=2$.

b. $f(t)=-\dfrac{2}{3}sen\,t$ oscila entre $-\dfrac{2}{3}$ y $\dfrac{2}{3}$, su amplitud es $A=\left|-\dfrac{2}{3}\right|=\dfrac{2}{3}$.

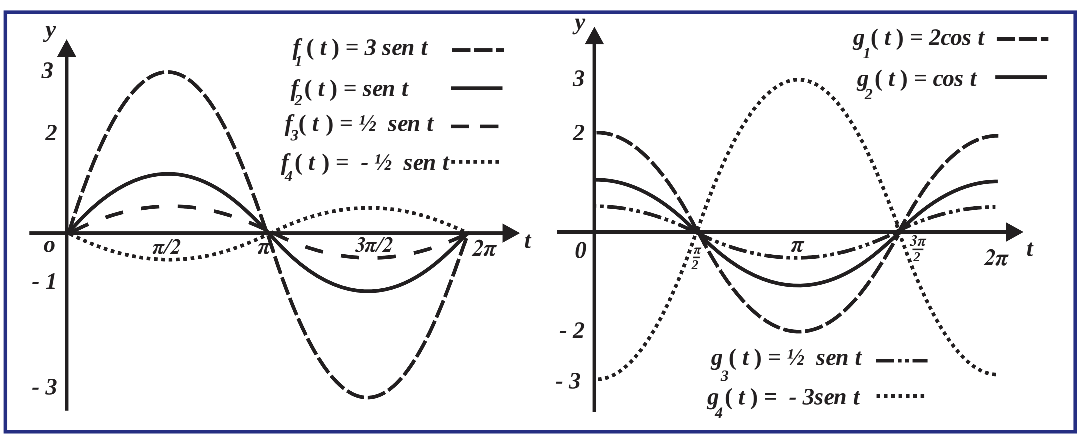
c. $f(t)=\dfrac{1}{2}sen\,t$ oscila entre $-\dfrac{1}{2}$ y $\dfrac{1}{2}$, su amplitud es $A=\left|-\dfrac{1}{2}\right|=\dfrac{1}{2}$.

□

EJEMPLO 4.9 (Efecto gráfico de la amplitud)

a. La *figura 4.31.a*. muestra un periodo de las curvas asociadas a $f_1(t)=3sen\,t$, $f_2(t)=sen\,t$, $f_3(t)=\dfrac{1}{2}sen\,t$ y $f_4(t)=-\dfrac{1}{2}sen\,t$.

b. La *figura 4.31.b*. muestra un periodo de las curvas asociadas a $g_1(t)=2\cos t$, $g_2(t)=\cos t$, $g_3(t)=\dfrac{1}{2}\cos t$, y $g_4(t)=-3\cos t$.



a. **b.**

FIGURA 4.31

USO DE SOFTWARE DE MATEMÁTICAS

Trace las curvas asociadas de las funciones senoidales de los incisos *a.* y *b.* y compare las curvas con las obtenidas en este ejemplo.

□

Las funciones senoidales $f(t)=A\,sen\,t$ y $g(t)=A\cos t$ tienen periodo $T=2\pi$, periodo que se completa sobre el intervalo $[0\,,\,2\pi]$, por tanto las funciones senoidales $f_1(t)=A\,sen\,Bt$ y $g_1(t)=A\cos Bt$, en los extremos del intervalo $[0\,,\,2\pi]$

asumen los valores $Bt=0$ y $Bt=2\pi$, es decir, la variable t cambia desde $t=0$ hasta $t=\frac{2\pi}{B}$ por lo que un periodo se completa en el intervalo $\left[\,0\,,\,\frac{2\pi}{B}\,\right]$.

Un periodo de $f_1(t)=A\,sen\,Bt$ (o de $g_1(t)=A\cos Bt$), en donde $B>0$, ocurre en el intervalo $\left[\,0\,,\,\frac{2\pi}{B}\,\right]$.

Las observaciones anteriores se formalizan en la *definición 4.9*.

Definición 4.9 (PERIODO DE LAS FUNCIONES SENOIDALES)

a. El periodo de las funciones senoidales $f_1(t)=A\,sen\,Bt$ y $g_1(t)=A\cos Bt$ es $T=\frac{2\pi}{B}$.

b. Un periodo de las funciones senoidales $f_1(t)=A\,sen\,Bt$ y $g_1(t)=A\cos Bt$ ocurre en el intervalo $\left[\,0\,,\,\frac{2\pi}{B}\,\right]$.

PARA REFLEXIONAR

¿Cómo se determina el número de periodos de una función senoidal sobre el intervalo $\left[\,0\,,\,\frac{2\pi}{B}\,\right]$?

EJEMPLO 4.11 (Numero de periodos)

a. Si $f(t)=A\,sen\,5t$, entonces $T=\frac{2\pi}{5}$ y el intervalo $[\,0\,,\,2\pi\,]$ contiene cinco periodos.

b. Si $f(t)=A\,sen\,\frac{2}{3}t$, entonces $T=\frac{2\pi}{\frac{2}{3}}=3\pi$ por lo que en el intervalo $[\,0\,,\,3\pi\,]$ ocurre un periodo.

□

NOTA

Si $f_1(t)=A\,sen\,Bt$ (ó $g_1(t)=A\cos Bt$), entonces $|B|\neq 0$ indica el número de veces (ó la fracción) en que un periodo de $f_1(t)=A\,sen\,Bt$ (ó de $g_1(t)=A\cos Bt$) está contenido en el intervalo $[\,0\,,\,2\pi\,]$.

Relacionado al periodo de una curva senoidal (o cosenoidal) se encuentra la frecuencia, el parámetro B de la función trigonométrica $f_1(t)=A\,sen\,Bt$ (o $g_1(t)=A\cos Bt$) indica el número de veces (o en su caso la proporción) en que se puede trazar un periodo sobre el intervalo $[\,0\,,\,2\pi\,]$ por lo que su "valor absoluto" recibe el nombre de frecuencia.

Definición 4.10 (FRECUENCIA)

En $f_1(t)=A\,sen\,Bt$ (ó $g_1(t)=A\cos Bt$) el número $|B|$, se denomina frecuencia.

Con base en el estudio antes realizado, la introducción del parámetro $B>0$ en $f(t)=A\,sen\,t$ ó $g(t)=A\cos t$ (lo que genera las funciones $f_1(t)=A\,sen\,Bt$ y $g_1(t)=A\cos Bt$) tiene los siguientes efectos:

i. Si $B>1$, entonces $T=\frac{2\pi}{B}$ es menor que 2π y la curva asociada a $f_1(t)=A\,sen\,Bt$ (o la asociada a $g_1(t)=A\cos Bt$) está "contraída horizontalmente" respecto a la curva asociada a $f(t)=A\,sen\,t$ (o la asociada a $g(t)=A\cos t$).

ii. Si $0<B<1$, entonces $T=\frac{2\pi}{B}$ es mayor que 2π, lo que significa que la curva asociada a $f_1(t)=A\,sen\,Bt$ (o a la curva asociada a $g_1(t)=A\cos Bt$) está "alargada horizontalmente" respecto a la curva asociada a $f(t)=A\,sen\,t$ (o a la curva asociada a $g(t)=A\cos t$).

EJEMPLO 4.12 (Efecto del parámetro B)

a. Si $f(t)=2\cos\frac{1}{3}t$, entonces $B=\frac{1}{3}$ y $T=\frac{2\pi}{\frac{1}{3}}=6\pi$, por tanto en el intervalo $[\,0\,,\,2\pi\,]$ contiene $\frac{1}{3}$ de periodo y completo ocurre en el intervalo $[\,0\,,\,6\pi\,]$.

b. En $g(t) = -3\,sen\,4t$, $B = 4$ y $T = \frac{2\pi}{4} = \frac{1}{2}\pi$, entonces el intervalo $[0\ ,\ 2\pi]$ contiene $B = 4$ periodos.

c. Un periodo de las curvas asociadas a $f(t) = A\,sen\,2t$, $f(t) = A\,sen\,t$, $f(t) = A\,sen\,\frac{1}{3}t$, $f(t) = A\,sen\,\frac{1}{2}t$ y $f(t) = A\,sen\,\frac{2}{5}t$, con $A > 0$ se muestran en la *figura 4.32.*

d. Un periodo de las curvas asociadas a $f(t) = A\cos 2t$, $f(t) = A\cos t$, $f(t) = A\cos\frac{1}{3}t$, $f(t) = A\cos\frac{1}{2}t$ y $f(t) = A\cos\frac{2}{5}t$, donde $A > 0$ se muestran en la *figura 4.33.*

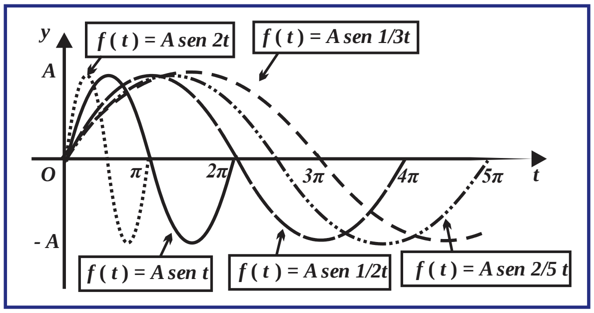


FIGURA 4.32

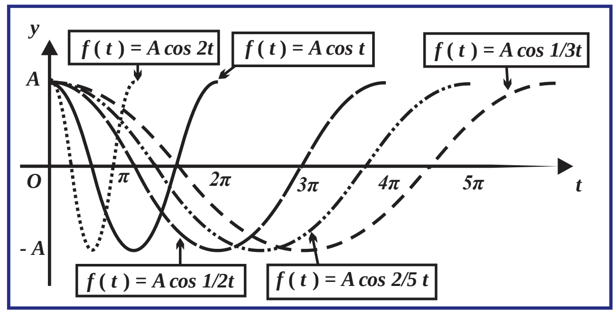


FIGURA 4.33

USO DE SOFTWARE DE MATEMÁTICAS

Trace las curvas asociadas a las funciones senoidales de los incisos *a.* y *b.*, y compárelas con las curvas obtenidas en este ejemplo.

□

PARA REFLEXIONAR

¿? ¿Cómo trazaría las curvas asociadas a las funciones senoidales del ejemplo anterior si $A < 0$?

EJEMPLO 4.13 (Efecto del parámetro B)

a. Si $f(t) = 3\,sen\,2t$, entonces $A = 3$, $B = 2$ y $T = \pi$. La curva asociada se obtiene transformando la curva de $f(t) = sen\,t$, se "estira verticalmente" hasta que su amplitud sea $A = 3$, luego se comprime horizontalmente de manera que su periodo cubra exactamente una vez en el intervalo $[0\ ,\ \pi]$, y finalmente, el periodo de la curva obtenida se coloca varias veces (una tras otra) de forma que cubra la recta real, *vea la figura 4.34*.

b. En $f(t) = 2\cos\frac{1}{3}t$, $A = 2$, $B = \frac{1}{3}$ y $T = 6\pi$. La curva asociada se construye como sigue: tome un periodo de la curva de $f(t) = \cos t$, "estírelo" verticalmente hasta que alcance amplitud $A = 2$, luego "estírelo horizontalmente" de manera que cubra exactamente una vez el intervalo $[0\ ,\ 6\pi]$, finalmente, el periodo de la curva obtenida se coloca varias veces (una tras otra) de modo que cubra la recta real, *vea la figura 4.35*.

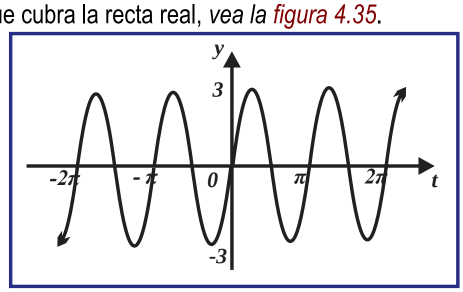


FIGURA 4.34

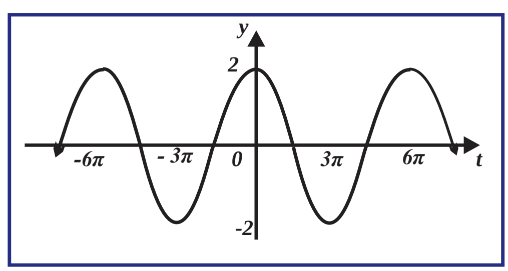


FIGURA 4.35

USO DE SOFTWARE DE MATEMÁTICAS

Trace las curvas asociadas a las funciones senoidales de los incisos *a.* y *b.*, y compárelas con las curvas obtenidas en este ejemplo.

□

Ahora vamos a establecer las diferencias entre las curvas asociadas a $f_2(t)=A\,sen\,Bt$, $g_2(t)=A\cos Bt$ y $f_3(t)=A\,sen(Bt-C)$ y $g_3(t)=A\cos(Bt-C)$. Puesto que $f_2(t)=A\,sen\,t$ y $g_2(t)=A\cos t$ completan un periodo en el intervalo $\left[0\,,\frac{2\pi}{B}\right]$, entonces $f_3(t)=A\,sen(Bt-C)$ y $g_3(t)=A\cos(Bt-C)$ lo completan cuando $Bt-C=0$ y $Bt-C=2\pi$, es decir, sobre el intervalo $\left[\frac{C}{B}\,,\frac{C}{B}+\frac{2\pi}{B}\right]$, ¡note que éste último intervalo representa un desplazamiento de $\frac{C}{B}$ unidades del intervalo $\left[0\,,\frac{2\pi}{B}\right]$! La introducción del parámetro C en una función senoidal se manifiesta gráficamente como un desplazamiento horizontal de $\frac{C}{B}$ unidades respecto a las curvas $f(t)=A\,sen\,Bt$ y en $f(t)=A\cos Bt$, respectivamente. Este desplazamiento recibe el nombre de fase.

Definición 4.11 (FASE)

En $f_3(t)=A\,sen(Bt-C)$ y $g_3(t)=A\cos(Bt-C)$, entonces el número $\frac{C}{B}$ se denomina fase (o corrimiento de fase).

Una función con regla de correspondencia de la forma $f_2(t)=A\,sen(Bt-C)$ (ó $g_2(t)=A\cos(Bt-C)$) se denomina senoidal (o cosenoidal).

La *figura 4.36* ilustra la fase (corrimiento de fase) de las funciones $f_2(t)=A\,sen(Bt-C)$ y $g_2(t)=A\cos(Bt-C)$.

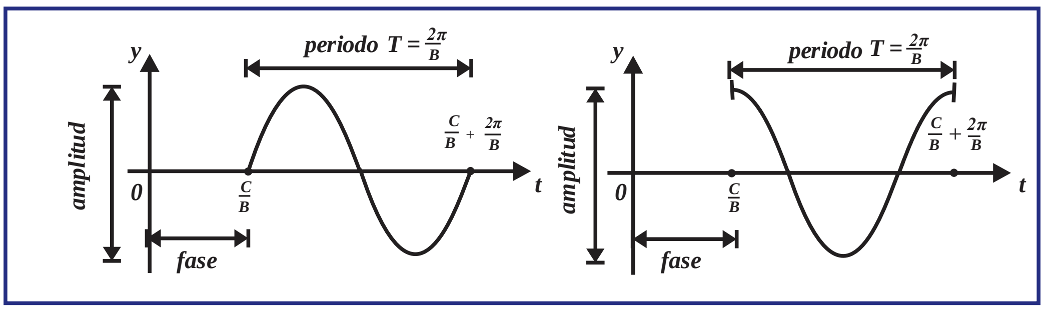


FIGURA 4.36

PARA REFLEXIONAR

¿? ¿Cuál es el valor de la fase entre las funciones $f_2(t)=A\,sen\,t$ y $g_2(t)=A\cos t$?

