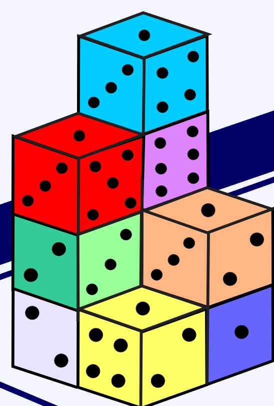
UNAM CCH Oriente

ESTADÍSTICA Y PROBABILIDAD 2

PANTALEÓN GÓMEZ
RAMÓN SÁNCHEZ
MIGUEL ÁNGEL RODRÍGUEZ
MAURICIO ENRIQUE RODRÍGUEZ
HÉCTOR GONZÁLEZ
JOSÉ ADOLFO RENDÓN
JOSÉ LUIS HERNÁNDEZ
JANETT KAROL MARTÍNEZ
FERNANDO TOVAR
SERGIO ORTIZ
RAFAEL MARTÍNEZ



VARIABLE ALEATORIA
DISTRIBUCIONES MUESTRALES
INTERVALOS DE CONFIANZA
PRUEBAS DE HIPÓTESIS

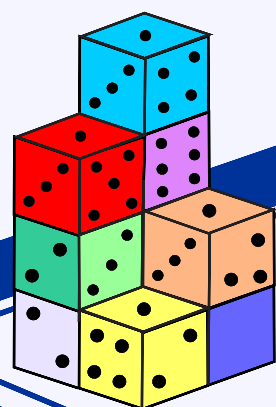
COORDINARON
GÓMEZ SÁNCHEZ

2021 2022

UNAM CCH Oriente

ESTADÍSTICA Y PROBABILIDAD 2

PANTALEÓN GÓMEZ CARRANZA
RAMÓN SÁNCHEZ RIVAS
MIGUEL ÁNGEL RODRÍGUEZ CHÁVEZ
MAURICIO ENRIQUE RODRÍGUEZ PÉREZ
HÉCTOR GONZÁLEZ PÉREZ
JOSÉ ADOLFO RENDÓN ORTIZ
JOSÉ LUIS HERNÁNDEZ HERNÁNDEZ
JANETT KAROL MARTÍNEZ ZAPOTITLA
FERNANDO TOVAR CHÁVEZ
SERGIO ORTIZ ANTONIO
RAFAEL MARTÍNEZ PATIÑO



VARIABLE ALEATORIA
DISTRIBUCIONES MUESTRALES
INTERVALOS DE CONFIANZA
PRUEBAS DE HIPÓTESIS

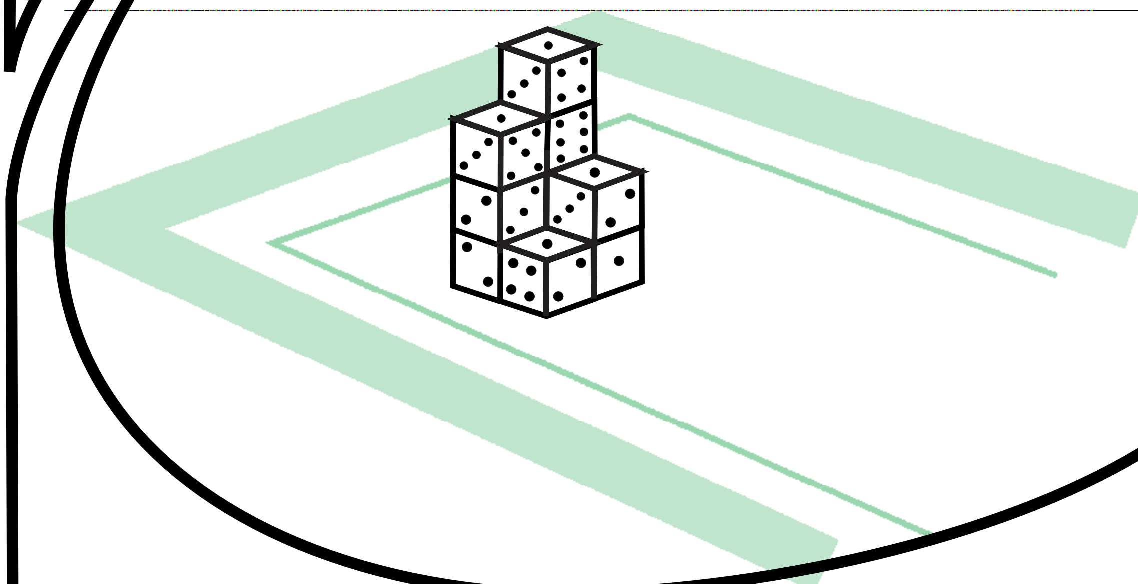
COORDINARON
GÓMEZ - SÁNCHEZ

2021 2022

UNAM CCH Oriente

ESTADÍSTICA Y PROBABILIDAD 2

PANTALEÓN GÓMEZ CARRANZA
RAMÓN SÁNCHEZ RIVAS
MIGUEL ÁNGEL RODRÍGUEZ CHÁVEZ
MAURICIO ENRIQUE RODRÍGUEZ PÉREZ
HÉCTOR GONZÁLEZ PÉREZ
JOSÉ ADOLFO RENDÓN ORTIZ
JOSÉ LUIS HERNÁNDEZ HERNÁNDEZ
JANETT KAROL MARTÍNEZ ZAPOTITLA
FERNANDO TOVAR CHÁVEZ
SERGIO ORTIZ ANTONIO
RAFAEL MARTÍNEZ PATIÑO



COORDINARON
GÓMEZ SÁNCHEZ

CICLO ESCOLAR
2021 2022

CONTENIDO

Introducción	**i**
1. Modelos de probabilidad y sus aplicaciones	**1**
1.1 Variable aleatoria	**2**
1.2 Distribución binomial y distribución normal	**37**
1.3 Resumen y autoevaluación	**76**
2. Estimadores e introducción a la inferencia estadística	**98**
2.1 Población, muestra, parámetro y estadístico	**99**
2.2 Distribuciones muestrales	**113**
2.3 Resumen y autoevaluación	**133**
3. Inferencia estadística	**140**
3.1 Estimación	**141**
3.2 Prueba de hipótesis, media y proporción poblacional	**160**
3.3 Resumen y autoevaluación	**177**
A. Tablas	**193**
A.1 Probabilidades binomiales acumuladas	**194**
A.2 Probabilidades y percentiles normales	**201**
A.3 Números aleatorios	**206**
B. Soluciones	**207**
B.1 Soluciones a problemas propuestos	**208**
B.2 Soluciones a autoevaluaciones	**214**
Bibliografía	**217**

INTRODUCCIÓN

Este libro de texto es una contribución de quienes integramos el grupo de trabajo EMCONA en apoyo la enseñanza aprendizaje de la asignatura de Estadística y Probabilidad II. Al mismo tiempo, tiene el propósito de poner a disposición de los profesores y alumnos, un material que corresponda al Programa de Estudios actualizado y que los oriente en un mejor desarrollo de las sesiones presenciales, a distancia o híbridas. En su elaboración tomamos hemos tomado en cuenta dos aspectos:

1. El enfoque disciplinario, es decir al destacar los argumentos básicos de la teoría matemática en que se sustenta la inferencia estadística, sin olvidar que no es un libro para expertos. Tampoco perdemos de vista la aplicabilidad y la utilidad que tiene la Estadística en desarrollo de las diferentes áreas de la ciencia.
2. El enfoque didáctico, se encuentra totalmente vinculado al modelo educativo del Colegio, al proponer el desarrollo de los aprendizajes que deben lograr los alumnos con base en la resolución de problemas.