EJEMPLO 4.14 (Trazo de la gráficas de funciones senoidales)

a. Para trazar un periodo de la curva asociada a $f(t)=sen\left(t-\frac{\pi}{3}\right)$, notemos que tiene amplitud $A=1$, tiene periodo $T=\frac{2\pi}{B}=2\pi$ y fase $\frac{C}{B}=\frac{\pi}{3}$; de $t-\frac{\pi}{3}=0$ y $t-\frac{\pi}{3}=2\pi$ obtenemos $t=\frac{\pi}{3}$ y $t=\frac{7\pi}{3}$, entonces un periodo cubre el intervalo $\left[\frac{\pi}{3}\,,\frac{7\pi}{3}\right]$, vea la *figura 4.37*.

b. Para trazar un periodo de la curva asociada a $g(t)=\cos\left(t-\frac{\pi}{5}\right)$, notemos que la amplitud es $A=1$, el periodo es $T=\frac{2\pi}{B}=2\pi$ y la fase es $\frac{C}{B}=\frac{\pi}{5}$; de $t-\frac{\pi}{5}=0$ y de $t-\frac{\pi}{5}=2\pi$ obtenemos $t=\frac{\pi}{5}$ y $t=\frac{11\pi}{5}$, por tanto, en el intervalo $\left[\frac{\pi}{5}\,,\frac{11\pi}{5}\right]$ ocurre un periodo, vea la *figura 4.38*.

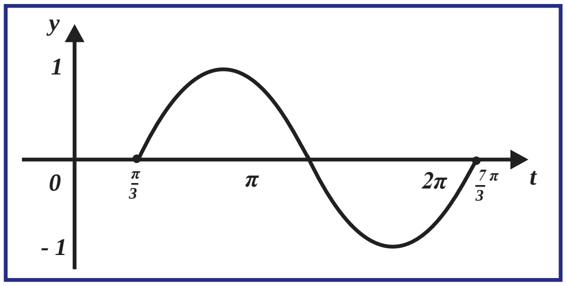


FIGURA 4.37

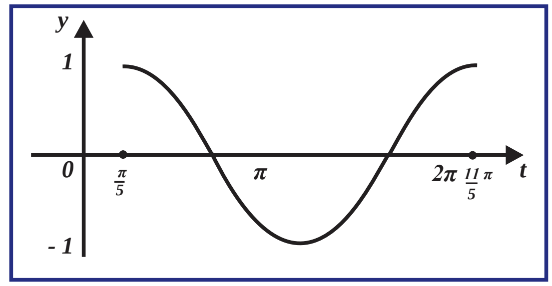


FIGURA 4.38

c. Para trazar un periodo de la curva asociada a $f(t)=-\frac{2}{3}sen\left(t+\frac{\pi}{4}\right)$, notemos que la amplitud es $A=\frac{2}{3}$, el periodo es $T=\frac{2\pi}{B}=2\pi$ y la fase es $\frac{C}{B}=-\frac{\pi}{4}$; de $t+\frac{\pi}{4}=0$ y de $t+\frac{\pi}{4}=2\pi$ obtenemos $t=-\frac{\pi}{4}$ y $t=\frac{7\pi}{4}$, por tanto, en el intervalo $\left[-\frac{\pi}{4},\frac{7\pi}{4}\right]$ ocurre un periodo, vea la *figura 4.39*.

d. $f(t)=\frac{3}{2}sen\,2\left(t-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{3}{2}sen\left(2t-\frac{2\pi}{3}\right)$ tiene amplitud $A=\frac{3}{2}$, periodo $T=\frac{2\pi}{B}=\frac{2\pi}{2}=\pi$ y fase $\frac{C}{B}=\frac{\frac{2\pi}{3}}{2}=\frac{\pi}{3}$. De $2t-\frac{2\pi}{3}=0$ y de $2t-\frac{2\pi}{3}=\pi$ obtenemos $t=\frac{\pi}{3}$ y $t=\frac{4\pi}{3}$, por tanto, en el intervalo $\left[\frac{\pi}{3},\frac{4\pi}{3}\right]$ ocurre un periodo, vea la *figura 4.40*.

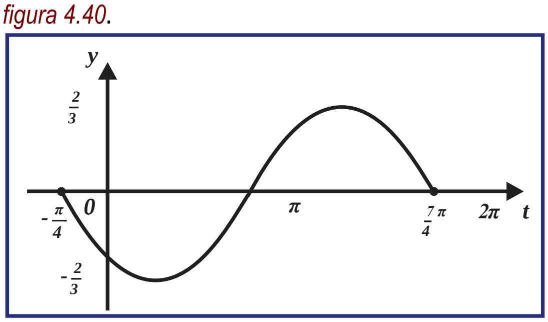


FIGURA 4.39

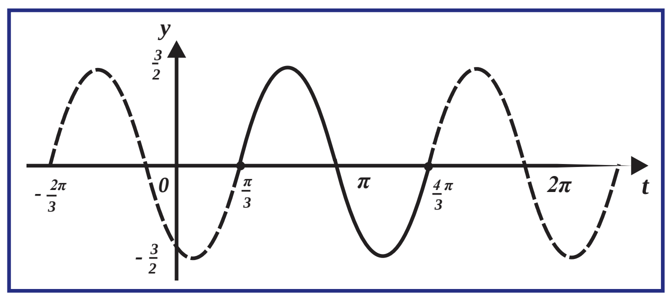


FIGURA 4.40

e. $g(t)=-2cos\,\frac{2}{3}\left(t-\frac{\pi}{4}\right)=-2cos\left(\frac{2}{3}t-\frac{2\pi}{12}\right)$ tiene amplitud $A=2$, periodo $T=\frac{2\pi}{B}=\frac{2\pi}{\frac{2}{3}}=3\pi$ y fase $\frac{C}{B}=\frac{\frac{2\pi}{12}}{\frac{2}{3}}=\frac{\pi}{4}$. De $\frac{2}{3}t-\frac{\pi}{6}=0$ y de $\frac{2}{3}t-\frac{\pi}{6}=2\pi$ obtenemos $t=\frac{\pi}{4}$ y $t=\frac{13\pi}{4}$, por tanto, en el intervalo $\left[\frac{\pi}{4},\frac{13\pi}{4}\right]$ ocurre un periodo, vea la *figura 4.41*.

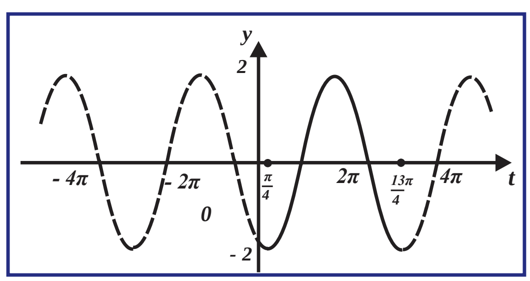


FIGURA 4.41

USO DE SOFTWARE DE MATEMÁTICAS

Trace las curvas asociadas a funciones senoidales obtenidas y compárelas con las obtenidas en este ejemplo.

□

FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS: PARIDAD

La *figura 4.42* muestra el círculo unitario y los ángulos $\angle t$ y $\angle -t$ (ángulos simétricos que tienen como lado común a la parte positiva del eje x y son de la misma amplitud). Estos ángulos, junto con los segmentos de recta PQ y QR, generan los triángulos congruentes OPQ y ORQ. Dado que los triángulos OPQ y ORQ tienen la misma base se cumple la relación $cos(t) = cos(-t)$, entonces $g_0(t) = cos(t) = g_0(-t)$. La *figura 4.42* también muestra que en los triángulos OPQ y ORQ las ordenadas de los puntos que componen las alturas QP y QR son simétricas (sólo cambia la de la orientación de altura), por lo que se cumple la relación $sen(t) = -sen(-t)$, esto significa que $f_0(t) = -f_0(-t)$.

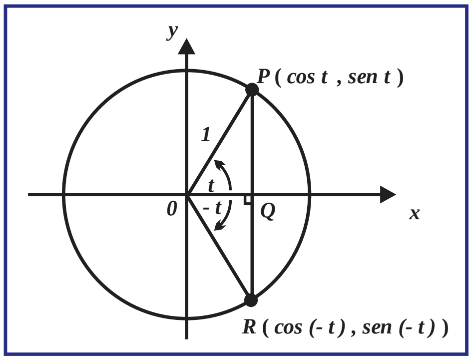


FIGURA 4.42

La generalización de las observaciones anteriores nos hace concluir que las funciones $g_3(t) = A cos(Bt - C)$ y $g_3(t) = A cos[-(Bt - C)]$ tienen asociada la misma gráfica, esta afirmación también es válida para para las funciones $f_3(t) = A\, sen(Bt - C)$ y $f_3(t) = -A\, sen[-(Bt - C)]$.

Proposición 4.1 (PARIDAD DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS)

Sea t un número real, entonces:

a. $f_3(t) = A\, sen(Bt - C) = -A\, sen[-(Bt - C)]$.

b. $g_3(t) = A cos(Bt - C) = A cos[-(Bt - C)]$.

EJEMPLO 4.15 (Verificación de la paridad)

a. Puesto que $g(t) = \frac{1}{2} cos\left(-3t - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2} cos\left[-\left(3t + \frac{\pi}{2}\right)\right] = \frac{1}{2} cos\left(3t + \frac{\pi}{2}\right)$. La curva correspondiente presenta las siguientes características: oscila entre $-\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{2}$, tiene periodo $T = \frac{2\pi}{3}$ y la fase es $\frac{C}{B} = \frac{\frac{\pi}{2}}{3} = \frac{\pi}{6}$. De $3t + \frac{\pi}{2} = 0$ y $3t + \frac{\pi}{2} = 2\pi$ obtenemos $t = -\frac{\pi}{6}$ y $t = \frac{3\pi}{6}$, por tanto, sobre el intervalo $\left[-\frac{\pi}{6}, \frac{3\pi}{6}\right]$ ocurre un periodo, vea la *figura 4.43*.

b. Puesto que $f(t) = -2\, sen(-4t + 3\pi) = -2\, sen[-(4t - 3\pi)] = 2\, sen[(4t - 3\pi)]$, entonces la curva correspondiente presenta las características: oscila entre -2 y 2, tiene periodo $T = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$ y su fase es $\frac{C}{B} = \frac{3\pi}{4}$. Por otra parte, de $4t - 3\pi = 0$ y $4t - 3\pi = 2\pi$ obtenemos $t = \frac{3\pi}{4}$ y $t = \frac{5\pi}{4}$, por tanto, sobre el intervalo $\left[\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right]$ ocurre un periodo, vea la *figura 4.44*.

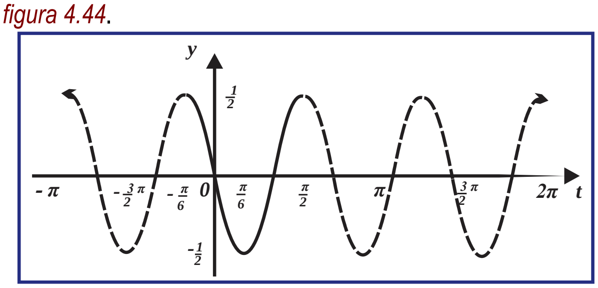


FIGURA 4.43

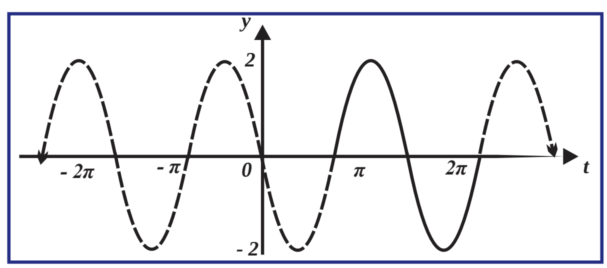


FIGURA 4.44

USO DE SOFTWARE DE MATEMÁTICAS

Trace las curvas asociadas a funciones senoidales, compare las curvas obtenidas con las de este ejemplo.

El "parámetro D" en la curva asociada a $f_4(t) = A\,sen(Bt - C) + D$ (ó a $g_4(t) = A\cos(Bt - C) + D$) se manifiesta como un desplazamiento vertical de la curva asociada a $f_3(t) = A\,sen(Bt - C)$ (ó en su caso de la curva asociada a $g_3(t) = A\cos(Bt - C)$).

EJEMPLO 4.16 (Desplazamiento vertical)

a. Para trazar la curva asociada a $f(t) = \frac{3}{2} sen\, 2\left(t - \frac{\pi}{3}\right) + 1$, inicialmente la rescribimos como $f(t) = \frac{3}{2} sen\left(2t - \frac{2\pi}{3}\right) + 1$. Así, la curva oscila entre $-\frac{1}{2}$ y $\frac{5}{2}$, tiene periodo $T = \frac{2\pi}{2} = \pi$ y su fase es $\frac{C}{B} = \frac{\frac{2\pi}{3}}{2} = \frac{\pi}{3}$. De $2t - \frac{2\pi}{3} = 0$ y $2t - \frac{2\pi}{3} = \pi$ obtenemos $t = \frac{\pi}{3}$ y $t = \frac{4\pi}{3}$, por tanto, en el intervalo $\left[\frac{\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right]$ ocurre un periodo, vea *figura 4.45*.

b. La curva asociada a $g(t) = \frac{1}{2}\cos\left(2t + \frac{2\pi}{3}\right) - 2$ oscila entre $-\frac{5}{2}$ y $-\frac{3}{2}$, tiene periodo $T = \frac{2\pi}{2} = \pi$ y su fase es $\frac{C}{B} = \frac{\frac{2\pi}{3}}{2} = \frac{\pi}{3}$. De $2t + \frac{2\pi}{3} = 0$ y $2t + \frac{2\pi}{3} = \pi$ obtenemos $t = -\frac{\pi}{3}$ y $t = \frac{2\pi}{3}$, luego sobre el intervalo $\left[-\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right]$ ocurre uno de sus periodos, vea la *figura 4.46*.

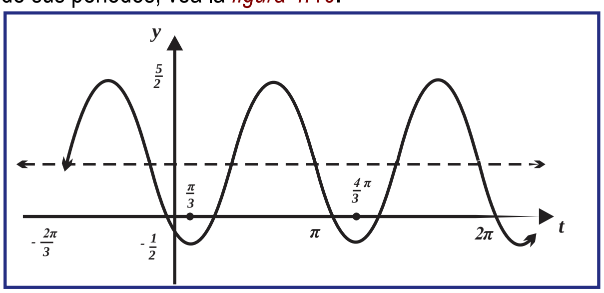


FIGURA 4.45

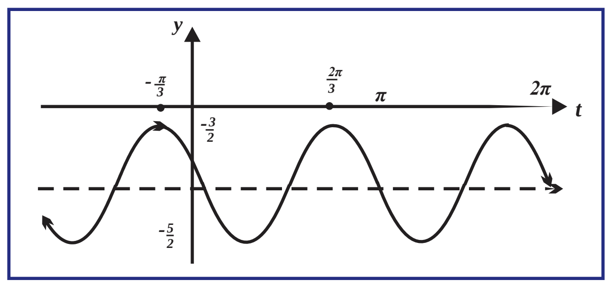


FIGURA 4.46

USO DE SOFTWARE DE MATEMÁTICAS

Trace las curvas asociadas a funciones senoidales, compare las curvas obtenidas con las de este ejemplo.

FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS, CEROS Y VALORES EXTREMOS

Los ceros de la función $f(t) = sen(Bt - C)$ son las asignaciones a la variable t cuya imagen es cero (es decir, $f(t) = 0$) y representan las intersecciones de la curva asociada a f con el eje de las abscisas (concretamente las primeras componentes de los puntos de intersección con el eje de las abscisas).

i. Puesto que la función $f_0(t) = sen\, t$ tiene ceros en los "múltiplos enteros de π" (es decir, cuando $t = \pm n\pi$, siendo n un número natural o cero), entonces la función $f(t) = A\,sen(Bt - C)$ (con A positiva) tiene ceros para las asignaciones a t que satisfacen la ecuación $Bt - C = \pm n\pi$ donde n es un número natural o cero, entonces $t = \pm\frac{n\pi}{B} + \frac{C}{B}$ donde n representa a un número natural o cero (algunos casos particulares son $t = \frac{C}{B}$, $\pm\frac{\pi}{B} + \frac{C}{B}$, $\pm\frac{2\pi}{B} + \frac{C}{B}$, $\pm\frac{3\pi}{B} + \frac{C}{B}, \ldots$).

ii. Como su nombre lo indica, el valor máximo de una función es la mayor de las imágenes, así la función $f_0(t) = sen\, t$ alcanza su valor máximo (que es 1) cuando a la variable t le son asignados los valores $t = \frac{\pi}{2} \pm 2n\pi$ (siendo n un número natural o cero). Consecuencia de la observación anterior, la función $f(t) = A\,sen(Bt - C)$ (donde $A > 0$) alcanza sus valores máximos (que son A) cuando $Bt - C = \frac{\pi}{2} \pm 2n\pi$ ó $t = \frac{\pi}{2B} \pm \frac{2n\pi}{B} = \frac{\pi \pm 4n\pi}{2B} + \frac{C}{B}$ donde n es un número natural o cero (algunos casos particulares son $t = \cdots \ -\frac{11\pi}{2B}+\frac{C}{B},\ -\frac{7\pi}{2B}+\frac{C}{B},\ -\frac{3\pi}{2B}+\frac{C}{B},\ \frac{\pi}{2B}+\frac{C}{B},\ \frac{5\pi}{2B}+\frac{C}{B},\ \frac{9\pi}{2B}+\frac{C}{B}, \cdots$).

iii. El valor mínimo de una función es la menor de las imágenes, así la función $f_0(t) = sen\ t$ alcanza valores mínimos (que son -1) cuando a la variable t se le asignan los valores $t = \frac{3\pi}{2} \pm 2n\pi$, siendo n un número natural o cero). Consecuencia de la observación anterior, la función $f(t) = A\,sen(Bt - C)$ (donde $A > 0$) alcanza valores mínimos (que son $-A$) cuando $Bt - C = \frac{3\pi}{2} \pm 2n\pi = \frac{3\pi \pm 4n\pi}{2}$ ó $t = \frac{3\pi \pm 4n\pi}{2B} + \frac{C}{B}$ (algunos casos particulares son

$$t = \cdots \ -\frac{9\pi}{2B}+\frac{C}{B},\ -\frac{5\pi}{2B}+\frac{C}{B},\ -\frac{\pi}{2B}+\frac{C}{B},\ \frac{3\pi}{2B}+\frac{C}{B},\ \frac{7\pi}{2B}+\frac{C}{B},\ \frac{11\pi}{2B}+\frac{C}{B}, \cdots).$$

La *figura 4.47* muestra los ceros, el valor máximo y el valor mínimo de $f(t) = A\,sen(Bt - C)$.

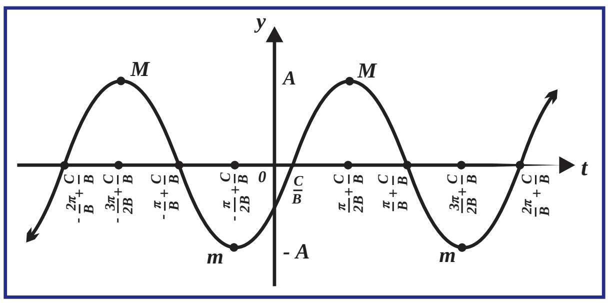


FIGURA 4.47

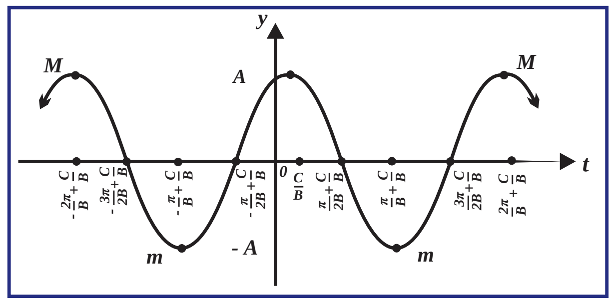


FIGURA 4.48

Un análisis similar al anterior para la función $g(t) = A\cos(Bt - C)$ (siendo $A > 0$) justifica las siguientes observaciones:

i. Presenta ceros en $t = \pm\frac{\pi}{2B}+\frac{C}{B},\ \pm\frac{2\pi}{2B}+\frac{C}{B},\ \pm\frac{5\pi}{2B}+\frac{C}{B},\ \pm\frac{7\pi}{2B}+\frac{C}{B}\cdots$, en general, los ceros son los números $\pm\frac{(2n+1)\pi}{2B}+\frac{C}{B}$, donde n es un número natural o cero.

ii. Tiene como valor máximo $f(t) = A$ y lo alcanza cuando $t = \cdots -\frac{4\pi}{B}+\frac{C}{B},\ -\frac{2\pi}{B}+\frac{C}{B},\ \frac{C}{B},\ \frac{2\pi}{B}+\frac{C}{B},\ \frac{4\pi}{B}+\frac{C}{B},\ -\frac{6\pi}{B}+\frac{C}{B},\ \cdots$ (en las abscisas de la forma $t = \pm\frac{2n\pi}{B}+\frac{C}{B}$ donde n es un número natural o cero).

iii. Tiene como valor mínimo $t = \cdots \ -\frac{5\pi}{B}+\frac{C}{B},\ -\frac{3\pi}{B}+\frac{C}{B},\ -\frac{\pi}{B}+\frac{C}{B},\ \frac{\pi}{B}+\frac{C}{B},\ \frac{3\pi}{B}+\frac{C}{B},\ \frac{5\pi}{B}+\frac{C}{B}, \cdots$ (en las abscisas de la forma $t = \pm\frac{(2n+1)\pi}{B}$ donde n es un número natural o cero).

La *figura 4.48* muestra los ceros, el valor máximo y el valor mínimo de $g(t) = A\cos(Bt - C)$ cuando $A > 0$.

Para determinar el valor máximo, el valor mínimo y los ceros de una función senoidal conviene rescribirla en la forma más sencilla (aprovechando sus propiedades como paridad, etc.)

EJEMPLO 4.17 (Ceros, máximo y mínimo)

a. Si $f(t) = -2\,sen(-3t + \pi)$, entonces $f(t) = -2\,sen(-3t + \pi) = 2\,sen(3t - \pi)$ (recuerde que la función seno es impar), por tanto, $A = 2$, $B = 3$ y $C = \pi$, $3t - \pi = \pm n\pi$.

i. Los ceros son $t = \frac{\pm n\pi + \pi}{3}$ donde n es un número natural o cero.

ii. El valor máximo es $f(t) = 2$ y ocurre cuando $t = \frac{\frac{\pi}{2} \pm 2n\pi + \pi}{3} = \frac{1}{6}(3 \pm 4n)\pi$ donde n es un número natural o cero.

iii. El valor mínimo es $f(t) = -2$ cuando $t = \frac{\frac{3\pi}{2} \pm 2n\pi + \pi}{3} = \frac{1}{6}(5 \pm 4n)\pi$, donde n es un número natural o cero.

b. En $f(t)=\frac{2}{3}cos\left(t+\frac{\pi}{3}\right)$ tenemos que $A=\frac{2}{3}$, $B=1$ y $C=\frac{\pi}{3}$.

i. Los ceros son $t+\frac{\pi}{3}=\pm\frac{(2n+1)}{2}\pi$ ó $t=-\frac{\pi}{3}\pm 2n\pi$ siempre que n sea un número natural o cero.

ii. El valor máximo es $f(t)=\frac{2}{3}$ y ocurre cuando $t+\frac{\pi}{3}=\pm 2n\pi$ ó $t=\pm 2n\pi-\frac{\pi}{3}$, donde n es un número natural o cero.

iii. El valor mínimo es $f(t)=-\frac{2}{3}$ ocurre cuando $t+\frac{\pi}{3}=\pm(2n+1)\pi$ $t=\pm(2n+1)\pi-\frac{\pi}{3}$, donde n es un número natural o cero.

□

FENÓMENOS DE VARIACIÓN PERIÓDICA

La oscilación del péndulo, las vibraciones de un puente, el flujo de corriente eléctrica, las vibraciones de las cuerdas de un instrumento musical, el movimiento de un punto perteneciente a un disco que gira, etc. representan movimientos periódicos. Los movimientos periódicos (bajo ciertas suposiciones) se modelan, por medio de una función trigonométrica.

Una partícula que se mueve verticalmente tiene un movimiento armónico simple cuando su desplazamiento está dado en función de t por alguna de las funciones $y(t)=Asen\,\omega(t-e)$ y $x(t)=Acos\,\omega(t-e)$, $|A|$ es la amplitud del desplazamiento del movimiento de la partícula (que varía entre $-A$ y A). Una imagen de la función seno se repite cada vez que el ángulo se incrementa en 2π radianes, entonces la posición de la partícula se repite después de un periodo $\frac{2\pi}{\omega}$, por tanto, el periodo es de un movimiento armónico simple, esto es $T=\frac{2\pi}{\omega}$. La frecuencia f de un movimiento armónico simple se define como el número de oscilaciones (o ciclos completos) por unidad de tiempo; así $f=\frac{1}{T}$. La cantidad ω, llamada "frecuencia angular", está relacionada con las cantidades antes definidas por $\omega=\frac{2\pi}{T}=2\pi f$.

EJEMPLO 4.18 (Sistema masa - resorte)

Una masa está suspendida de un resorte, el resorte se comprime 5 centímetros y luego se libera. Si la masa regresa al punto inicial después de 3 segundos, para establecer la función que describe el movimiento (suponiendo movimiento armónico simple), notemos que inicialmente la amplitud del resorte es 5 centímetros, es decir $a=5$ en el tiempo $t=0$, entonces la función que describe la posición de la masa es $y(t)=5\,sen\,\omega t$. Dado que la masa regresa a los 3 segundos, el periodo es $T=3$ en consecuencia $T=\frac{2\pi}{\omega}=3$, de donde $\omega=\frac{2\pi}{3}$, finalmente $y(t)=5\,sen\,\frac{2\pi}{3}t$, $t\geq 0$ y $y(t)$ representa el desplazamiento a partir de la posición inicial.

□

EJEMPLO 4.19 (Manivela)

a. La manivela de una máquina tiene una longitud de 50 centímetros y gira con un movimiento armónico simple a razón de 0.5 revoluciones por segundo, por tanto:

i. La manivela tiene una longitud de 50 centímetros, en consecuencia $amplitud=|50|=50$.

ii. La manivela da media revolución por segundo, es decir una revolución cada dos segundos, entonces el periodo es $T=2$, y la frecuencia $f=\frac{1}{2}$. Dado que $\omega=\frac{2\pi}{T}=2\pi f$, entonces $\omega=\frac{2\pi}{2}=\pi$.

iii. Dado que $f(0)=50$, la función que relaciona el desplazamiento horizontal con el tiempo es de la forma $f(t)=a\,cos\,\omega\cdot t$, por consiguiente $f(t)=50cos\,\pi t$, con $t\geq 0$. Vea la *figura 4.49*.

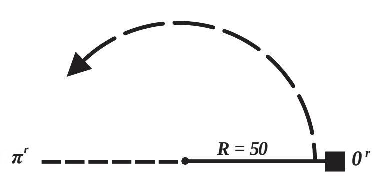


FIGURA 4.49

b. Una manivela con radio de 28 centímetros gira a razón de 16 revoluciones por segundo. Supóngase que el movimiento empieza cuando la manija está en $\alpha = \frac{\pi}{6}$. Para obtener la función que representa la proyección de la manija sobre el eje vertical en el tiempo *t*. Notemos que, proyección es sobre el eje vertical, entonces el movimiento armónico es de la forma: $f(t) = a \cdot cos(\omega t - c)$, pero $a = 28$, $\omega t = 16 \cdot 2\pi t$ ó $\omega t = 32\pi t$, entonces $f(t) = 28 cos\left(32\pi t + \frac{\pi}{6}\right)$.

□

EJEMPLO 4.20 (Lima giratoria)
El extremo de una lima recta, de amplitud 5 milímetros, como la mostrada en la *figura 4.50*, se sujeta a un tornillo de banco. El extremo libre se pone a rotar a razón de 8 ciclos por segundo. Para establecer la ecuación del movimiento (suponiendo movimiento armónico simple), suponemos que la función que lo describe es de la forma $f(t) = A sen\ Bt$, puesto que $f(0) = A sen\ 0 = 0$ con $A = 5$ milímetros y $B = \frac{8(2\pi)}{1} = 16\pi$, por consiguiente $f(t) = 5 sen\, 16\pi t$, siempre que $t \geq 0$, Vea la *figura 4.50*.

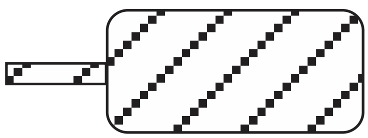


FIGURA 4.50

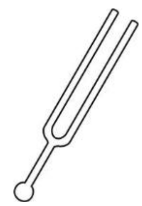


FIGURA 4.51

□

EJEMPLO 4.21 (Diapasón)
Las ondas del sonido, generadas por un diapasón se pueden describir por medio de la función $f(t) = A sen Bt$. Cuando el diapasón vibra a 440 ciclos por segundo y tiene una amplitud de $0.005\ cms.$, la función que describe las ondas emitidas es $f(t) = 0.005 sen\, 440(2\pi)t$ o $f(t) = 0.005 sen\, 880\pi t$. Vea la *figura 4.51*.

¿Qué conceptos aprendí?

PARA COMPLETAR

1. Un ________________________ relaciona la amplitud de un ángulo con un número real.

2. La función seno tiene como conjunto imagen ____.

3. La función seno tiene como periodo ____.

4. La función coseno tiene como periodo ____.

5. Si en $f(t) = sen\ Bt$ se incrementa B, entonces ____.

6. El parámetro B indica el número de periodos de $f(t) = sen\ Bt$ sobre el _________________________________.

7. Las funciones $f(t) = sen\ t$ y $f(t) = cos\ t$ ____________________periodo.

8. $f(t) = sen\ t$ y $f(t) = cos\ t$ están desfasadas _________________.

9. La variación del parámetro $f(t) = A sen\ t$ se refleja en la curva correspondiente como __________ _________________.

10. Las curvas asociadas a las funciones $f(t)=A sen\ t$ y $f(t)=cos\ t$ están desfasadas ________________.

11. Las curvas asociadas a las funciones $f(t)=A\,sen(Bt-C)$ y $g(t)=A\,cos(Bt-C)$ reciben el nombre de curvas ____________________________________ o ____________________________.

12. Al cumplir la condición ________________________________ las funciones $f(t)=sen\ t$ y $f(t)=cos\ t$ se denominan impares.

13. Si $f(t)=A\,sen(Bt-C)+D$, entonces la curva correspondiente está desplazada _______________________ respecto a la curva asociada a $f(t)=A\,sen(Bt-C)+D$.