El libro se divide en once secciones; cada unidad contiene tres partes, en las dos iniciales presentamos el desarrollo de los aprendizajes y contenidos temáticos y en la tercera se encuentran: actividades extras, el resumen de los conceptos y propiedades básicas, el uso de las tecnologías y la sección de autoevaluación de la unidad. Casi al final, el apartado A. incluye las tablas de probabilidades binomiales acumuladas, las tablas de probabilidades y percentiles normales, y una tabla de números aleatorios, por último, en el apartado B. Soluciones, contiene la solución a los problemas propuestos en las secciones y las soluciones de las autoevaluaciones de las Unidades:

Unidad 1. Modelos de probabilidad y sus aplicaciones.

Unidad 2. Estimadores e introducción a la inferencia estadística.

Unidad 3. Inferencia estadística.

Para lograr los propósitos y aprendizajes del Programa de Estudios vigente de la asignatura de Estadística y Probabilidad II, consideramos que, en las clases o sesiones, desarrollemos:

Las habilidades del profesor.

Al menos tres habilidades de los docentes del Área de Matemáticas se desprenden o son propias de la formación científica de nuestra disciplina de estudio:

1. La formulación clara y precisa de los conceptos matemáticos.
2. El empleo o aplicación correcta de dichos conceptos en la resolución de problemas, mismos que pueden ser de índole teórico, o bien de carácter concreto y práctico.
3. La utilización de las aportaciones de la estadística y de su metodología, a otras áreas del conocimiento, ya sea de las ciencias de la naturaleza o de las ciencias sociales y humanidades, sin descuidar las ciencias exactas.

Existen otras habilidades que tienen que ver con nuestra vocación como docentes, y que sólo son efectivas al ponerlas en práctica en el salón de clase, tales como propiciar el interés y motivar el estudio por la materia, hacer uso de un lenguaje accesible, claro y versátil para con los alumnos. Del mismo modo, tener paciencia y estar dispuestos a aclarar dudas y a tomar en cuenta sus participaciones, entre otros elementos a considerar.

En este libro de texto de Estadística y Probabilidad II, nos propusimos apoyar este conjunto de habilidades del profesor, de tal forma que, en cada una de las tres unidades el lector encontrará:

a) Una presentación de la Unidad temática

En donde se anotan los propósitos y los aprendizajes, también resaltamos las interrogantes: ¿qué debe aprender? ¿Por qué debe aprenderlo?

Los profesores que participamos en la elaboración del libro coincidimos en que los aprendizajes son el objetivo prioritario de nuestro trabajo en el aula con los alumnos, por lo que todas nuestras propuestas didácticas, desde el material impreso, libros, artículos, las actividades, ejercicios o problemas sugeridos, el uso de aplicaciones y programas de cómputo, por citar algunos, así como las formas de evaluación y calificación, tienen que estar vinculadas con los propósitos y aprendizajes del Programa de Estudios actualizado correspondiente.

En este contexto, puntualizamos los conceptos clave de cada uno de los aprendizajes descritos en cada una de las Unidades del Programa de Estudios, y por ello, resaltamos en recuadros las definiciones básicas indispensables del curso de Estadística y Probabilidad II.

Por otra parte, los alumnos y profesores podrán disponer de una exposición de los conceptos clave y también del desarrollo paso a paso en la solución de problemas concretos, en los que se aplican dichos conceptos. Asimismo, sugerimos una serie de:

b) Actividades de enseñanza aprendizaje.

En concordancia con el modelo educativo del Colegio y con el propósito de constatar que los alumnos han comprendido correctamente los conceptos clave, incluimos al final de cada sección un conjunto de problemas que requieren del uso de un procedimiento o de un algoritmo presentado en el texto. La dificultad de los ejercicios ha sido graduada de tal manera que los primeros fomenten la confianza del estudiante en sí mismo y que ello les refuerce los aprendizajes que se persigue adquieran. De los últimos, se pretende sean un reto a su intelecto. En la sección A.4 proporcionamos la solución de los ejercicios seleccionados.

Para enfatizar en los conceptos y aprendizajes, al final de las unidades incluimos:

c) Resumen y autoevaluación.

En primer lugar, se ubican actividades y ejercicios de apoyo en función de cada uno de los aprendizajes y contenidos temáticos de las unidades, ofreciendo una variabilidad y extensión de actividades realmente importante, tanto en calidad como en actualidad del tipo de problemas de los que se ocupa la Estadística. Situación que es posible presentar con entera confiabilidad en virtud de que dichas propuestas de actividades de enseñanza aprendizaje son producto, tanto de una profunda revisión bibliográfica, como del resultado de muchos años de experiencia docente del grupo de profesores con los estudiantes del CCH.

También, el lector encontrará un resumen de los conceptos e ideas clave para posteriormente, resolver un conjunto de problemas tanto operativos como conceptuales, con el propósito de que el estudiante pueda autoevaluarse e identificar su grado de avance en el aprendizaje de la materia. Además, dedicamos un inciso al:

d) Uso de las tecnologías

El uso y aprovechamiento de las tecnologías se encuentra detallado como trabajar algunos programas de cómputo y diversas aplicaciones para celular, así como también videos. Para cada aplicación, programa y/o videos, se inserta el hipervínculo o liga para acceder a ellos, los cuales se sugiere utilizar dependiendo de cada aprendizaje y propósito académico concerniente a las tres Unidades del Programa de Estudios.

Al respecto de este punto, controvertido y polémico en la academia de profesores, se propone evitar el abuso de las tecnologías y medios digitales, pues se puede provocar un aprendizaje parcial en los estudiantes orientado exclusivamente hacia los resultados finales en la solución de problemas.

Es el docente quien determina el momento y la forma en que se deben utilizar estos medios tecnológicos, sin embargo, en el texto se encuentra nuestra propuesta de cómo trabajarlos, sin hacer a un lado el desarrollo de los conceptos clave y los aprendizajes.

Finalmente, incluimos la sección que corresponde a:

e) Referencias bibliográficas

El libro de texto significó para el grupo de trabajo EMCONA, un arduo trabajo de sesiones en línea, de consulta e investigación de material bibliográfico sobre la materia de Estadística y Probabilidad, lo que sin duda es un factor que explica su extensión, pero sobre todo el cumplimiento de servir como un material sumamente completo y riguroso con respecto a la enseñanza de la asignatura al nivel de nuestro bachillerato. No obstante, este libro en todas sus secciones ya descritas, al igual que las referencias bibliográficas en que se apoya, están sujetas a las consideraciones, propuestas y críticas constructivas que ayuden a mejorar el libro de texto.

En este marco de reflexión y propuestas académicas abiertas, el libro de texto para Estadística y Probabilidad II, incluye al final una selección de bibliografía básica y complementaria susceptible de ser utilizada por profesores y alumnos en el desarrollo y aprendizaje, respectivamente, del curso escolar.

LOS AUTORES

1. MODELOS DE PROBABILIDAD Y SUS APLICACIONES

PROPÓSITO

Al finalizar la unidad el alumno:
Continuará desarrollando su pensamiento estadístico, apropiándose del concepto de variable aleatoria, y construyendo modelos de probabilidad en términos de su tendencia, variabilidad y distribución

CONTENIDO

1.1 VARIABLE ALEATORIA

1.2 DISTRIBUCIÓN BINOMIAL Y DISTRIBUCIÓN NORMAL

1.1 VARIABLE ALEATORIA DISCRETA Y VARIABLE ALEATORIA CONTINUA

¿Qué debe aprender?