14. El valor máximo de la función $f(t)=sen\ t$ se da cuando____.

15. El valor mínimo de la función $f(t)=cos\ t$ se da cuando____.

CIERTO O FALSO (Justifique su respuesta)

1. Toda función senoidal es periódica.

2. La función tangente tiene periodo $t=\pi$.

3. Todas las funciones cosenoidales tiene periodo $t=2\pi$.

4. La curva asociada a $f(t)=A sen\ t$ coincide con la curva asociada a $f(t)=A sen\ (t+4\pi)$.

5. La función $f_3(t)=-A\,sen(Bt-C)$ tiene amplitud negativa.

6. Las curvas asociadas a las funciones $f(t)=A sen\ t$ y $f(t)=cos\ t$ están desfasadas $\frac{\pi}{2}$ radianes.

7. Todas las funciones cosenoidales son pares.

8. Los ceros de las funciones senoidales son números reales múltiplos enteros de π.

9. Los ceros de las funciones senoidales son números reales múltiplos enteros de π.

10. La media aritmética entre los valores máximo y mínimo de una función senoidal representa a su amplitud.

PROBLEMAS PROPUESTOS 4.2

1. Determine el dominio, la imagen, la amplitud, el periodo, la frecuencia y trace la curva.

a. $f(t)=3\,sen 2t$.

b. $f(t)=-2\,cos\,3t$.

c. $f(t)=-4\,sen 3t$.

d. $f(t)=-2\,sen\frac{1}{2}t$.

e. $f(t)=cos\,\frac{1}{4}t$.

f. $f(t)=-6\,sen\,\frac{2}{5}t$.

g. $f(t)=cos\,\frac{1}{2}t$.

h. $f(t)=\pi\,cos\,6t$.

2. Determine la amplitud, el periodo, la frecuencia, la fase y también explique las transformaciones requeridas para obtener la curva correspondiente.

a. $f(x)=-\frac{1}{3}sen(x+\pi)$.

b. $f(x)=sen\left(\frac{1}{3}x+\frac{\pi}{4}\right)$.

c. $f(x)=2\,cos\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$.

d. $f(x)=2\,sen\left(\frac{1}{3}x+\frac{\pi}{9}\right)$.

e. $f(x)=-3cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$.

f. $f(x)=\frac{1}{4}sen\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$.

g. $f(x)=-\frac{1}{4}sen\left(4x-\frac{\pi}{6}\right)$.

h. $f(x)=2\,cos\left(3x-\frac{\pi}{2}\right)$.

i. $f(x)=\frac{1}{2}sen\left(\frac{1}{4}x+\frac{\pi}{6}\right)$.

j. $f(x)=-\frac{2}{5}cos\left(2x+\frac{3\pi}{4}\right)$.

k. $f(x)=7sen\left(\frac{2}{3}x-\frac{\pi}{3}\right)$.

l. $f(x)=-\frac{1}{5}sen\left(\frac{1}{8}x-\frac{\pi}{6}\right)$.

3. Verifique (gráficamente) que las funciones *seno* y *coseno* están desfasadas $\frac{\pi}{2}$ radianes.

4. Utilice el círculo trigonométrico y explique por qué:

a. $f(x)=sen(x)=-sen(-x)$.

b. $f(x)=cos(x)=cos(-x)$.

5. Determine la amplitud, el periodo, la frecuencia, la fase y dibuje la gráfica.

a. $f(x)=\frac{1}{4}cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)+3$.

b. $f(x)=-2\,sen\left(\frac{1}{5}x+\frac{\pi}{3}\right)-1$.

c. $f(x)=-2cos\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)+5$.

d. $f(x)=\frac{1}{3}sen\left(x-\frac{\pi}{5}\right)-3$.

e. $f(x)=-2cos\left(3x+\frac{\pi}{8}\right)+5$.

f. $f(x)=-4sen\left(\frac{1}{4}x-\frac{\pi}{10}\right)-6$.

g. $f(x)=-2cos\left(2x+\frac{\pi}{8}\right)+5$.

h. $f(x)=-6sen\left(\frac{1}{2}x-\frac{\pi}{3}\right)-1$.

6. Determine el dominio, la imagen y trace la curva de las funciones de $f(t)=A\,sen\,w(t-c)+D$ y $g(t)=A cos\,w(t-c)+D$, tales que (sugerencia: multiplique):

a. $A=3$, $w=\frac{1}{3}$ y $c=\frac{\pi}{7}$.

b. $A=-2$, $w=3$ y $c=\frac{\pi}{8}$.

c. $A=-\frac{1}{10}$, $w=\frac{1}{5}$ y $c=\frac{\pi}{10}$.

d. $A=-\frac{4}{5}$, $w=\frac{2}{3}$ y $c=-\frac{\pi}{8}$.

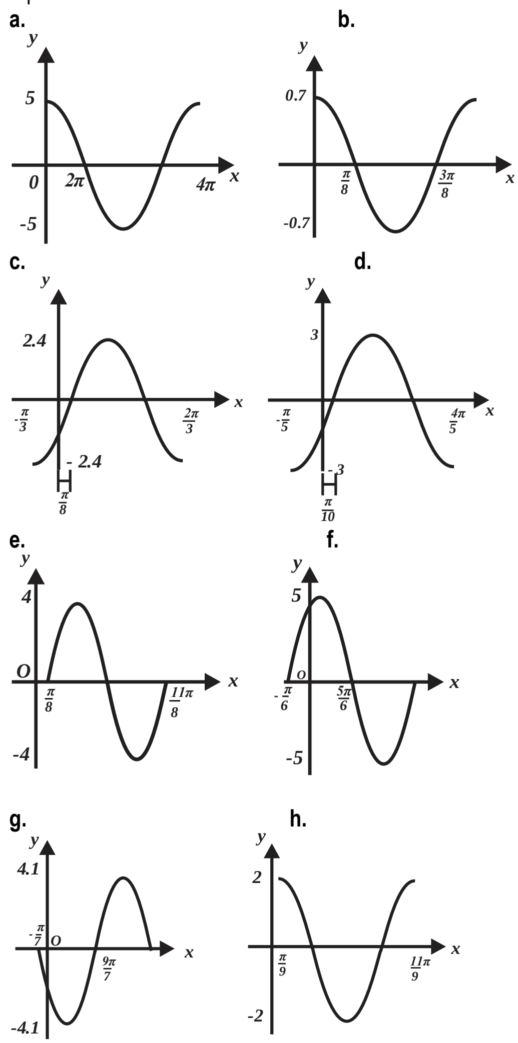
e. $A=-\frac{6}{5}$, $w=\frac{1}{10}$, $c=-\frac{\pi}{20}$ y $D=-2$.

f. $A=20$, $w=3$, $c=\frac{\pi}{7}$ y $D=6$.

g. $A=-12$, $w=4$, $c=\frac{\pi}{3}$ y $D=-4$.

h. $A=9$, $w=6$, $c=-\frac{\pi}{5}$ y $D=4$.

7. Las siguientes curvas corresponden a periodos completos de funciones senoidales o cosenoidales. Determine la amplitud, la frecuencia, el periodo, la fase y las funciones de la forma $f(x)=Asen(Bx-C)$ y $g(x)=Acos(Bx-C)$ que la representen.



8. Rescriba la función $f(t)=-sen\ t$ en términos de la función $f(t)=sen\ t$ y un corrimiento de fase.

9. Rescriba la función $f(t)=-cos\ t$ en términos de la función seno y un corrimiento de fase.

10. Determine una función seno que tenga curva asociada idéntica a la curva de $f(t)=cos\left(t-\frac{\pi}{4}\right)$.

11. Determine una función coseno que tenga curva asociada idéntica a la curva de $f(t)=sen\left(3t-\frac{\pi}{3}\right)$.

12. Determine una función coseno que tenga asociada curva idéntica a la curva de $f(t)=-sen\left(2t-\frac{\pi}{4}\right)$.

13. Determine una función que tenga asociada idéntica curva a la curva asociada a $f(t)=cos\left(4t-\frac{\pi}{3}\right)$.

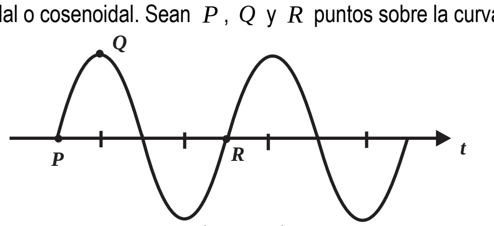
14. Construya una función senoidal (cosenoidal) con las siguientes características.

a. Amplitud $A=2$, periodo $\frac{3}{2}\pi$ y fase $\frac{\pi}{4}$.

b. Amplitud $A=3$, periodo 3π y fase $\frac{\pi}{6}$.

c. Amplitud $A=\frac{4}{3}$, periodo 4π y fase $\frac{\pi}{3}$.

15. Suponga que la siguiente curva pertenece a una función senoidal o cosenoidal. Sean P, Q y R puntos sobre la curva.



a. Si $f(t)=3\,cos\,2t$ y $P\left(-\frac{\pi}{4},0\right)$, determine Q y R.

b. Si $f(t)=\frac{9}{2}sen\left(t-\frac{\pi}{4}\right)$ y $A\left(\frac{\pi}{4},0\right)$, determine Q y R.

c. Si $f(t)=2\,sen\left(3t-\frac{\pi}{4}\right)$ y $A\left(\frac{\pi}{12},0\right)$, determine Q y R.

16. Determine una función cuya curva sea igual a la de la función dada.

a. $f(t)=sen\left(t-\frac{\pi}{4}\right)$. **d.** $g(t)=cos\left(t+\frac{\pi}{3}\right)$.

b. $f(t)=sen\left(t+\frac{\pi}{2}\right)$. **e.** $g(t)=2cos\left(t-\frac{\pi}{4}\right)$.

c. $f(t)=-sen\left(t-\frac{\pi}{2}\right)$. **f.** $g(t)=-2cos\left(t+\frac{\pi}{6}\right)$.

17. Determine la fase φ de tal forma que las funciones dadas sean iguales.

a. $f(t)=sen\,t$ y $g(t)=-sen(t+\varphi)$.

b. $f(t)=sen\,t$ y $g(t)=sen(-t+\varphi)$.

c. $f(t)=sen\,t$ y $g(t)=cos(t-\varphi)$.

d. $f(t)=sen\,t$ y $g(t)=cos(t+\varphi)$.

e. $f(t)=sen\,t$ y $g(t)=-cos(t+\varphi)$.

f. $f(t)=sen\,t$ y $g(t)=-cos(-t+\varphi)$.

18. Determine los ceros, el valor máximo y el valor mínimo.

a. $f(t)=2\,sen\left(3t-\frac{\pi}{4}\right)$.

b. $f(t)=-\frac{1}{3}sen\left(3t+\frac{\pi}{6}\right)$.

c. $g(t)=\frac{2}{5}cos(-3t+\pi)$.

d. $g(t)=4\,cos\left(-2t+\frac{\pi}{2}\right)$.

e. $f(t)=2sen\,3\left(t-\frac{\pi}{4}\right)+3$.

f. $f(t)=5sen\,t+6$.

g. $g(t)=4\,cos\left(-3t+\frac{\pi}{2}\right)+1$.

19. La aceleración "A" de un objeto sujeto a un resorte está dada por la función de regla de correspondencia $A(t)=-220\,sen\left(2t+\frac{\pi}{4}\right)$.

a. Determine, la amplitud, el periodo y la frecuencia.
b. Grafique la aceleración como función del tiempo.
c. Rescriba la expresión anterior en términos de la función $coseno$.

20. Una onda puede ser modelada por la relación $S=0.04\,sen\left[2\pi(x-80)\right]$.

a. Determine, la amplitud, el periodo y la frecuencia.
b. Grafique el desplazamiento S como una función del tiempo t.

21. Escriba la ecuación del movimiento de un péndulo que oscila con una amplitud de 96 centímetros con un período de 2.5 segundos. Haga un esbozo de su gráfica.

22. Si B es pequeña, la relación $y(t)=B\,sen\,wt$ aproxima la forma de las olas del océano.

a. Dibuje 4 ciclos para una ola descrita por la relación $y(t)=sen\frac{\pi}{20}t$.

b. Dibuje 3 ciclos para una ola descrita por la relación $y(t)=0.2\,sen\frac{\pi}{20}t$.

23. La variación normal de la temperatura media se aproxima mediante la función $T(t)=55+38\,sen\left[\frac{2\pi}{365}(t-100)\right]$.

Suponga que T está en grados $°F$ y que t es el número de días a partir del primero de enero.

a. Determine, la amplitud, el periodo y la frecuencia.
b. ¿Cuál es la temperatura media anual para un período de 2 años?
c. Dibuje la gráfica de la relación.

24. El desplazamiento S de cierto resorte se puede describir como una función del tiempo t, de acuerdo con la ecuación $S(t)=7\,sen\,12t$.

a. Determine la amplitud, el periodo y la frecuencia.
b. Dibuje la gráfica de la relación.
c. Rescriba la expresión anterior en términos de la función $coseno$.

25. La temperatura T de un gas es una función del tiempo t y está dada por la regla de correspondencia $T(t)=100-50\,sen\,2\pi t$.

a. Grafique la relación de la temperatura T con el tiempo t.
b. Determine la amplitud, el periodo y la frecuencia.

26. Un faro se encuentra en un arrecife a 100 metros de la costa.
a. Escriba la distancia d a un punto P de la costa como función del ángulo x (formado por la perpendicular del faro a la costa y la transversal del faro al punto P.
b. Si el ángulo mide 1.4 radianes, ¿cuánto mide la distancia del punto a la costa?
c. Si el ángulo mide 0.8 radianes, ¿cuánto mide la distancia del punto a la costa?

27. Determine la función trigonométrica correspondiente.
a. La longitud de la altura de un triángulo equilátero en función del ángulo formado por la base y uno de los lados.
b. La altura de un triángulo isósceles, de lados iguales de 4 unidades, en función del ángulo formado por la base y uno de los lados.

28. La fuerza electromotriz E, en voltios, para cierto circuito de corriente alterna satisface la ecuación $E(t) = 110 sen(80\pi t)$, $t \geq 0$ donde t representa el tiempo.
a. ¿Cuál es el valor máximo de E?
b. ¿Cuál es el periodo de E?
c. Dibuje dos periodos de E.

29.
a. Verifique que el área A de un triángulo isósceles cuyos lados iguales miden r unidades y el ángulo entre ellos es θ, está dada por $A(\theta) = \frac{1}{2} r^2 sen\,\theta$.
b. ¿Para qué valores de θ tiene sentido la expresión anterior?
c. Si $r = 1$ dibuje dos periodos de A, ¿en términos prácticos tiene sentido ésta curva?

30. Suponga que la distancia d (en metros) que un objeto recorre en un tiempo t (en segundos) se rige por la función $d(t) = 8sen(5t)$, $t \geq 0$.
a. Describa el movimiento del objeto.
b. ¿Cuál es el máximo desplazamiento desde la posición de equilibrio?
c. ¿Cuál es el tiempo necesario para cada oscilación?
d. ¿Cuál es la frecuencia?

31. Un rectángulo está inscrito en un semicírculo de radio 1.
a. Muestre que el área contenida por el rectángulo es $A = 2sen\theta cos\theta$, donde el ángulo θ tiene su vértice en el centro de la semicircunferencia y sus lados tienen extremos en el vértice y en las esquinas del rectángulo.
b. ¿Para qué valores de θ tiene sentido la expresión anterior?
c. Determine el ángulo con el que obtiene la mayor área.
d. Determine las dimensiones del rectángulo más grande.

32. Un canal para desaguar la precipitación pluvial se construirá con una hoja de latón de 12 centímetros de ancho. Luego de marcar una longitud de 4 centímetros a lo largo de la hoja, se doblarán hacia arriba formando ángulos de θ grados respecto a la horizontal.
a. Verifique que el área de la abertura como función de θ es $A(\theta) = 16sen\theta(cos\theta + 1)$ si $0° \leq \theta \leq 90°$.
b. Si el ángulo θ que maximiza el área A está dado por la ecuación $cos2\theta + cos\theta = 0°$ para $0° \leq \theta \leq 90°$, resuelva la ecuación.
c. ¿Cuál es el área máxima de la abertura?

33. El número de clientes de una tienda varían senoidalmente. Existen 800 el primero de abril y 900 el primero de octubre.
a. Determine una función que describa el comportamiento de los clientes.
b. Determine una función que describa el comportamiento de los clientes desde el inicio del año.

34. El desplazamiento x en metros que un objeto recorre en un tiempo t satisface la relación $x = 12sen\ 7t$.
a. Describa el movimiento del cuerpo.
b. ¿Cuál es el tiempo necesario para cada oscilación?
c. ¿Cuál es la frecuencia?

35. Un objeto se encuentra sujeto a un resorte, el resorte es jalado hacia abajo hasta que se incrementa su longitud 10 centímetros desde su posición de equilibrio y después es liberado. Si el tiempo que requiere para efectuar una oscilación es de 4 segundos, establezca la función que describe el movimiento del cuerpo, desde su posición de equilibrio, en función del tiempo t.

AUTOEVALUACIÓN

1. Trace la gráfica de una función periódica que tenga periodo $T = 2$ y amplitud $A = 1$.

2. Una función periódica tiene periodo $T = 3$ y amplitud $A = 2$, si $f(2) = 1$ ¿cuál es la imagen de $f(5) = 1$.

3. Establezca los efectos gráficos de los parámetros de la curva asociada a $g_3(t) = -4cos\left(t + \frac{\pi}{6}\right)$ respecto a la curva asociada a $g(t) = cos(t)$.

4. ¿La regla de correspondencia de una función senoidal con periodo $T = 3$, amplitud $A = 4$ y fase $\frac{\pi}{8}$ es?

5. Trace la curva asociada a $f\left(t\right)=-2sen\left(\frac{1}{2}t-\pi\right)$.

6. Trace la curva asociada a $g\left(t\right)=\frac{2}{3}cos\left(-3t+\frac{\pi}{2}\right)+1$.

7. Determine los ceros y los valores extremos de $f\left(t\right)=\frac{2}{3}sen\left(2t+\frac{\pi}{3}\right)$.

8. Determine los ceros y los valores extremos de $f\left(t\right)=4sen\left(t+\frac{\pi}{3}\right)-2$.

9. Construye la regla de correspondencia de una función senoidal con: valores máximos $y=3$, valores mínimos $y=-1$, frecuencia dos y fase $\frac{\pi}{3}$.

10. Demuestre que la función $f\left(t\right)=\frac{2}{3}sen\left(-4t+3\pi\right)$ es impar.

11. Demuestre que la función $f\left(t\right)=\frac{2}{3}cos\left(-4t+3\pi\right)$ es impar.

RESPUESTAS A PROBLEMAS SELECCIONADOS

ACTIVIDADES Y PROBLEMAS 1.1

1. a. $V(r)=4\pi r^3,\ r\geq 0$. **b.** $V(h)=\frac{1}{16}\pi h^3,\ r\geq 0$.

2. a. $V(x)=8x^3,\ x\geq 0$. **b.** $A(x)=22x^2,\ x\geq 0$.

c. $L(x)=\sqrt{21}x,\ x\geq 0$.

3. a. $A(x)=x\sqrt{9-x^2},\ -3\leq x\leq 3$.

b. $A(y)=1800y-60y^2,\ -3\leq y\leq 3$.

4. b. $A(l)=900l-15l^2,\ 0\leq l\leq 60$.

c. $A(a)=1800l-60l^2,\ 0\leq l\leq 30$.

6. b. $A(x)=x^2,\ 0\leq x\leq 5$. **c.** $A(x)=100-x^2,\ 0\leq x\leq 5$.

7. a. $A(x)=7x,\ 0\leq x\leq 1$. **b.** $A(x)=7-7x,\ 0\leq x\leq 1$.

8. a. $A(x)=8(x-sen\,x),\ 0\leq x\leq 2\pi^r$.

b. $A(x)=64-8(x-sen\,x),\ 0\leq x\leq 2\pi^r$.

9. a. $A(x)=20x,\ 0\leq x\leq 5$. **b.** $A(x)=100-20x,\ 0\leq x\leq 5$.

10. a. $V(r)=12\pi r^2+\frac{4}{3}\pi\cdot r^3,\ r\geq 0$.

b. $A(r)=2\pi r^2+24\pi r,\ r\geq 0$.

11. $V(r)=\frac{2}{3}\pi\cdot r^3,\ 0\leq r<10$.

12. a. $V(r)=20\pi\cdot r^2+\frac{2}{3}\pi\cdot r^3+,\ r\geq 0$.

b. $V(h)=\frac{1}{3}\pi\cdot h^3+,\ h\geq 0$.

13. $d(x)=\sqrt{(x-6)^2+(2-x^2)^2},\ x\geq 0$.

14. $d(x)=\sqrt{(x-6)^2+\left(\sqrt{25-x^2}-16^2\right)^2},\ x\geq 0$.

15. $V(x)=x(90-2x)(18-2x),\ 0\leq x<9$.

17. a. $f(x)=5x,\ x\in IR$. $f(2)=10$.

b. $f(x)=3x+2,\ x\in IR$. $f(2)=8$.

c. $f(x)=x^3+1,\ x\in IR$. $f(2)=9$.

d. $f(x)=4x\ \ x\geq 0$. $f(2)=8$.

e. $f(h)=10+2h\ \ h\geq 0$. $f(2)=15$.

19. a. 14. **b.** u^2+u-30. **c.** $u+3$. **d.** $2uh+h^2+\frac{u}{h}$.

20. a. 2. **b.** $4x^2+2x$. **c.** x^4+x^2. **d.** $2-3x+x^2$.

e. $a+\sqrt{a}$. **f.** $a^2+2ab+b^2+a+b$.

21. Determine el dominio.

a. $dom(f)=IR$. **b.** $dom(f)=IR$. **c.** $dom(f)=IR$.

d. $dom(f)=IR$. **e.** $dom(f)=[6,+\infty)$.

f. $dom(f)=[-12,+\infty)$. **g.** $dom(f)=(-\infty,1]$.

h. $dom(f)=(-\infty,\frac{1}{5}]$.

i. $dom(f)=(-\infty,-1)\cup(-1,+\infty)$.

j. $dom(f)=(-\infty,4)\cup(4,+\infty)$.

k. $dom(f)=(-\infty,-3)\cup(-3,4)\cup(4,+\infty)$.

l. $dom(f)=(-\infty,-1)\cup(1,4)\cup(4,+\infty)$.

m. $dom(f)=(-\infty,-3)\cup(-3,3)\cup(3,+\infty)$.

n. $dom(f)=(-\infty,-5)\cup(-5,-1)\cup(-1,+\infty)$.

ñ. $dom(f)=IR$. **o.** $dom(f)=(-\infty,2)\cup(2,+\infty)$.

p. $dom(f)=IR$.

q. $dom(f)=(-\infty,0)\cup(0,5)\cup(5,+\infty)$.

22. a. Sí. **b.** Sí. **c.** Sí. **d.** No. **e.** Sí. **f.** Sí. **g.** Sí. **h.** No. **i.** No.

23. a. $dom(f)=IR-\{0\}$. **b.** $dom(g)=IR-\{\frac{1}{3}\}$.

c. $dom(h)=IR-\{-1\}$. **d.** $dom(i)=IR-\{-1\}$.

e. $dom(k)=IR-\{2\}$.

24.

a. $f(x)=x^2+3$. $dom(f)=IR$, $img(f)=[3,+\infty)$.

b. $g(x)=-x^2+5$. $dom(f)=IR$, $img(f)=(-\infty,5]$.

c. $h(x)=x^2-2$. $dom(f)=IR$, $img(f)=[-2,+\infty)$.

d. $i(x)=-x^2-1$. $dom(f)=IR$, $img(f)=(-\infty,-1]$.

e. $k(x)=\frac{1}{4}x^2$. $dom(f)=IR$, $img(f)=IR$.

27.

a. Siempre que $x\neq 0$. **b.** Siempre que $x\neq 2$. **c.** Siempre que $x\neq 3$.

d. Siempre que $x\neq 0$. **e.** Siempre que $x\neq 1$. **f.** Siempre que $x\neq -1$.

28. $A(h)=\frac{\sqrt{3}}{3}h^2,\ h>0$. **29.** $A(r)=r^2,\ r>0$.

30. $A(x)=x\sqrt{4r^2-x^2},\ 0\leq x\leq 2r$.

31.

a. $f(t)=8t,\ t>0$. **b.** $f(t)=\frac{t^2}{2}+t,\ t>0$.

c. $f(t)=\frac{t^2}{2}+t-4\ \ t>0$.

32. $f(\theta)=6\theta,\ \theta\in IR$. **33.** $f(\theta)=18\theta,\ \theta\in IR$.

34. a. Sí. **b.** No. **c.** Sí. **d.** Sí. **e.** Sí. **f.** Sí.

ACTIVIDADES Y PROBLEMAS 1.2

2. a. z, $f(z)=z^4+2z^2$, cuarto grado, $a_4=1$ y $a_0=0$.

b. w, $f(w)=w^6-3w^4+3w^2$, sexto grado, $a_6=1$ y $a_0=0$.

c. w, $f(m)=32m^4-64m^3+48m^2-1$, cuarto grado, $a_6=32$ y $a_0=-1$.

d. z, $f(z)=16z^2+32z+15$, segundo grado, $a_4=16$ y $a_0=15$.

3. a. x, tercer grado, $a_3=2$ y $a_0=1$.

b. x, tercer grado, $a_3=12$ y $a_0=44$.

c. x, cuarto grado, $a_3=1$ y $a_0=-2$.

d. x, cuarto grado, $a_3=1$ y $a_0=21$.

e. t, cuarto grado, $a_3=1$ y $a_0=\frac{1}{36}$.

f. t, tercer grado, $a_3=6$ y $a_0=\frac{1}{2}$.

4. a. $f(f(x))=x^4$. **b.** $f(f(f(f(x))))=x^8$.

5. a. $f(f(x))=x^4+2x^2+2$.

b. $f(f(f(f(x))))=x^8+4x^6+8x^4+8x^2+5$.

7. a. $x=0$ y $x=1$. **b.** $x=0$. **c.** $x=-1$ y $x=1$. **d.** $x=0$.

8. a. Se intersecan. **b.** Se intersecan. **c.** No se intersecan. **d.** No se intersecan.

11. a. $x=0$ $f(0)=4$. **b.** $x=0$ $f(0)=10$.

c. $x=0$ $f(0)=12$. **d.** $x=0$ $f(0)=3$.

12. a. $x=0$ $p(0)=-2$. **b.** $x=0$ $p(0)=10$.

c. $x=0$ $p(0)=12$. **d.** $x=0$ $p(0)=0$.

13. a. $x=-2$ y $x=3$. **b.** $x=-1$ y $x=2$. **c.** $x=0$, $x=1$ y $x=2$.

d. $x=-3$, $x=-1$ y $x=6$. **e.** $x=-3$, $x=\frac{1}{2}$ y $x=2$. **f.** $x=3$.

g. $x=-3$, $x=\frac{1}{2}$ y $x=1$.

14. a. $p(x)=(x^2-x-2)(x+2)+0$.

b. $p(x)=(8x^2+17x+24)(x-2)+44$.

c. $p(x)=(x^3-3x^2+11x-40)(x+3)+89$.

d. $p(x)=(x^4-5x^3+4x^2-3x+5)(x+1)-9$.

e. $p(x)=(x^3-3x^2+13x-66)(x+4)+260$.

f. $p(x)=(4x^4+3x^3+4x^2-6x-6)(x-1)-10$.

g. $p(x)=(x^3-5x^2+12x-7)(x+2)+10$.

h. $p(x)=(x^4-x^3-4x^2-11x-31)(x-3)-97$.

i. $p(x)=(x^3+5x^2+25x+125)(x-5)-625$.

j. $p(x)=(x^7+x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1)(x-1)-8$.

k. $p(x)=(2x^7-4x^6+8x^5-16x^4+32x^3-64x^2+128x-256)(x+2)+54$.

l. $p(x)=(4x^4+8x^3+16x^2+32x+64)(x-2)-64$.

m. $p(x)=(x^3-3x^2+13x-66)(x+4)+260$.

n. $p(x)=(4x^4+4x^3-4x^2-3x-13)(x-1)-17$.

o. $p(x)=(x^3+x^2+x+1)(x-1)-3$.

p. $p(x)=(x^3-5x^2+12x-7)(x+2)+10$.

q. $p(x)=(x^4-3x^3-4x^2-3x-1)(x-1)-5$.

r. $p(x)=(x^7+x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1)(x+2)+0$.

s. $p(x)=(x^4-x^3+x^2-x+1)(x+1)-0$.

15. a. $f(x)=(x^3+2x^2-5x-6)(x-2)+0$.

b. $f(x)=(x^3-x^2-5x+\frac{9}{2})(2x+1)+\frac{15}{2}$.

c. $f(x)=(4x^3+5x^2+6x+12)(x-2)+27$.

d. $f(x)=(x^2-2x+5)(x-2)-16$.

e. $f(x)=(x-\frac{1}{2})(x+2)+0$.

f. $f(x)=(x^2+\frac{9}{4}x+\frac{1}{2})(x+6)+0$.

g. $(x^2+3x-2)(x+1)+0$.

h. $f(x)=(x^3-2x^2-9x+8)(-x-1)+0$.

i. $f(x)=(2x^3-x^2-8x+4)(\frac{1}{2}x-2)+0$.

17. a. $2(x+3)(x-1)(x-2)=0$.

b. $x_0=-3$. $2(x+\sqrt{48})(x-\sqrt{48})(x+3)=0$.

c. $x^3-14x+13=0$, $x_0=1$. $(x+\frac{1+\sqrt{53}}{2})(x\frac{1+\sqrt{53}}{2})(x-1)=0$.

d. $(x+4)(x-1)(x-2)(x-5)=0$.

e. $(x+2)(x+\frac{3}{4})(x-\frac{1}{2})(x-4)=0$.

18. a. $f(x)=(x+3)(x+1)(x-2)^2$.

b. $f(x)=(x+2)(x+1)(x-\frac{3}{2})(x-2)$.

c. $f(x)=4(x-\frac{3}{4})(x-1)(x^2+x+1)$.

19. a. $f(x)=6(x-0)(x-\frac{2}{3})(x-3)$.

b. $f(x)=(x-0)(x-2)(x-3)$.

c. $f(x)=(x-0)(x-6)(x+6)$.

d. $f(x)=(x+11)(x+1)(x-10)$.

e. $f(x)=(x+6)(x-2)(x-8)$.

20. a. $x=-3$, $x=-1$ y $x=2$. **b.** $x=-\frac{1}{2}$.

c. $x=-1$, $x=1$ y $x=\frac{3}{2}$. **d.** $x=-1$, $x=1$.

26. a. $f(x)=\frac{2}{5}x^3-\frac{8}{5}x^2-\frac{14}{5}x+4$.

b. $f(x)=\frac{1}{2}x^3-\frac{7}{2}x+3$.

c. $f(x)=2x^4-4x^3-6x^2+8x+8$.

27. a. $f(x)=\frac{1}{12}x^3-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{12}x+\frac{1}{2}$.

b. $f(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{4}{3}x^2-\frac{4}{3}x+\frac{16}{3}$.

c. $f(x)=\frac{1}{3}x^4-12x^3+\frac{388}{3}x^2-384x+\frac{1024}{3}$.

28. a. $x=-2$, $x=1$ y $x=2$.

b. $f(1)=0$ y tiene multiplicidad dos. **c.** Tercer grado. **d.** Sí.

29. a. $x=-5$, $x=-1$, $x=1$ y $x=2$. **b.** Cuatro. **c.** Positivo.