1. Identificar el concepto de variable aleatoria.
2. Diferenciar variables aleatorias discretas y continuas.
3. Examinar los conceptos de distribución de probabilidad, esperanza matemática y desviación estándar.
4. Construir la distribución de probabilidad para una variable aleatoria discreta y su modelo de simulación físico o por medio de la computadora.
8. Deduce que en el caso de variables aleatorias continuas, la probabilidad debe calcularse dentro de un intervalo.
14. Concluye que una variable aleatoria, discreta o continua, puede describirse y analizarse por su tendencia, dispersión y distribución

¿Por qué debe aprenderlo?

La inclusión de variables aleatorias cuantifica atributos de experimentos aleatorios y relaciona la probabilidad con otras ramas de la matemática lo que hace posible el modelado y resolución de problemas de mayor complejidad e interés.

Temática

Propiedades. Distribución. Distribución acumulada, Parámetros: valor esperado y desviación estándar. Modelo de probabilidad continuo.

¿QUÉ ES UNA VARIABLE ALEATORIA? ¿CUÁL ES SU UTILIDAD?

La repetición de un fenómeno (bajo las mismas condiciones) que no siempre produce el mismo resultado se denomina *experimento aleatorio*. En un experimento aleatorio es imposible determinar a priori (inicialmente) cuál de sus resultados se va a producir, sin embargo, existe una *ley de regularidad* que rige la frecuencia con la que se obtiene cada uno de ellos. Si en la repetición de un fenómeno aleatorio es de mayor interés una característica numérica que una parte de sus resultados conviene establecer una regla que asigne a cada resultado un número real, vea la *figura 1*.

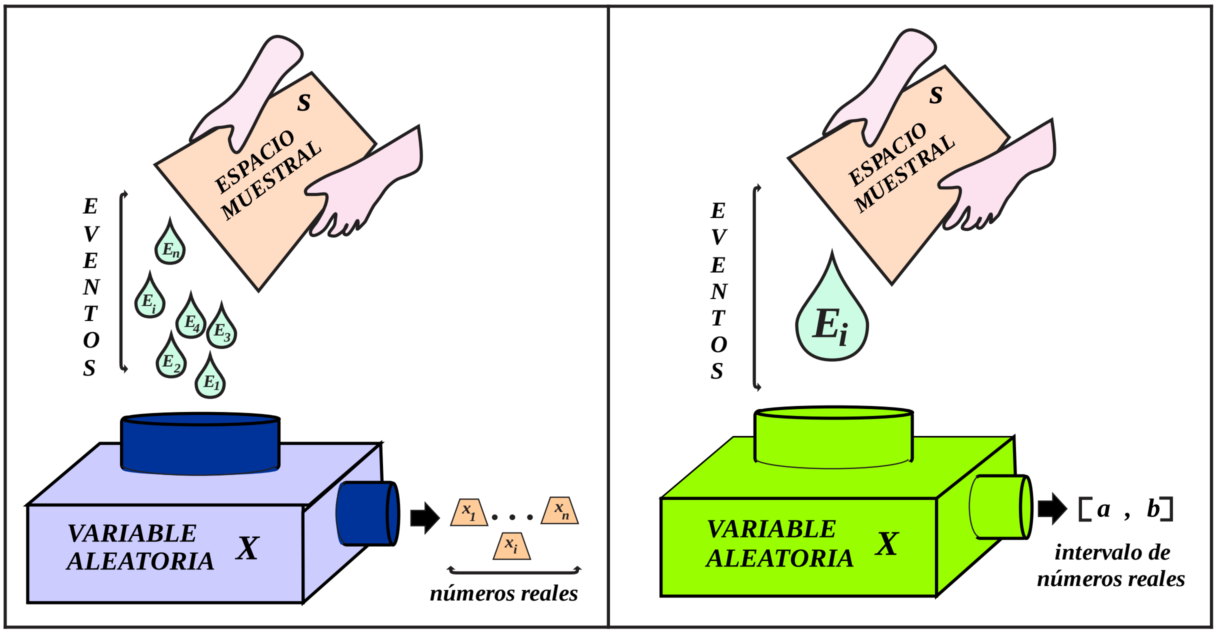


FIGURA 1

La introducción de una regla que transforme los eventos (de un espacio muestral) en números reales facilita su manejo en cuanto a, notación y escritura vinculando así la probabilidad con otras ramas de la matemática.

“Una variable aleatoria es una regla que transforma los eventos del espacio muestral de experimento aleatorio en números reales”.

EJEMPLO 1 (VARIABLES ALEATORIAS)

a. Se sabe que una gata tendrá una camada de dos crías e interesa conocer el número de machos. Sea la variable aleatoria

X =*“número de gatos machos en la camada”*.

i. Si m representa el evento “la cría es macho” y h el evento “la cría es hembra”, entonces el espacio muestral es el conjunto

$$S = \{ (m, m), (m, h), (h, m), (h, h) \}.$$

ii. Las asignaciones de la variable aleatoria

$X =$ *“número de gatos machos en la camada”*,

a los eventos del espacio muestral S son:

$$X((m,m))=2,$$
$$X((m,h))=1,$$
$$X((h,m))=1,$$
$$X((h,h))=0.$$

La *figura 2* muestra la transformación del espacio muestral en el conjunto $R_X = \{\ 0,\ 1, 2\ \}$.

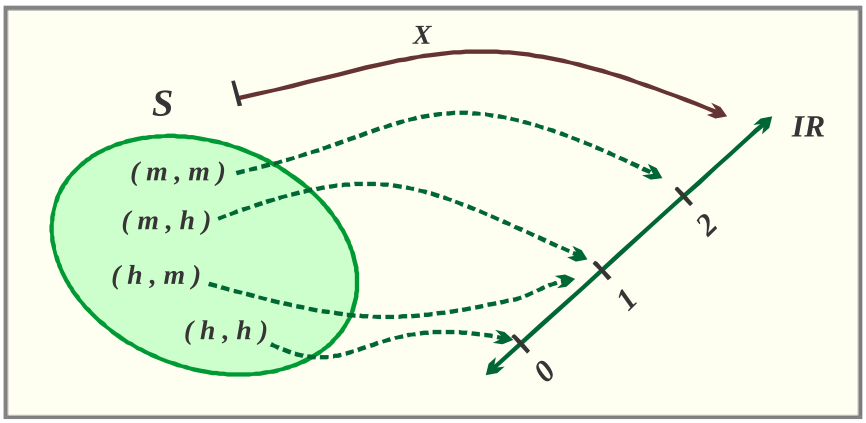


FIGURA 2

b. Se ha constituido un equipo de 3 alumnos en un grupo de la asignatura de Estadística con el fin de que desarrollen y presenten cierto tema. Los alumnos del equipo pueden ser regulares o irregulares.

i. Sean

$r =$ “el alumno es regular” e $i =$ “el alumno es irregular”,

entonces el espacio muestral es

$$S=\{\ (r,r,r),(r,r,i),(r,i,r),(i,r,r),(r,i,i),(i,r,i),(i,i,r),(i,i,i)\}.$$

ii. Las asignaciones de la variable aleatoria

$X =$ *“número de alumnos regulares en el equipo”*,

a los eventos del espacio muestral S son

$$X((r,r,r))=3 \quad X((r,i,i))=1$$
$$X((r,r,i))=2 \quad X((i,r,i))=1$$
$$X((r,i,r))=2 \quad X((i,i,r))=1$$
$$X((i,r,r))=2 \quad X((i,i,i))=0.$$

iii. Los números que asigna la variable aleatoria:

$Y =$ *“número de alumnos regulares menos número de alumnos irregulares en el equipo”*,

$$Y\left(\left(r,r,r\right)\right)=3-0=3\;Y\left(\left(r,r,i\right)\right)=2-1=1,$$
$$Y\left(\left(r,i,r\right)\right)=2-1=1\;Y\left(\left(i,r,r\right)\right)=2-1=1,$$
$$Y\left(\left(r,i,i\right)\right)=1-2=-1\;Y\left(\left(i,r,i\right)\right)=1-2=-1$$
$$Y\left(\left(i,i,r\right)\right)=1-2=-1\;Y\left(\left(i,i,i\right)\right)=0-3=-3.$$

c. El diagrama de la *figura 3* muestra un sistema de transportación de aceite, los puntos

$$V_1,\ V_2, V_3 \text{ y } V_4,$$

representan válvulas y pueden estar abiertas o cerradas. Se desea transportar el aceite desde el punto A hasta el punto B.

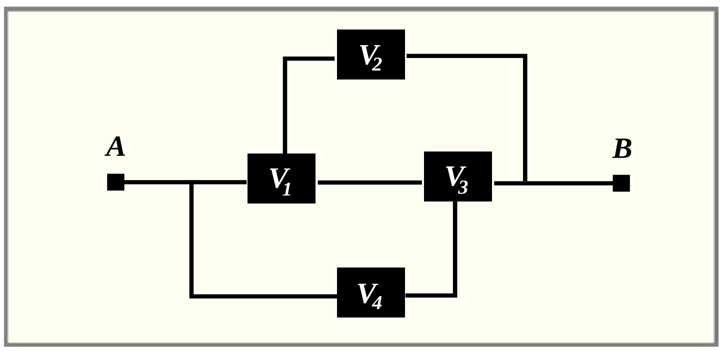


FIGURA 3

i. Sea la variable aleatoria

$X =$ *"número de trayectorias abiertas"*.

El aceite fluye del punto A al punto B si hay una o más trayectoria con sus dos válvulas abiertas, entonces

$$X = 1, 2, 3.$$

ii. Sea la variable aleatoria

Y =*"número válvulas abiertas"*.

El aceite fluye del punto A al punto B en el diagrama, si hay dos o más trayectoria con sus dos válvulas abiertas, por tanto,

$$Y = 2, 3, 4.$$

Una variable aleatoria es una función, entonces tiene tres componentes:

i. Un dominio, constituido por el espacio muestral del experimento aleatorio.

ii. La regla de correspondencia, en el contexto de la probabilidad llamada variable aleatoria, que es la regla que asigna los números reales a los eventos.

iii. El recorrido o rango, contiene los números reales que asignó la regla de correspondencia a los eventos.

EJEMPLO 2 (PARTES DE UNAVARIABLE ALEATORIA)

a. Un examen de opción múltiple consta de 4 preguntas, cada una de ellas tiene dos respuestas posibles una correcta y la otra incorrecta. Suponga que quién lo responderá seleccionará las respuestas aleatoriamente (al azar).

Sea la variable aleatoria

$$Y = \text{“}\textit{número de respuestas correctas seleccionadas}\text{”}.$$

i. Dominio, sean:

$$c = \text{“la respuesta seleccionada es correcta”}$$

y

$$i = \text{“la respuesta seleccionada es incorrecta”},$$

entonces el espacio muestral o dominio es el conjunto:

$$S = \left\{ \begin{array}{l} (c,c,c,c),(c,c,c,i),(c,c,i,c),(c,i,c,c),(i,c,c,c),(c,c,i,i),(c,i,c,i),(c,i,i,c), \\ (i,i,c,c),\ (i,c,i,c),\ (i,c,c,i),\ (c,i,i,i),\ (i,c,i,i),\ (i,i,c,i),\ (i,i,i,c),\ (i,i,i,i) \end{array} \right\}.$$

ii. La regla de correspondencia es la variable aleatoria

$$Y = \text{“}\textit{número de respuestas correctas seleccionadas}\text{”}.$$

iii. El recorrido o rango

$$R_X = \{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4\}.$$

b. Las caras de una moneda han sido marcadas como 1 y 2. Sea el experimento que consiste en lanzar la moneda dos veces y anotar los números de las caras que observados.

Sea la variable aleatoria

$$Y = \text{“Producto de los números que aparecen en las caras de las monedas”}.$$

i. Dominio

$$S = \{ (1,1),\ (1,2),\ (2,1),\ (2,2) \}.$$

ii. Regla de correspondencia

$$Y = \text{“producto de los números que aparecen en las caras de las monedas”}.$$

iii. Puesto que

$$Y(2,1) = (2)(1) = 2$$

$$Y(1,1) = (1)(1) = 1$$

$$Y(1,2) = (1)(2) = 2$$

$$Y(2,2) = (2)(2) = 4$$

el recorrido es el conjunto

$$R_Y = \{1,\ 2,\ 4\}.$$

c. Un experimento consiste en lanzar simultáneamente dos dados normales.

Sea la variable aleatoria

$$X = \text{“Diferencia de los números que aparecen en las caras que se observan”}.$$

i. El espacio muestral o dominio es el conjunto

$$S=\left\{\begin{array}{cccccc}(1,1) & (1,2) & (1,3) & (1,4) & (1,5) & (1,6)\\ (2,1) & (2,2) & (2,3) & (2,4) & (2,5) & (2,6)\\ (3,1) & (3,2) & (3,3) & (3,4) & (3,5) & (3,6)\\ (4,1) & (4,2) & (4,3) & (4,4) & (4,5) & (4,6)\\ (5,1) & (5,2) & (5,3) & (5,4) & (5,5) & (5,6)\\ (6,1) & (6,2) & (6,3) & (6,4) & (6,5) & (6,6)\end{array}\right\}.$$

ii. La regla de correspondencia es

$X=$ “Diferencia de los números que se observan en las caras”.

iii. Puesto que

$$\begin{array}{lll}
X(1,1)=1-1=0 & X(1,2)=1-2=-1 & X(1,3)=1-3=-2\\
X(2,1)=2-1=1 & X(2,2)=2-2=0 & X(2,3)=2-3=-1\\
X(3,1)=3-1=2 & X(3,2)=3-2=1 & X(3,3)=3-3=0\\
X(4,1)=4-1=3 & X(4,2)=4-2=2 & X(4,3)=4-3=1\\
X(5,1)=5-1=4 & X(5,2)=5-2=3 & X(5,3)=5-3=2\\
X(6,1)=6-1=5 & X(6,2)=6-2=4 & X(6,3)=6-3=3\\
X(1,4)=1-4=-3 & X(1,5)=1-5=-4 & X(1,6)=1-6=-5\\
X(2,4)=2-4=-2 & X(2,5)=2-5=-3 & X(2,6)=2-6=-4\\
X(3,4)=3-4=-1 & X(3,5)=3-5=-2 & X(3,6)=3-6=-3\\
X(4,4)=4-4=0 & X(4,5)=4-5=-1 & X(4,6)=4-6=-2\\
X(5,4)=5-4=1 & X(5,5)=5-5=0 & X(5,6)=5-6=-1\\
X(6,4)=6-4=2 & X(6,5)=6-5=1 & X(6,6)=6-6=0
\end{array}$$

El recorrido (o rango) de la variable aleatoria X es el conjunto

$$R_X=\{\,-5,\ -4,\ -3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\,\}.$$

Formalicemos los conceptos anteriormente tratados.

DEFINICIÓN 1 (VARIABLE ALEATORIA DISCRETA)
Sea un experimento aleatorio con espacio muestral S, entonces
La función X con dominio en el espacio muestral y recorrido (o rango) $R_X=\{\,x_1,\ x_2,\ x_3,\ \cdots,\ x_n\,\}$ finito (o infinito numerable) se denomina

VARIABLE ALEATORIA DISCRETA.