30. a. $x=-4$, $x=1$ y $x=3$. **b.** Tres. **c.** Positivo.

31. $f(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2-\frac{22}{3}x+8$.

33. $k=8$. **34.** $A=1$.

ACTIVIDADES Y PROBLEMAS 1.3

1. $V(x)=12\pi x^2+\frac{4}{3}\pi x^3,\ x\geq 0$.

2. $V(x)=\frac{19}{3}\pi x^3,\ x\geq 0$.

3. $V(x)=10x(\frac{a}{2}-x)^2,\ x\geq\frac{a}{2}$.

4. $V(x)=20\pi x^2+\pi x^3,\ x\geq 0$.

5. $V(x)=64-2x^3,\ 0<x\leq 2$.

10. a. $u(x)=-0.00135x^3+0.0125x^2+412x+12.225$.

b. Aproximadamente 71 .**6.** $V(x)=x(90-x)(180-x)$, $0\leq x\leq 90$.

7. $V(x)=300x^2-x^3,\ 0\leq x\leq 300$.

8. $V(h)=\frac{1}{3}\pi(2h^2-h^3)$. **9.** $V(h)=\pi(h-\frac{1}{4}h^3)$.

11. b. 460 y ocurre cuando $t=300$. **c.** Cuando $t\approx 523$.

12. b. $t=28$ años. **13. b.** $(400,\ 320)$.

PROBLEMAS PROPUESTOS 2.1

1. $V(t)=\frac{1.2}{t}$. **2.** $R(x)=\frac{90x}{x+90}$, $x>0$.

3. $A(x)=\frac{2x^3+400}{x}$, $x>0$. **4.** $A(x)=\frac{x^3+400}{x}$, $x>0$.

5. a. $c(x)=\frac{2x^3+100}{x}$, $x>0$. **b.** $c(x)=\frac{4x^3+100x+100}{x}$, $x>0$.

c. $c(x)=\frac{8x^3+100x+100}{x}$, $x>0$.

6. a. $h(r)=\frac{18-2r^3}{3r^2}$, $0<r<\sqrt[3]{9}$. **b.** $p(r)=\frac{5\pi x^3+36\pi}{3r}$.

c. $p(r)=\frac{200\pi r^3-1800\pi}{r}$.

7. a. $y(x)=\frac{4}{x}-\frac{1}{2}\pi$. **b.** $h(x)=\frac{x^2-\pi x+8}{2x}$.

c. $c(r)=1600+200\pi x$.

8. a. $h(r)=\frac{300}{r^2}-\frac{1}{3}$.

b. $c(r)=100\pi\left[4r^2+\frac{24r^3}{900-r^2}\right]+200\sqrt{2}\,\frac{900-r^2}{r}$.

9. $A(x)=\frac{30}{x-2}+4x$, $2<x$.

10. a. $dom(f)=IR-\left\{0,-\frac{1}{2}\right\}$, no tiene ceros, $f(0)$ no existe, asíntota vertical $x=\frac{1}{2}$.

b. $dom(f)=IR$, $x_0=-5$, $f(0)=\frac{1}{5}$, sin asíntotas verticales.

c. $dom(f)=IR-\{-3,3\}$, , $x_0=3$, $f(0)=\frac{1}{4}$, asíntotas verticales $x=-3$ y $x=3$.

d. $dom(f)=IR-\{0,-4,-2\}$, $x_{01}=-3$ y $x_{02}=-2$, $f(0)$ no existe, asíntotas verticales $x=0$, $x=-4$ y $x=-2$.

f. $dom(f)=IR-\{-3,3\}$, $x_{01}=-3$ y $x_{02}=-2$, $f(0)=-\frac{1}{3}$, asíntotas verticales $x=-33$ y $x=3$.

11. a. $dom(Q)=IR-\{-2\}$, $x_{01}=-\frac{1}{2}$, $Q(0)=-\frac{1}{2}$, asíntota horizontal $y=-2$, asíntota vertical $x=2$.

b. $dom(Q)=IR$, $x_{01}=-3$ y $x_{02}=3$, $Q(0)=-3$, asíntota horizontal $y=\frac{2}{3}$.

c. $dom(Q)=IR-\{-2,\ 4\}$, $x_{01}=2$ y $x_{02}=-1$, $Q(0)=-\frac{1}{2}$, asíntota horizontal $y=2$, asíntota vertical $x=-2$ y $x=4$.

d. $dom(Q)=IR-\{-2,\ 2\}$, $Q(0)=-\frac{3}{2}$, asíntota horizontal $y=4$, asíntotas verticales $x=-2$ y $x=2$.

e. $dom(f)=IR-\{-4,\ 2\}$, $x_{01}=0$, $f(0)=0$ asíntota horizontal $x=1$, asíntotas verticales $x=-4$ y $x=2$.

f. $dom(f)=IR-\{-5,\ 2\}$, $x_{01}=0$, $f(0)=0$, asíntota horizontal $x=1$, asíntotas verticales $x=-5$ y $x=2$.

12. a. $dom(f)=IR-\{1\}$, $x_{01}=-1$, $f(0)=1$, un hueco sí $x=1$.

b. $dom(r)=IR-\{-1\}$, $x_{01}=1$, $f(0)=-1$, un hueco sí $x=-1$.

c. $dom(f)=IR-\{3\}$, $f(0)=-\frac{1}{3}$, un hueco sí $x=3$.

d. $dom(r)=IR-\{-2,\ 1\}$, un hueco si $x=1$, $f(0)=\frac{1}{2}$, $x_{01}=1$, asíntota vertical $x=-2$.

e. $dom(r)=IR-\{1\}$, un hueco si $x=1$, $f(0)=2$ y $x_{01}=-2$.

f. $dom(r)=IR-\left\{0,\ \frac{1}{2},\ 1\right\}$, $x_{01}=-1$, un hueco si $x=\frac{1}{2}$ y $x=0$, asíntota vertical $x=1$, asíntota horizontal $y=1$.

g. $dom(Q)=IR-\left\{-2-\sqrt{14},\ -2+\sqrt{14}\right\}$, $x_{01}=-2-3\sqrt{2}$ y $x_{02}=-2+3\sqrt{2}$, $f(0)=\frac{7}{5}$, asíntota vertical $x=-2-\sqrt{14}$ y $x=-2+\sqrt{14}$, asíntota horizontal $y=1$.

h. $dom(Q)=IR-\left\{1-\sqrt{2},\ 1+\sqrt{2}\right\}$, $f(0)=-3$, asíntota vertical $x=1-\sqrt{2}$ y $x=1+\sqrt{2}$, asíntota horizontal $y=1$.

24. a. $dom(s)=IR-\{-d\}$, $x_0=-d$, asíntota vertical $x=-d$, asíntota horizontal $y=1$.

b. $s(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$ si $c\neq 0$. $dom(s)=IR-\left\{-\frac{d}{c}\right\}$, $x_0=-\frac{b}{a}$, asíntota vertical $x=-\frac{c}{d}$, asíntota horizontal $y=\frac{a}{c}$.

26. $x^2+1\neq 0$ y $x^2+4\neq 0$.

29. a. $d(2)=0.332$ miligramos. **b.** $d(8)=0.0987$ miligramos.

c. $t=0.021$ o $t=3.79$ miligramos.

30. $c(x)=\dfrac{x+40}{x+100}$, $x\geq 0$.

31. a. $p(0)=8500$ pesos. **b.** $p(5)=8045.454$ pesos.

c. 476.19 pesos. **d.** $23.\bar{3}$ meses. **e.** 8000 pesos.

32. a. $p(0)=300\,000$ pesos. **b.** $p(1)=200000$ pesos.

c. 245454 pesos. **d.** 1.5017 años. **e.** Cero pesos.

33. a. $p(x)=6x^2+8xy$. **b.** $p(x)=6x^2+\frac{16000}{x}$.

c. $p(4)=4096$.

34. a. $p(1)=53$ pesos. **b.** $c(x)=2x+1+\frac{50}{x}$.

c. $c(120)=241.8\bar{3}$ pesos.

35. a. $P(0)=11000$ habitantes. **b.** $P(10)\approx 10090$ habitantes.

c. $P(20)\approx 10048$ habitantes. **d.** 10000 habitantes.

36. b. 0.021 semanas. **c.** 2.4 semanas. **d.** $32.\overline{72}$.

PROBLEMAS PROPUESTOS 2.2

1. a. $r(V)=\sqrt{\frac{3}{10\pi}V}$ $r(V)=\sqrt{\frac{3}{10\pi}V}$, $V\geq 0$. **b.** $r(V)=\sqrt{\frac{3}{5}V}$, $V\geq 0$.

2. a. $A(x)=x\sqrt{100-x^2}$, $0\leq x\leq 10$. **b.** $V(x)=2\pi r^2\sqrt{100-r^2}$, $0\leq x\leq 10$. **3.** $A(h)=\frac{1000}{h}+2\sqrt{\pi h}$, $h\geq 0$.

4. $C(x)=90\sqrt{x^2+200^2}+60(100-x)$, $0\leq x\leq 100$.

5. a. $dom(r)=[-7,+\infty)$, $img(r)=[0,+\infty)$. **b.** $dom(r)=[3,+\infty)$, $img(r)=[0,+\infty)$.

c. $dom(r)=[-2,+\infty)$, $img(r)=[0,+\infty)$. **d.** $dom(r)=[2,+\infty)$, $img(r)=[-3,+\infty)$.

e. $dom(r)=[-3,+\infty)$, $img(r)=(-\infty,-6]$. **f.** $dom(r)=(-\infty,2]$, $img(r)=[-6,+\infty)$.
g. $dom(r)=(-\infty,0]$, $img(r)=[10,+\infty)$. **h.** $dom(r)=[1,+\infty)$, $img(r)=[-6,+\infty)$.
i. $dom(r)=[8,+\infty)$, $img(r)=(-\infty,4]$. **j.** $dom(r)=[-2,+\infty)$, $img(r)=[8,+\infty)$.
k. $dom(r)=[\frac{1}{2},+\infty)$, $img(r)=[2,+\infty)$. **l.** $dom(r)=[4,+\infty)$, $img(r)=(-\infty,4]$.
m. $dom(r)=(-\infty,2]$, $img(r)=(-\infty,8]$. **n.** $dom(r)=[-\frac{1}{2},+\infty)$, $img(r)=(-\infty,-12]$.
6. a. $dom(f)=IR-(3,7)$, $img(f)=[0,+\infty)$. **b.** $dom(f)=IR-(-6,6)$, $img(f)=[0,+\infty)$.
c. $dom(f)=IR-(-5,-1)$, $img(f)=[0,+\infty)$. **d.** $dom(f)=IR-(-6,4)$, $img(f)=[0,+\infty)$.
e. $dom(f)=IR-(-3,4)$, $img(f)=[-2,+\infty)$. **f.** $dom(f)=IR-(-3,5)$, $img(f)=[0,+\infty)$.
g. $dom(f)=IR-(-6,8)$, $img(f)=[0,+\infty)$. **h.** $dom(f)=IR$, $img(f)=[\sqrt{6},+\infty)$.
i. $dom(f)=[-3,3]$, $img(f)=[0,3]$. **j.** $dom(f)=IR-(1,2)$, $img(f)=[0,+\infty)$.
k. $dom(f)=[0,2]$, $img(f)=[0,1]$. **l.** $dom(f)=[-6,-2]$, $img(f)=[0,2]$.
m. $dom(f)=IR-[-1,3]$, $img(r)=(-\infty,0]$. **n.** $dom(f)=IR-(-2,4)$, $img(f)=[0,+\infty)$.
o. $dom(f)=[-7,7]$, $img(f)=[0,7]$. **p.** $dom(f)=[-7,7]$, $img(f)=[0,\frac{6}{5}]$.
q. $dom(f)=[-4,-2]$, $img(f)=[0,1]$. **r.** $dom(f)=[3,7]$, $img(f)=[0,2]$.
s. $dom(f)=\left[-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$, $img(f)=[0,1+\sqrt{6}]$. **t.** $dom(f)=IR$, $img(f)=[\frac{51}{10},+\infty)$.
7. a. $dom(f)=IR$, $img(f)=[\sqrt{6},+\infty)$, rama de una hipérbola. **b.** $dom(f)=IR$, $img(f)=[1,+\infty)$, rama de una hipérbola.
c. $dom(f)=IR$, $img(f)=[4,+\infty)$, rama de una hipérbola. **d.** $dom(f)=IR$, $img(f)=[3,+\infty)$, rama de una hipérbola.
e. $dom(f)=IR$, $img(r)=(-\infty,-5.61]$, rama de una hipérbola. **f.** $dom(f)=IR$, $img(f)=[1,+\infty)$, dos semirrectas.
8. a. No es una función. **b.** No es una función. **c.** No es una función. **d.** No es una función. **e.** No es una función.
f. $dom(f)=IR$, $img(f)=[0,+\infty)$, semirrectas perpendiculares, positivas con punto común $(3,0)$.
g. $dom(f)=IR$, $img(f)=(-\infty,0]$, semirrectas, negativas con punto común $(-2,0)$. **h.** Punto en el plano cartesiano.
9. a. $f(x)=\sqrt{-x+2}$. **b.** $f(x)=\sqrt{-\frac{3}{4}x+3}$. **c.** $f(x)=\sqrt{-5x+4}$. **d.** $f(x)=-\sqrt{x-3}$. **e.** $f(x)=-\sqrt{3-\frac{3}{2}x}$.
10. a. $f(x)=\sqrt{1-x^2}$. **b.** $f(x)=-\sqrt{16-x^2}$. **c.** $f(x)=-\sqrt{320+4x-x^2}$. **d.** $f(x)=\sqrt{x^2+4x}$. **e.** $f(x)=\sqrt{x^2+4x}+2$.
11. a. $f(x)=\sqrt{1+x^2}$. **b.** $f(x)=\sqrt{4+x^2}$. **c.** $f(x)=-\sqrt{16+x^2}$. **d.** $f(x)=\sqrt{9+x^2}+2$. **e.** $f(x)=-\sqrt{9+x^2}+2$.
12. a. $h(x)=\sqrt{100-x^2}$, $0\le x\le 10$. **b.** $x=\sqrt{91}$ metros. **13. a.** $d(y)=\sqrt{64-y^2}$, $0\le y\le 8$. **b.** $\sqrt{48}$ metros. **c.** $12-\sqrt{39}$ metros.
14. a. $d(x)=\sqrt{2x^2+4x+4}$, $x\ge 0$. **b.** $d(x)=\sqrt{2x^2+4x+4.16}$, $x\ge 0$. **15. a.** $r(c)=\sqrt{\frac{c}{400\pi+560\pi}}$, $c\ge 0$. **b.** $\sqrt{\frac{5000}{400\pi+560\pi}}$ pesos.
16. a. $d(y)=\sqrt{y^2-8y+25}$, $y\in IR$. **b.** $d(x)=\sqrt{x^2-2x+2}$, $x\in IR$. **17. a.** $r(A)=\sqrt{\frac{2A}{24+\pi}}$, $A\ge 0$. **b.** $\sqrt{\frac{24\pi}{24+\pi}}$ unidades cuadradas. **18. a.** $r(A)=\sqrt{\frac{2A}{\pi+40}}$. $A\ge 0$. **b.** $\sqrt{\frac{40\pi}{\pi+40}}$. **20.** $r(A)=\sqrt{\frac{2A}{13\pi}}$. $A\ge 0$. **b.** $\sqrt{\frac{100}{13\pi}}$. **21. a.** $r(A)=\sqrt{\frac{2A}{97\pi}}$. $A\ge 0$, **b.** $\sqrt{\frac{100}{97}}$.
23. a. $l(A)=\sqrt{\frac{A}{2\pi}}$, $A\ge 0$. **b.** $l(A)=\sqrt{\frac{A}{12\pi}}$, $A\ge 0$.