1. Utilizaremos las siglas “ VAD ” para indicar que una variable aleatoria es discreta y las siglas “VAC” para indicar que es continua.
2. Es común representar las variables aleatorias por las últimas letras (mayúsculas) del alfabeto español tales como $X,\ Y,\ Z,\ W$; y los números que asume por letras minúsculas, adoptaremos esta convención en la presente obra.

La simbología:

i. $X = x_1,\ x_2$ indica que la $VAD\ X$ asume los valores (números) x_1 y x_2.

ii. $Z = z_1,\ z_2,\ z_{10}$ indica que la $VAD\ Z$ asume los valores z_1, z_2 y z_{10}.

iii. $X(\ A\ ) = x$ significa que la variable aleatoria X asocia al evento A el número real x.

Una variable aleatoria es una función bien definida (determinista) que no presenta aleatoriedad alguna, recibe este nombre considerando que los posibles resultados del experimento aleatorio son los diferentes números reales x que la función X puede asumir. Por tanto, una variable aleatoria es una medición que se hace de cada uno de los resultados del experimento aleatorio que tiene como respuesta número real. Así, cada evento ω tiene asociado un único número x. En la *definición 1* formalizamos el concepto de variable aleatoria discreta, sin embargo, también existen variables aleatorias que no son discretas. Llamaremos a la variable aleatoria X continua cuando su recorrido sean todos los números reales de un intervalo $I \subseteq IR$. La clasificación de las variables aleatorias en discretas y continuas no es completa puesto que existen variables aleatorias que no son de estos tipos.

DEFINICIÓN 2 (VARIABLE ALEATORIA CONTINUA)
Sea un experimento aleatorio con espacio muestral S,
si la función X tiene como dominio el espacio muestral S, y recorrido (o rango) el intervalo de números reales

$$I \subseteq IR$$

se denomina variable aleatoria continua.

Una de las características que distinguen a las variables aleatorias continuas de las variables aleatorias discretas, es que las primeras asignan probabilidad cero a un valor específico x_0 del recorrido de la variable, es decir,
si X es una variable aleatoria continua, entonces

$$p(\ X = x_0\ ) = 0$$

(no necesariamente es cierto si la variable aleatoria es discreta).

EJEMPLO 3 (VARIABLE ALEATORIA CONTINUA)
Son variables aleatorias continuas

a. El tiempo de vida de un objeto.
b. La longitud de objeto.
c. El área de una superficie.
d. El volumen de un objeto.

¿CUÁL ES LA RELACIÓN ENTRE UNA VARIABLE ALEATORIA Y LA PROBABILIDAD? ¿QUÉ ELEMENTOS TIENE ASOCIADOS?

La forma de asignar probabilidades al recorrido de una variable aleatoria (es posible debido a la equivalencia entre los números de su recorrido y los eventos de su dominio) se realiza con"la función de probabilidad", vea la *figura 4*., si la variable aleatoria es discreta; y con la función de densidad si es continua, en el contexto que corresponda nos referiremos a ambas funciones por sus iniciales, es decir, por fdp.

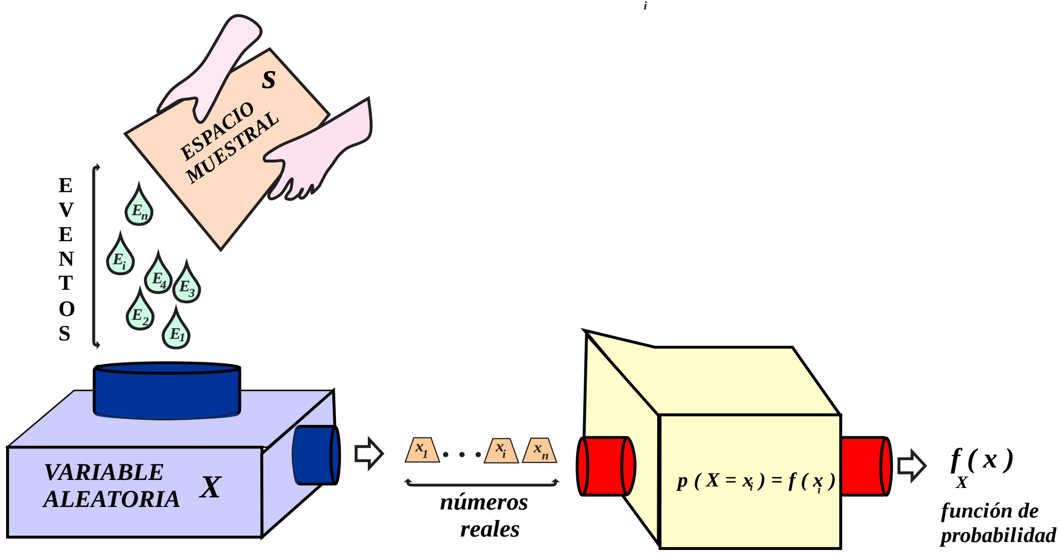


FIGURA 4

DEFINICIÓN 3 (PROBABILIDAD DE UN NÚMERO DEL RECORRIDO DE UNA VARIABLE ALEATORIA)
La probabilidad de que la variable aleatoria X asuma el número x, la representaremos por $p(X = x)$ y su valor está dado por la suma de las probabilidades de todos los eventos simples del espacio muestral S a los que se asigna el número x.

EJEMPLO 4 (PROBABILIDAD DE UNA VARIABLE ALEATORIA DISCRETA)
Las caras de una moneda han sido marcadas con los números 1 y 2. Sea el experimento que consiste en lanzarla dos veces y anotar los números de las caras que se observan una vez que ha caído.
Sea la variable aleatoria $Y =$"producto de los números que se observan en la cara de las moneda".
i. Espacio muestral

$$S = \{ (1,1), (1,2), (2,1), (2,2) \}.$$

ii. Puesto que

$$Y(1,1) = (1)(1) = 1,\; Y(1,2) = (1)(2) = 2 \text{ y } Y(2,1) = (2)(1) = 2,\; Y(2,2) = (2)(2) = 4,$$

el recorrido es el conjunto

$$R_Y = \{\ 1,\ 2,\ 4\ \}.$$

iii. Dado que el espacio muestral tiene cuatro eventos simples, entonces

$$p(Y=1)=\frac{1}{4}\ ,\ p(Y=2)=\frac{2}{4}\ \text{y}\ p(Y=4)=\frac{1}{4}.$$

La información sobre las probabilidades puede sistematizarse en la tabla (distribución)

y	1	2	4
$p(Y=y)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{1}{4}$

o representarse en forma de función

$$p(Y=y)=\begin{cases} \frac{1}{4} & \text{si} \quad y=1 \\ \frac{2}{4} & \text{si} \quad y=2 \\ \frac{1}{4} & \text{si} \quad y=4 \\ 0 & \quad \textit{otro caso} \end{cases}.$$

b. Un futbolista ejecutará tres penales, la probabilidad de que anote uno de ellos es 0.5 y el anotar o fallar el posterior no depende de los que ha ejecutado.

i. Si $a =$"el futbolista anota el penal" y $f =$"el futbolista falla el penal",

entonces

$$S=\{\ (f,f,f),(f,f,a),(f,a,f),(a,f,f),(f,a,a),(a,f,a),(a,a,f),(a,a,a)\}$$

ii. Las asignaciones de la variable aleatoria

$X =$ *"número de penales que el futbolista anota"*,

a los eventos del espacio muestral S son

$$X((f,f,f))=0,\ X((f,f,a))=1,$$
$$X((f,a,f))=1,\ X((a,f,f))=1,$$
$$X((f,a,a))=2,\ X((a,f,a))=2,$$
$$X((a,a,f))=2,\ X((a,a,a))=3.$$

iii. Observe que el espacio muestral tiene cardinal ocho, entonces

$$p(X=0)=\frac{1}{8},\ p(X=1)=\frac{3}{8}\ ,\ p(X=2)=\frac{3}{8}\text{y}\ p(X=4)=\frac{1}{8}.$$

La información sobre las probabilidades puede sistematizarse en la tabla (distribución)

x	0	1	2	4
$p(X=x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

o en la forma (como función)

$$p(X=x)=\begin{cases} \frac{1}{8} & \text{si} \quad x=0 \\ \frac{3}{8} & \text{si} \quad x=1 \\ \frac{3}{8} & \text{si} \quad x=2 \\ \frac{1}{8} & \text{si} \quad x=3 \\ 0 & \quad \textit{otro caso} \end{cases}$$

.

c. El 40% de las veces que las personas que comen tacos en el puesto de la esquina se enferman de la panza. Una persona asiste a comer tacos a ese puesto un máximo de cuatro veces.

Sea la variable aleatoria

$Y =$“número de visita en que la persona enferma de la panza o deja de asistir al puesto”.

i. Si:

B_m significa que no se enfermó en la visita número m

y

E_k indica que se enfermó hasta la visita número B_k,

entonces

$$S = \{ E_1, \ B_1E_2 , \ B_1B_2E_3, \ B_1B_2B_3E_4 \ \text{o} \ B_1B_2B_3B_4 \}.$$

La variable aleatoria

$Y =$“número de visita en que la persona enferma de la panza o deja de asistir al puesto”,

tiene recorrido (rango)

$$R_Y = \{ 1, \ 2, \ 3, \ 4 \}.$$

Por otra parte,

$$p (Y = 1) = 0.400$$
$$p (Y = 2) = (0.6)(0.4) = 0.240$$
$$p (Y = 3) = (0.6)(0.6)(0.4) = 0.144$$
$$p (Y = 4) = (0.6)(0.6)(0.6)(0.4) + (0.6)(0.6)(0.6)(0.6) = 0.216 .$$

La información sobre las probabilidades puede sistematizarse en la tabla (distribución)

y	1	2	3	4
$p (Y = y)$	0.400	0.240	0.144	0.216

o en la forma (como función)

$$p (Y = y) = \begin{cases} 0.400 & \text{si} \quad y = 1 \\ 0.240 & \text{si} \quad y = 2 \\ 0{,}144 & \text{si} \quad y = 3 \\ 0.216 & \text{si} \quad y = 4 \\ 0 & \quad otro\ caso \end{cases} .$$

Considerando que las “herramientas” utilizadas en la caracterización de las variables aleatorias discretas son notoriamente distintas a las utilizadas en el caso continuo, trataremos el estudio de ambos casos separadamente.

CASO DISCRETO

Los fundamentos teóricos de los ejemplos antes tratados se basan en las *definiciones 4 y 5*.

DEFINICIÓN 4 (FUNCIÓN DE PROBABILIDAD DE UNA VARIABLE ALEATORIA DISCRETA)

Sea X la variable aleatoria con recorrido $R_X = \{ x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n \}$. La función de probabilidad (fdp) asociada a X , que representaremos por f_X es

$$f_X(x) = \begin{cases} p(X = x) & si \quad x = x_0, x_1, x_2, x_3, \cdots \\ 0 & otro\, caso \end{cases}$$

Los símbolos $f_X(x)$ se interpretan: la variable aleatoria discreta X asume el número (valor) x con probabilidad $f_X(x)$. La función de probabilidad proporciona la probabilidad de los distintos números (valores) que asume la variable aleatoria. La función $f_X(x)$ también se representa como una tabla, en este caso se conoce como distribución de probabilidad

x	x_0	x_1	x_2	$\ldots$
$f_X(x)$	p_0	p_1	p_2	$\ldots$

En una "VAD" los términos "función de probabilidad" y "distribución de probabilidad" son equivalentes.

El lector debe tener en cuenta que los símbolos X y x, representan cosas distintas: X representa una función y x un número real de su dominio. En general, representaremos una función de probabilidad con la letra f minúscula.

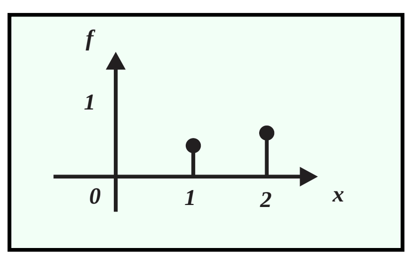
EJEMPLO 5 (FORMA DE FUNCIÓN Y FORMA TABULAR DE UNA VARIABLE ALEATORIA DISCRETA)

a. La VAD X tiene como fdp asociada

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{2}{5} & si \quad x = 1 \\ \frac{3}{5} & si \quad x = 2 \\ 0 & otro\, caso \end{cases},$$

su forma tabular y su forma gráfica son

x	1	2
$f_X(x)$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$

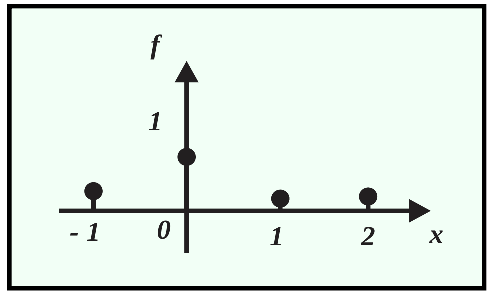


b. La VAD X con distribución de probabilidad

x	-1	0	1	2
$f_X(x)$	0.2	0,6	0.1	0.1

rescrita en forma de función y representada gráficamente son

$$f_X(x)=\begin{cases} 0.2 & x=-1 \\ 0.6 & x=0 \\ 0.1 & x=1,\ 2 \\ 0 & otro\ caso \end{cases}$$



respectivamente

La función de probabilidad $f_X(x)$ satisface las propiedades (las hereda de los axiomas de Kolmogorov).

PROPOSICIÓN 1 (CARACTERÍSTICAS DE LA FUNCIÓN DE PROBABILIDAD DE UNA VAD)
Sea X la variable aleatoria con recorrido

$$R_X=\{ x_1,\ x_2,\ x_3,\ \cdots,\ x_n \}.$$

Si $f_X(x)$ es la función de probabilidad asociada a la VAD X, entonces

a. $f_X(x)\geq 0$, para todo número real x.

b. $\sum_x f_X(x)=1$.

En la *proposición 1*, la *propiedad* a. se denomina "de no negatividad" y *la propiedad* b. indica que la suma de "todas" las probabilidades es uno.

EJEMPLO 6 (NORMALIZACIÓN DE UNA FUNCIÓN)
Para determinar el valor de K de manera que la función

$$f_X(x)=\begin{cases} 0.2K & \text{si} & x=0 \\ K & \text{si} & x=2 \\ 0.4 & \text{si} & x=3 \\ 0 & & otro\ caso \end{cases},$$

sea función de probabilidad, es necesario resolver la ecuación

$$0.2K+K+0.4=1, \text{ que implica } 1.2K=0.6,$$

o bien

$$K=0.5.$$

Si sustituimos $K = 0.5$ en la función anterior obtenemos

$$f_X(x) = \begin{cases} 0.1 & \text{si} \quad x = 0 \\ 0.5 & \text{si} \quad x = 2 \\ 0.4 & \text{si} \quad x = 3 \\ 0 & \quad otro\ caso \end{cases}.$$

Sus formas tabular y gráfica son

x	0	2	3
$f_X(x)$	0.1	0.5	0.4

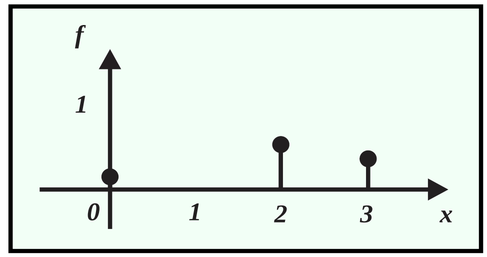


FIGURA 5

respectivamente

En los estudios de los experimentos aleatorios y en la evaluación de probabilidades presenta gran utilidad la función de distribución (o función de probabilidad acumulada) a la que nos referiremos por sus iniciales como FPA.