PROBLEMAS PROPUESTOS 3.1

5. $f(n)=(\frac{1}{2})^n$, $n\in IN$. **6.** $l(n)=(\frac{4}{3})^n$, $n\in IN$. **7. a.** $f(n)=5000(1.01)^n$, $n\in IN$. **b.** $l(10)\approx 5523$.
8. $f(n)=(2)^n$, $n\in IN$. **9.** $f(n)=m(\frac{1}{4})^n$, $n\in IN$. **10. a.** $p(x)=650{,}000(0.94)^x$, $x\in IN$.
11. a. $q(t)=20e^{-0.208\,t}$, $t\in IN$. **b.** Aproximadamente 0.8832 gramos. **c.** Aproximadamente 3.33 días.
12. Aproximadamente 33.38 años. **19. a.** $f(x)=\frac{1}{2}4^x$. **b.** $f(x)=4\cdot 3^x+1$. **c.** $f(x)=3\cdot 3^x+3$. **d.** $f(x)=-9\cdot(\frac{5}{3})^x+3$.
20. a. $f(x)=\frac{1}{3}2^x$. **b.** $f(x)=\frac{3}{8}(\frac{1}{4})^x$. **c.** $f(x)=-\frac{2}{25}(10)^{\frac{1}{2}x}$. **d.** $f(x)=\frac{2}{7}(9)^x$.
21. a. $f(x)=h(x)\ne g(x)$. **b.** $f(x)\ne h(x)\ne g(x)$. **22. a.** $f(x)=h(x)\ne g(x)$. **b.** $f(x)=h(x)\ne g(x)$.
23. a. $f(x)=2(3^{-x})$. **b.** $g(x)=\frac{1}{4}(2^{-x})$. **c.** $h(x)=-3(4^{-x})$. **d.** $m(x)=\frac{1}{5}(3^x)$. **e.** $n(x)=\frac{3}{2}(2^{-x})$.
24. a. $x=1$. **b.** $x=-6$. **c.** $x=-2$, $x=2$. **d.** $x=-1$, $x=4$. **e.** $x=-2-\sqrt{7}$, $x=-2+\sqrt{7}$. **f.** $x=2$. **g.** $x=-2$, $x=2$. **h.** $x=3$.
i. $x=3$.
25. a. *decaimiento*, $f(0)=3$, $k=-1$. **b.** *crecimiento*, $g(0)=\frac{1}{2}$, $k=1$. **c.** *decaimiento*, $h(0)=5$, $k=-2$.

d. $decaimiento$, $a(0)=4$, $k=-4$. **e.** $crecimiento$, $g(0)=\frac{1}{2}$, $k=2$. **f.** $decaimiento$, $f(0)=3$, $k=-\frac{1}{3}$.
g. $crecimiento$, $m(0)=6$, $k=1$. **h.** $crecimiento$, $f(0)=2$, $k=1$.
26. a. $f(x)=3(5^{-3x})$. **b.** $f(x)=\frac{3}{7}(3^{0.2x})$. **c.** $f(x)=6(7^{4x})$. **d.** $f(x)=\frac{5}{3}(2^{-\frac{1}{2}x})$.
27. a. $f(x)=3(1.03)^x$. **b.** $f(x)=7(1.15)^x$. **c.** $f(x)=10(0.88)^x$. **d.** $f(x)=7(0.92)^x$. **e.** $f(x)=2(1.22)^x$.
f. $f(x)=25(1.025)^x$.
28. a. $p(0)=50$. **b.** Aproximadamente 74.6 millones.
30. Aproximadamente 73.485 millones. **31.** Aproximadamente 5.242 millones. **32. a.** Aproximadamente 1039, 1800 y 5400.
33. Aproximadamente 10555 millones. **b.** Aproximadamente 17663 millones.
34. a. Aproximadamente 50 miligramos. **b.** Aproximadamente 25 miligramos. **c.** Aproximadamente 5.83 miligramos.
35. a. Aproximadamente el 39.69 %. **b.** Aproximadamente el 25 %.
37. a. $\$ 257\,400$. **b.** Aproximadamente $\$134\,364.41$. **c.** Aproximadamente $\$59\,618.20$. **d.** Aproximadamente $\$39\,712.40$.
e. Aproximadamente $\$22\,484.98$.
38. a. Aproximadamente $\$84.18$. **b.** Aproximadamente $\$11.54$. **c.** Aproximadamente $\$48.53$. **d.** Aproximadamente $\$89\,107.50$.
e. Aproximadamente $\$105\,65.73$.

PROBLEMAS PROPUESTOS 3.2

1. a. $x=log_4 y$. **b.** $x=log_{(2x+3)}y$. **c.** $3x+2=log_{(x-3)}y$. **d.** $x+5=log_{(x^2+4)}y$. **e.** $x+2=log_{(x^2+1)}(x+1)$. **f.** $4x+2=log_{(1-x)}(2x+7)$. **2. a.** $y=6^x$. **b.** $y=4^{3x-2}$. **c.** $y=(x-4)^{x-5}$. **d.** $y=(x-4)^{3x-2}$.
5. a. $f^{-1}(x)=\sqrt[3]{x+4}$, $dom(f^{-1})=IR$, $img(f^{-1})=IR$. **b.** $f^{-1}(x)=x-9$, $dom(f^{-1})=IR$, $img(f^{-1})=IR$.
c. $f^{-1}(x)=\frac{1}{4}(x-7)$, $dom(f^{-1})=IR$, $img(f^{-1})=IR$. **d.** $f^{-1}(x)=\sqrt[5]{x-6}$, $dom(f^{-1})=IR$, $img(f^{-1})=IR$.
e. $f^{-1}(x)=\sqrt{x-6}$, $dom(f^{-1})=[6,+\infty)$, $img(f^{-1})=IR$. **f.** $f^{-1}(x)=\sqrt{x+1}$, $dom(f^{-1})=[-1,+\infty)$, $img(f^{-1})=IR$.
6. a. $f^{-1}(x)=3^x-2$. **b.** $f^{-1}(x)=4^x+3$. **c.** $f^{-1}(x)=2^{x-2}+1$. **d.** $f^{-1}(x)=7^{-3x-3}$. **e.** $f^{-1}(x)=4^{x-2}+3$. **f.** $f^{-1}(x)=-3^{x-1}$.
7. a. $10^y=10000$. **b.** $5^y=625$. **c.** $3^y=2187$. **d.** $2^y=1024$. **e.** $2^y=\frac{1}{128}$. **f.** $4^y=4096$. **g.** $10^y=\frac{1}{1000}$. **h.** $5^y=\frac{1}{625}$. **i.** $3^y=\frac{1}{243}$. **j.** $4^y=\frac{1}{256}$.
8. a. $log_{10}10000=4$. **b.** $log_5 625=4$. **c.** $log_3 2187=7$. **d.** $log_2 1024=10$. **e.** $log_4 4096=6$. **f.** $log_{10}\frac{1}{1000}=-3$. **g.** $log_5\frac{1}{625}=-4$.
h. $log_3\frac{1}{243}=-5$.
9. a. $log_5 625=4$. **b.** $log_4 64=3$. **c.** $log_{10}0.001=-3$. **d.** $log_{12}1=0$. **e.** $log_2 64=6$. **f.** $log_{10}0.1=-1$. **g.** $log_y z=x$. **h.** $log_v u=w$.
15. a. $log_3 10x=log_3 10+log_3 x$. **b.** $log_6 3x=log_6 3+log_6 x$. **c.** $log_8\frac{8}{x}=log_8 8-log_8 x$. **d.** $log_6\frac{3x}{4}=log_6 3+log_6 x-log_6 4$.
e. $log_3 x^{-4}=-4\,log_3 x$. **f.** $log_7(x^4y^6)=4log_7 x+6log_7 y$. **g.** $log_{12}(x^{-2}y^{-3})=-2log_{12}x-3log_{12}y$.
h. $log_{18}\dfrac{x^{-4}}{y^{-2}}=-4log_{18}x-2log_{18}y$. **i.** $log_2\sqrt{\dfrac{x^3}{y^2}}=\frac{1}{2}(3log_2 x-2log_2 y)$. **j.** $log_4\dfrac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[5]{y}}=\frac{1}{3}log_4 x-\frac{1}{5}log_5 y$.
16. a. $f(x)=log_{12}\dfrac{x^2}{144}$. **b.** $f(x)=log\dfrac{x^{-6}}{100}$. **c.** $f(x)=log_6\dfrac{\sqrt[3]{x}}{36}$. **d.** $f(x)=ln\,36x^{-6}$. **e.** $f(x)=ln\,e^4x^4$. **f.** $f(x)=ln\,ex$.
g. $f(x)=log_2\dfrac{x^3}{16}$.
17. a. $f(x)=log_3 10$. **b.** $g(x)=log_6\frac{27}{25}x$. **c.** $h(x)=log_6\dfrac{64}{x^4}$. **d.** $a(x)=log_6\dfrac{21x^2}{5}$. **e.** $b(x)=log_4\dfrac{a}{x}$.
f. $c(x)=3log_{10}(a^3b^3x^9)$. **g.** $d(x)=ln\dfrac{a^{10}}{x^{16}}$. **h.** $e(x)=ln\,x^{\frac{33}{2}}$.
18. a. $f(x)=\frac{1}{2}log_2 x$. **b.** $f(x)=2log_4 x$. **c.** $f(x)=\frac{1}{4}log_3 x$. **d.** $f(x)=\frac{1}{log_4 e}log_4 x$. **e.** $f(x)=\frac{1}{log_{\frac{1}{2}}e}log_{\frac{1}{2}}x$.

f. $f(x)=6log_4 x-6$. **g.** $f(x)=\frac{1}{2ln4} ln\, x+1$. **h.** $f(x)=6-\frac{9}{log_5 10} log_5 x$. **i.** $f(x)=1+8log_4 x$. **j.** $f(x)=5+\frac{3}{ln6} ln\, x$.

19. a. $f(x)=2^{2x}$. **b.** $f(x)=3\left(5^{(log_5 4)x}\right)-2$. **c.** $f(x)=8\left(2^{2x}\right)-2\left(2^{-2x}\right)$. **d.** $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^{\log_{\frac{1}{2}} 14x}(x-2)$-

21. a. $f(x)=e^{(ln4)x}$. **b.** $f(x)=3e^{(ln4)x}-2$. **c.** $f(x)=8\left(e^{(ln4)x}\right)-2\left(e^{-(ln4)x}\right)$. **d.** $f(x)=e^{(ln44)x}(x-2)$.

e. $f(x)=e^{xlnx}$. **f.** $f(x)=e^{(\sqrt{x+1})ln\, x}-x^2$. **g.** $f(x)=e^{(2x+1)ln\, x}$. **h.** $f(x)=e^{x^2 ln\, x}$.

26. a. $x=9$. **b.** $x=27$. **c.** $x=\frac{1}{8}$. d. $x=13$. **e.** $x=\pm\frac{1}{100}$. **f.** $x=\frac{37}{47}$.

27. a. $x=\frac{31}{115}$. **b.** $x=\pm\frac{-3\pm\sqrt{33}}{4}$. **c.** $x=5$. **d.** $x=5$. **e.** $x=\frac{103}{2}$. **f.** $x=9$. **g.** $x=9$. **h.** $x=7$.

28. a. $x=0$. **b.** $x=-3,\ x=1$. **c.** $x=2$. **d.** $x=4$. **e.** $x=\frac{25}{3}$. **f.** $x=2$. **h.** $x=\sqrt{ln\left(\frac{9}{25}\right)}$. **i.** $x=\sqrt{\frac{1}{ln\left(\frac{3}{2}\right)}}$.

29. a. $x=1$. **b.** $x=4$. **c.** $x=5$. **d.** $x=3$. **e.** $x=1$. **f.** $x=2$. **g.** $x=2$. **h.** $x=-\frac{5}{4}$. **i.** $x=3,\ x=1$. **j.** $x=1\pm\sqrt{5}$.

30. a. $x=log_{\frac{6}{5}}\left(\frac{a-20}{50}\right)$. **b.** $x=e^{at+b}+13$. **c.** $x=\frac{1}{3-e^{-4}}$. **d.** $x=2$. **e.** $x=9$. **f.** $x=-3$. **g.** $x=-4$. **h.** $x=\frac{1}{2}$.

31. a. i. $7.94328\times10^{11}\ J$. **ii.** $2.51189\times10^{13}\ J$. **iii.** $2.51189\times10^{16}\ J$. **iv.** $2.51189\times10^{19}\ J$. **b.** 31622.82153.

32. a. 139.0309. **b.** 139.5424. **c.** 140. **d.** 140.7918.

33. $y=-5.0959$. **34.** $W=8.8997.59\ J$. **35.** $p=3$. **36.** $c=41.50111$. **37. a.** $t=17.8966$ años. **b.** $t=9.902$ años. **c.** $t=5.776$ años.

38. a. $t=7.213$ horas. **b.** $t=3.106$ horas. **39.** $t=6.7723$ horas. **40.** $t=1.54$ horas. **43. a.** Aproximadamente 7720 moscas. **b.** Aproximadamente 1082 habitantes. **44.** $n=10.24476835$. **45.** $t(T)=-\frac{1}{2}ln\left(\frac{1}{75}T\right),\ T\le 75$.

46. a. Aproximadamente el 63.18 %. **b.** Aproximadamente el 72.94 %. **c.** Aproximadamente 18.70 meses. **d.** Aproximadamente 1.26 meses.

47. a. 66.508 %. **b.** 78.63 %. **c.** 12.274 meses. **d.** 2.184 meses.

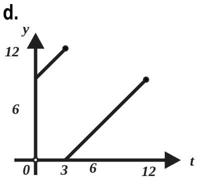
48. a. 6.895. **b.** 5.478. **c.** 1.26×10^{24} ergios. **d.** ergios.

49. a. 90.229 miles de millones de personas. **b.** 96.296 años después.

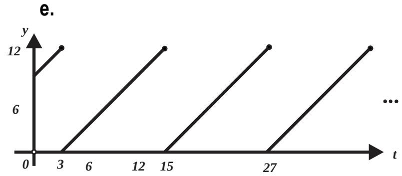
PROBLEMAS PROPUESTOS 4.1

1. a. Las 12 horas. **b.** Las 6 horas. **c.** Las 9 horas.

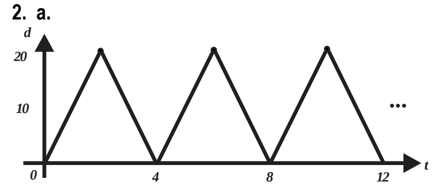
d.



e.



2. a.



b. $d_1(t)=10t\ sí\ 0\le t\le 2$ y $d_2(t)=-10t+20\ sí\ 2<t\le 4$, periodo $T=4$.

3.

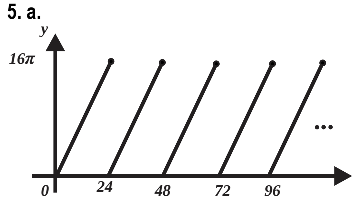
a.

b. $I_1(t)=0\ sí\ 0\le t\le 2$ y $I_2(t)=3\ sí\ 2<t\le 4$, periodo $T=4$.

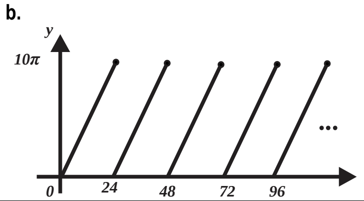
4.

a. $d=3200\pi$ centímetros. **b.** $d=258\pi$ centímetros. **c.** $d=14674\pi$ centímetros. **d.** $V=\frac{100}{3}\pi$ centímetros cúbicos. **e.** $V=129.6\pi$ centímetros cúbicos.