DEFINICIÓN 5 (FUNCIÓN DE DISTRIBUCIÓN O FUNCIÓN DE PROBABILIDAD ACUMULADA)
Sea la variable aleatoria X.
La función de distribución asociada a la VAD X se define por la función

$$F(x) = p(X \leq x).$$

La expresión

$$F(x) = p(X \leq x)$$

es la función de distribución evaluada en un numero x cualquiera y proporciona la probabilidad de que la variable aleatoria asuma un número (valor) menor o igual al número x. Así, $F(x)$ representa una probabilidad, por tanto, está comprendida entre cero y uno. Si $f_X(x)$ es la función de probabilidad de la variable aleatoria X, entonces

$$F(x) = p(X \leq x_i) = \sum_{x \leq x_i} f(x).$$

Los símbolos $\leq$, $\geq$, $>$ y $<$ aparecen a menudo en la notación empleada en el cálculo de probabilidades, el *ejemplo 7* ayuda a comprender su significado.

EJEMPLO 7 (SIGNIFICADO DE LOS SÍMBOLOS $\leq, \geq, >$ y $<$, CASO DISCRETO)

Suponga la VAD X tiene recorrido $R_X = \{ -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5 \}$.

i. $X \leq 2$ significa $X = -2, -1, 0, 1, 2$.

ii. $X \leq -1$ implica $X = -2, -1$.

iii. $X < 2$ quiere decir $X = -2, -1, 0, 1$.

iv. $X < -1$ equivale a $X = -2$.

v. $0 \leq X \leq 3$ indica $X = 0, 1, 2, 3$.

vi. $-1 \leq X \leq 4$ representa $X = -1, 0, 1, 2, 3, 4$.

vii. $0 \leq X < 4$ implica $X = 0, 1, 2, 3$.

viii. $-1 < X \leq 4$ significa $X = 0, 1, 2, 3, 4$.

ix. $-1 < X < 3$ equivale a $X = 0, 1, 2$.

x. $-1 < X < 5$ significa $X = 0, 1, 2, 3, 4$.

Aclaremos lo anterior con el *ejemplo 8*.

EJEMPLO 8 (OBTENCIÓN DE LA FPA A PARTIR DE LA fdp)

Para facilitar el proceso de construcción de la FPA asociada a la fdp

$$f_X(x) = \begin{cases} 0.2 & \text{si} \quad x = -2 \\ 0.5 & \text{si} \quad x = 2 \\ 0.3 & \text{si} \quad x = 3 \\ 0 & \quad otro\ caso \end{cases},$$

su distribución de probabilidad es

x	-2	2	3
$f_X(x)$	0.2	0.5	0.3

En la tabla anterior:

i. Antes de $x = -2$ no hay probabilidad acumulada,

$$F(x) = 0, \text{ si } x < -2.$$

ii. Antes de $x = 2$ la probabilidad acumulada es $F(x) = 0.2$, por tanto,

$$F(x) = 0.2, \text{ para } -2 \leq x < 2.$$

iii. Antes de $x = 3$ la probabilidad acumulada es $F(x) = 0.7$, por tanto,

$$F(x) = 0.7, \text{ cuando } 2 \leq x < 3.$$

iv. A partir de $x = 3$ la probabilidad acumulada es $F(x) = 1$, por tanto,

$$F(x) = 1, \text{ si } x \geq 3.$$

La FPA y su representación gráfica son

$$F(x)=\begin{cases} 0 & \text{si } x<-2 \\ 0.2 & \text{si } -2\le x<2 \\ 0.7 & \text{si } 2\le x<3 \\ 1 & \text{si } x>3 \end{cases}$$

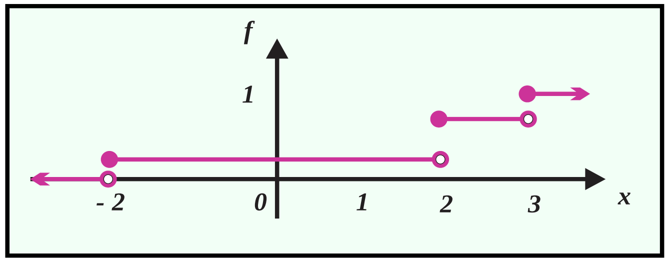


FIGURA 6

respectivamente.

EJEMPLO 9 (OBTENCIÓN DE LA FPA A PARTIR DE LA fdp BIS)

En ocasiones, la forma tabular de la fdp facilita la construcción de la FPA.

La VAD X tiene asociada la distribución de probabilidad:

x	-2	1	2
$f_X(x)$	0.2	0.4	0.4
$F(x)$			

i. En la construcción de la FPA que tiene asociada, agreguemos una tercera fila con primera entrada ("cuadrito") $F(x)$.

x	-2	1	2
$f_X(x)$	0.2	0.4	0.4
$F(x)$			

ii. En la segunda entrada repetimos la probabilidad del primer valor que asociado a la VAD:

x	-2	1	2
$f_X(x)$	0.2	0.4	0.4
$F(x)$	0.2		

iii. En las entradas restantes sumamos probabilidades consecutivas:

x	-2	1	2
$f_X(x)$	0.2	0.4	0.4
$F(x)$	0.2	$0.2+0.4$	$0.2+0.4+0.4$

iv. Por tanto,

$$F(x)=\begin{cases} 0 & \text{si } x<-2 \\ 0.2 & \text{si } -2\le x<1 \\ 0.6 & \text{si } 1\le x<2 \\ 1 & \text{si } x>2 \end{cases}$$

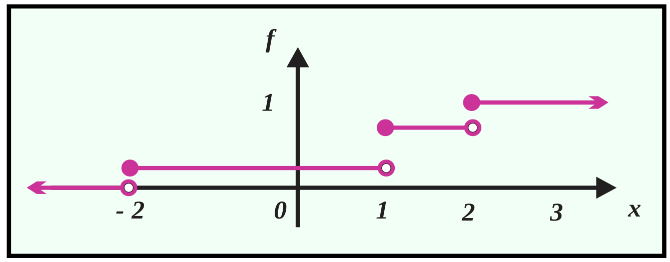


FIGURA 7

Si conocemos la FPA para determinar el recorrido y la regla de correspondencia de la fdp, utilizamos un proceso similar al del *ejemplo 10*.

EJEMPLO 10 (OBTENCIÓN DE LA fdp A PARTIR DE LA FPA)

La VAD X tiene por FPA a

$$F(x)=\begin{cases} 0 & \text{si } x<-4 \\ 0.3 & \text{si } -4\le x<0 \\ 0.5 & \text{si } 0\le x<2 \\ 0.8 & \text{si } 2\le x<4 \\ 1 & \text{si } x\ge 4 \end{cases},$$

entonces el recorrido de a VAD X es el conjunto $R_X=\{-4,\ 0,\ 2,\ 4\}$, restando probabilidades acumuladas consecutivas

x	-4	0	2	4
$f_X(x)$	0.3	$0.5-0.3$	$0.8-0.5$	$1-0.8$
$F(x)$	0.3	0.5	0.8	1

o bien

x	-4	0	2	4
$f_X(x)$	0.3	0.2	0.3	0.2

por tanto,

$$f_X(x)=\begin{cases} 0.3 & \text{si} & x=-4 \\ 0.2 & \text{si} & x=0 \\ 0.3 & \text{si} & x=2 \\ 0.2 & \text{si} & x=4 \\ 0 & & \text{otro caso} \end{cases}.$$

El conocimiento de la FPA simplifica el cálculo de probabilidades puesto que la misma FPA representa una probabilidad, por ejemplo, para los números (valores) x_i y x_j del recorrido (o rango) de la variable aleatoria se cumples las propiedades de la *proposición 2*.