5. a.

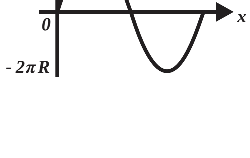


b.



6. a. $m\angle x=\frac{1}{2}\pi$. **b.** $m\angle x=\frac{3}{2}\pi$.

c.



7. a. $T=3$, $A=\frac{3}{2}$. **b.** $T=\frac{4\pi}{3}$, $A=2$. **c.** $T=3$, $A=\frac{3\pi}{4}$. **d.** $T=2$, $A=\frac{1}{2}$. **e.** $T=2$, $A=\frac{3}{2}$. **e.** $T=\frac{\pi}{2}$, $A=1$.

8. a. $\theta=0.08726^r$. **b.** $\theta=0.4014^r$. **c.** $\theta=1.7104^r$. **d.** $\theta=2.8274^r$. **e.** $\theta=3.3335^r$. **f.** $\theta=10.1752^r$. **g.** $\theta=15.4112^r$.
h. $\theta=-3316^r$. **i.** $\theta=-1.5184^r$. **j.** $\theta=-8.7790°$. **9. a.** $\theta=17.1887°$. **b.** $\theta=93.9650°$. **c.** $\theta=334.0343°$. **d.** $\theta=4.1253°$.
e. $\theta=475.554°$. **f.** $\theta=-131.78029$. **g.** $\theta=-91.673$. **10. a.** $l=\frac{2}{3}\pi$. **b.** $l=\frac{4}{3}\pi$. **c.** $l=3\pi$. **d.** $l=\frac{70}{9}\pi$.
11. a. $r=72$ unidades lineales. **b.** $A=1944$ unidades cuadradas. **12.** $L=10$ metros. **13. a.** 27 unidades. **b.** 120π metros.
14. a. $A=\frac{2}{3}\pi$ unidades cuadradas. **b.** $A=\frac{11}{9}\pi$ unidades cuadradas. **c.** $A=2\pi$ unidades cuadradas. **d.** $A=\frac{250}{9}\pi$ unidades cuadradas.
15. a. $A=\frac{16}{3}\pi$ unidades cuadradas. **b.** $A=\frac{16}{3}\pi$ unidades cuadradas. **c.** $A=6\pi$ unidades cuadradas. **d.** $A=\frac{125}{3}\pi$ unidades cuadradas.
16. a. $V=\frac{4}{3}\pi$ unidades cúbicas. **b.** $V=\frac{32}{9}\pi$ unidades cúbicas. **c.** $V=\frac{3}{2}\pi$ unidades cúbicas. **d.** $V=\frac{64}{9}\pi$ unidades cúbicas.
17. a. $25°\pm n360°$. **b.** $-43°\pm n360°$. **c.** $112°\pm n360°$. **d.** $-143°\pm n360°$ **e.** $210°\pm n360°$. **f.** $-198°\pm n360°$. **g.** $-313°\pm n360°$.
18. Determine el ángulo de referencia comprendido entre $0°$ y $360°$ coterminal a:
a. $\theta=6°$. **b.** $\theta=52°$. **c.** $\theta=-309°$. **d.** $\theta=80°$. **e.** $\theta=20°$. **f.** $\theta=50°$.

PROBLEMAS PROPUESTOS 4.2

1. a. $dom(f)=IR$, $img(f)=[-3\ ,\ 3]$, $A=3$, $T=\pi$ y $|B|=2$.
b. $dom(f)=IR$, $img(f)=[-2\ ,\ 2]$, $A=2$, $T=\frac{2\pi}{3}$ y $|B|=3$.
c. $dom(f)=IR$, $img(f)=[-4\ ,\ 4]$, $A=4$, $T=\frac{2\pi}{3}$ y $|B|=3$.
d. $dom(f)=IR$, $img(f)=[-2\ ,\ 2]$, $A=2$, $T=4\pi$ y $|B|=\frac{1}{2}$.
e. $dom(f)=IR$, $img(f)=[-1\ ,1]$, $A=1$, $T=8\pi$ y $|B|=\frac{1}{4}$.
f. $dom(f)=IR$, $img(f)=[-6\ ,\ 6]$, $A=6$, $T=5\pi$ y $|B|=5$.
g. $dom(f)=IR$, $img(f)=[-1\ ,\ 1]$, $A=1$, $T=8\pi$ y $|B|=\frac{1}{4}$.
h. $f(t)=\pi\cos 6t$. $dom(f)=IR$, $img(f)=[-\pi\ ,\ \pi]$, $A=\pi$, $T=\frac{\pi}{3}$ y $|B|=6$.
2. a. $dom(f)=IR$, $img(f)=[-\frac{1}{3}\ ,\ \frac{1}{3}]$, $A=\frac{1}{3}$, $T=2\pi$, $|B|=2$ y $fase=\pi$.
b. $dom(f)=IR$, $img(f)=[-1\ ,\ 1]$, $A=1$, $T=6\pi$, $|B|=\frac{1}{3}$ y $fase=-\frac{3}{4}\pi$.
c. $dom(f)=IR$, $img(f)=[-2\ ,\ 2]$, $A=2$, $T=\pi$, $|B|=2$ y $fase=\frac{1}{12}\pi$.
d. $dom(f)=IR$, $img(f)=[-2\ ,\ 2]$, $A=2$, $T=6\pi$, $|B|=\frac{1}{3}$ y $fase=-\frac{1}{3}\pi$.
e. $dom(f)=IR$, $img(f)=[-3\ ,\ 3]$, $A=3$, $T=\pi$, $|B|=2$ y $fase=-\frac{1}{8}\pi$.
f. $dom(f)=IR$, $img(f)=[-\frac{1}{4}\ ,\ \frac{1}{4}]$, $A=\frac{1}{4}$, $T=\pi$, $|B|=2$ y $fase=\frac{1}{6}\pi$.
g. $dom(f)=IR$, $img(f)=[-\frac{1}{4}\ ,\ \frac{1}{4}]$, $A=\frac{1}{4}$, $T=\frac{1}{2}\pi$, $|B|=4$ y $fase=\frac{1}{24}\pi$.
h. $dom(f)=IR$, $img(f)=[-2\ ,2]$, $A=2$, $T=\frac{2}{3}\pi$, $|B|=3$ y $fase=\frac{1}{6}\pi$.
i. $dom(f)=IR$, $img(f)=[-\frac{1}{2}\ ,\frac{1}{2}]$, $A=\frac{1}{2}$, $T=8\pi$, $|B|=\frac{1}{4}$ y $fase=\frac{2}{3}\pi$.
j. $dom(f)=IR$, $img(f)=[-\frac{2}{5}\ ,\frac{2}{5}]$, $A=\frac{2}{5}$, $T=\pi$, $|B|=2$ y $fase=-\frac{3}{8}\pi$.
k. $dom(f)=IR$, $img(f)=[-7\ ,7]$, $A=7$, $T=3\pi$, $|B|=\frac{2}{3}$ y $fase=\frac{1}{2}\pi$.
l. $dom(f)=IR$, $img(f)=[-\frac{1}{5}\ ,\frac{1}{5}]$, $A=\frac{1}{5}$, $T=16\pi$, $|B|=\frac{1}{8}$ y $fase=\frac{4}{3}\pi$.
5.
a. $dom(f)=IR$, $img(f)=[\frac{11}{4}\ ,\ \frac{13}{4}]$, $A=\frac{1}{4}$, $T=2\pi$, $|B|=1$ y $fase=\frac{1}{6}\pi$.
b. $dom(f)=IR$, $img(f)=[-3\ ,\ -1]$, $A=2$, $T=10\pi$, $|B|=\frac{1}{5}$ y $fase=\frac{5}{3}\pi$.
c. $dom(f)=IR$, $img(f)=[3\ ,\ 7]$, $A=2$, $T=\frac{2}{3}\pi$, $|B|=3$ y $fase=\frac{1}{12}\pi$.
d. $dom(f)=IR$, $img(f)=[-\frac{10}{3}\ ,\ -\frac{8}{3}]$, $A=\frac{1}{3}$, $T=2\pi$, $|B|=1$ y $fase=\frac{1}{5}\pi$.
e. $dom(f)=IR$, $img(f)=[3\ ,\ 7]$, $A=2$, $T=\frac{2}{3}\pi$, $|B|=3$ y $fase=\frac{1}{12}\pi$.
g. $dom(f)=IR$, $img(f)=[-10\ ,\ -2]$, $A=4$, $T=8\pi$, $|B|=\frac{1}{4}$ y $fase=\frac{2}{5}\pi$.
h. $dom(f)=IR$, $img(f)=[3\ ,\ 7]$, $A=2$, $T=\pi$, $|B|=2$ y $fase=-\frac{1}{16}\pi$.
i. $dom(f)=IR$, $img(f)=[-7\ ,\ -5]$, $A=6$, $T=4\pi$, $|B|=\frac{1}{2}$ y $fase=\frac{2}{3}\pi$.
7. a. $g(x)=5\cos\frac{1}{2}x$. **b.** $g(x)=0.7\cos 4x$. **c.** $f(x)=2.4sen\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$. **d.** $f(x)=3sen\left(2x+\frac{\pi}{5}\right)$. **e.** $f(x)=4sen\left(\frac{8}{5}x-\frac{\pi}{5}\right)$.

f. $f(x)=5sen\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$. **g.** $f(x)=4.1sen\left(\frac{7}{5}x+\frac{\pi}{5}\right)$. **h.** $f(x)=2sen\left(\frac{9}{5}x+\frac{\pi}{5}\right)$. **8.** $f(t)=sen\left(t-\pi\right)$. **9.** $f(t)=sen\left(t-\frac{\pi}{2}\right)$.

14. a. $f(t)=2sen\left(\frac{4}{3}t-\frac{\pi}{3}\right)$ y $g(t)=2cos\left(\frac{4}{3}t-\frac{\pi}{3}\right)$. **b.** $f(t)=3sen\left(\frac{2}{3}t-\frac{\pi}{9}\right)$ y $g(t)=3cos\left(\frac{2}{3}t-\frac{\pi}{9}\right)$.

c. $f(t)=\frac{4}{3}sen\left(\frac{1}{2}t-\frac{\pi}{6}\right)$ y $g(t)=\frac{4}{3}cos\left(\frac{1}{2}t-\frac{\pi}{6}\right)$.

15. a. $Q(0,3)$ y $R\left(\frac{3}{4}\pi,0\right)$. **b.** $Q\left(\frac{3\pi}{4},\frac{9}{2}\right)$ y $R\left(\frac{9\pi}{4},0\right)$. **c.** $Q\left(\frac{\pi}{4},2\right)$ y $R\left(\frac{\pi}{2},0\right)$.

16. a. $g(t)=cos\left(t-\frac{\pi}{3}\right)$. **b.** $g(t)=cos(t)$. **c.** $g(t)=-cos(t)$. **d.** $f(t)=cos\left(t-\frac{\pi}{6}\right)$. **e.** $f(t)=2cos\left(t-\frac{3\pi}{4}\right)$.

f. $f(t)=-2cos\left(t-\frac{\pi}{3}\right)$. **17. a.** $\varphi=\pi$. **b.** $\varphi=\pi$. **c.** $\varphi=\frac{\pi}{2}$. **d.** $\varphi=\frac{\pi}{2}$. **e.** $\varphi=-\frac{\pi}{2}$. **f.** $\varphi=\frac{\pi}{2}$.

18. a. Ceros cuando $t=\frac{\pi}{12}\pm\frac{4}{3}n\pi$, valor máximo $y=2$ cuando $t=\frac{\pi}{4}\pm\frac{2}{3}n\pi$, valor mínimo $y=-2$ cuando $t=\frac{7\pi}{12}\pm\frac{4}{3}n\pi$.

b. Ceros cuando $t=\frac{7\pi}{18}\pm\frac{1}{3}n\pi$, valor máximo $y=\frac{1}{3}$ cuando $t=\frac{4\pi}{9}\pm\frac{2}{3}n\pi$, valor mínimo $y=-2$ cuando $t=\frac{5\pi}{18}\pm\frac{2}{3}n\pi$.

c. Ceros cuando $t=\frac{\pi}{3}\pm\frac{\pi}{6}(2n+1)$, valor máximo $y=\frac{2}{5}$ cuando $t=\frac{\pi}{3}\pm\frac{2}{3}n\pi$, valor mínimo $y=-\frac{2}{5}$ cuando $t=\frac{1\pi}{2}\pm\frac{2}{3}n\pi$.

d. Ceros cuando $t=\frac{\pi}{2}(\pm n+1)$, valor máximo $y=4$ cuando $t=-\frac{\pi}{4}\pm\frac{1}{2}n\pi$, valor mínimo $y=-4$ cuando $t=\frac{3\pi}{4}\pm n\pi$.

e. Ceros cuando $t=\frac{\pi}{4}\pm\frac{n\pi}{3}$, valor máximo $y=5$ cuando $t=\frac{5\pi}{12}\pm\frac{2}{3}n\pi$, valor mínimo $y=1$ cuando $t=\frac{3\pi}{4}\pm\frac{2}{3}n\pi$.

f. No tiene ceros, valor máximo $y=11$ cuando $t=\frac{\pi}{2}\pm2n\pi$, valor mínimo $y=1$ cuando $t=\frac{3\pi}{2}\pm2n\pi$.

g. Ceros cuando $t=\frac{\pi}{6}\pm(2n+1)\frac{\pi}{6}$, valor máximo $y=5$ si $t=\frac{\pi}{6}\pm\frac{2n\pi}{3}$, valor mínimo $y=-3$ sí $t=\frac{\pi}{6}\pm(2n+1)\frac{\pi}{3}$.

19. a. $|A|=220$, $B=2$, $T=\pi$. **c.** $A(t)=-220\,sen\left(2t-\frac{\pi}{4}\right)$. **20. a.** $|A|=0.04$, $B=2\pi$, $T=1$. **21.** $S(t)=96sen(0.8\pi t)$.

23. a. $|A|=38$, $B=\frac{2\pi}{365}$, $T=365$. **b.** $\overline{T}=74\,°F$. **24. a.** $|A|=7$, $B=12$, $T=\frac{\pi}{6}$. **c.** $f(t)=7\cos\left(12t+\frac{\pi}{6}\right)$.

25. b. $|A|=50$, $B=2\pi$ y $T=1$. **26. a.** $d(x^r)=100\,tg(x^r)$. **b.** $100\,tg(1.4^r)$. **c.** $100\,tg(0.8^r)$. **28. a.** $E_{mÁx}=110$. **b.** $T=\frac{1}{40}$.

30. b. $A=8$. **c.** $T=\frac{2\pi}{5}$. **d.** $B=5$.

BIBLIOGRAFÍA

Angel, A.	Álgebra Intermedia	Pearson-Prentice Hall. 2004.
Demana	Precálculo	Pearson-Addison Wesley. 2007.
Barnett, Raymond, et al.	Precálculo: Funciones y Graficas.	Mc Graw-Hill, México, 2000.
Gelther, P.	Geometría y Trigonometría	Thomson 2002.
Hirsch, C.	Trigonometría, Conceptos y Aplicaciones	Mc Graw Hill, 1987
Leithold, Louis.	Matemáticas previas al cálculo: Análisis Funcional y Geometría Analítica	Harla, México, 1996.
Miller, Charles D., y cols.	Matemática: Razonamiento y aplicaciones	Décima edición. Pearson Educación, México 2006.
Sullivan, M.	Precálculo	Prentice Hall, 1998
Stewart, J.	Precálculo	Thomson 2002.
Swokowski, Earl W.	Álgebra y Trigonometría con Geometría Analítica,	Grupo Editorial Iberomérica, México, 2002.