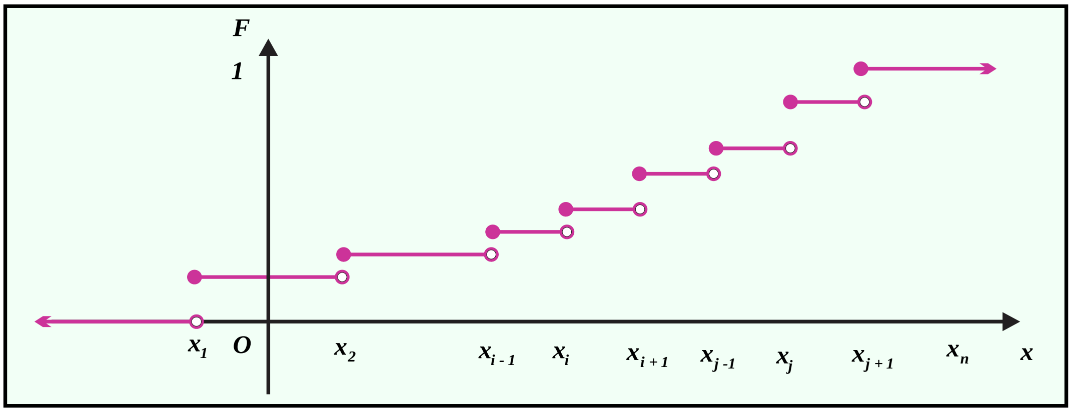


FIGURA 8

PROPOSICIÓN 2 (PROPIEDADES DE LA FUNCIÓN DE PROBABILIDAD ACUMULADA ASOCIADA A LA VAD X)

Sea X una variable aleatoria discreta cuyo recorrido incluye los números x_i y x_j $(x_i < x_j)$ y función de probabilidad f_X , entonces

a. $p\left(X \le x_i \right) = F\left(x_i \right)$.

b. $p\left(X < x_i \right) = F\left(x_i - 1 \right)$.

c. $p\left(X \ge x_i \right) = 1 - F\left(x_i - 1 \right)$.

d. $p\left(X > x_i \right) = 1 - F\left(x_i \right)$.

e. $p\left(x_i \le X \le x_j \right) = F\left(x_j \right) - F\left(x_i - 1 \right)$.

Para utilizar correctamente la *proposición* 2 en el cálculo de probabilidades debemos verificar que los números

$$x_i \text{ y } x_j$$

pertenecen al recorrido de la variable aleatoria.

EJEMPLO 11 (CÁLCULO DE PROBABILIDADES UTILIZANDO LA FPA)

Sea la VAD X con función de probabilidades

$$F\left(x \right) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < -1 \\ 0.5 & \text{si} \quad -1 \le x < 1 \\ 0.8 & \text{si} \quad 1 \le x < 3 \\ 1 & \text{si} \quad x \ge 3 \end{cases},$$

entonces

$$R_X = \left\{ -1,\ 1,\ 3 \right\}$$

y el gráfico correspondiente lo muestra la *figura 9*.

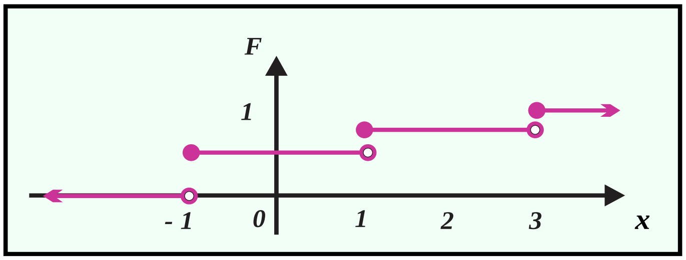


FIGURA 9

i. $p(X \le 1) = F(1) = 0.8$.
ii. $p(X < 3) = F(1) = 0.8$, revisa el *inciso b.*de la *proposición 2.*
iii. $p(X < 4) = F(3) = 1$, revisa el *inciso b.*de la *proposición 2.*
iv. $p(X \le -1) = F(-1) = 0.5$, vea el *inciso a.* de *la proposición 2.*
v. $p(X \le -2) = F(-2) = 0$, vea el *inciso a.de la proposición 2.a*.
vi. $p(X > 1) = 1 - F(1) = 1 - 0.8 = 0.2$, vea los *incisos d.* y *a.* de la *proposición2.*
vii. $p(X \ge 1) = 1 - p(X < 1) = 1 - 0.5 = 0.5$, revisa los *incisos c.* y *b. de la proposición2.*
viii. $p(1 \le X \le 3) = F(3) - F(-1) = 1 - 0.5 = 0.5$, vea los *incisos e. y a. de la proposición 2.*

Si x_i no pertenece al recorrido R_X de la VAD, se utiliza la *proposición 2.b.*, revisa la *figura 10*.

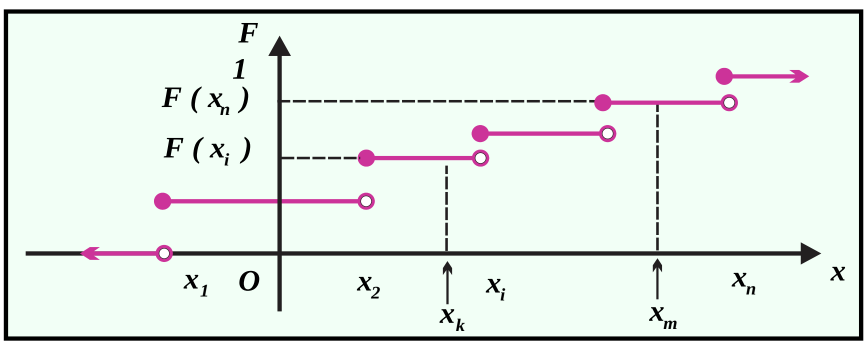


FIGURA 10

PROPOSICIÓN 2.b. (PROPIEDADES DE LA FUNCIÓN DE PROBABILIDAD ACUMULADA (FPA) DE LA VAD X)

Sea X la variable aleatoria discreta cuyo recorrido no incluye los números x_k y x_m $(x_k < x_m)$ y función de probabilidad f_X, entonces

a. $p(X < x_m) = p(X \le x_m) = F(x_m)$.
b. $p(X > x_m) = p(X \ge x_m) = 1 - F(x_m)$.
c. $p(x_k \le X \le x_m) = F(x_m) - F(x_k)$.

El *ejemplo 12.*muestra la aplicación de la *proposición 2.b*.

EJEMPLO 12 (CÁLCULO DE PROBABILIDADES UTILIZANDO LA FPA)
Sea la VAD X con función de probabilidades

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{sí } x < -4 \\ 0.3 & \text{sí } -4 \le x < 0 \\ 0.5 & \text{sí } 0 \le x < 2 \\ 0.8 & \text{sí } 2 \le x < 4 \\ 1 & \text{sí } x \ge 4 \end{cases},$$

Su recorrido es $R_X = \{-4,\ 0,\ 2,\ 4\}$ y el gráfico correspondiente lo muestra la *figura 11*.

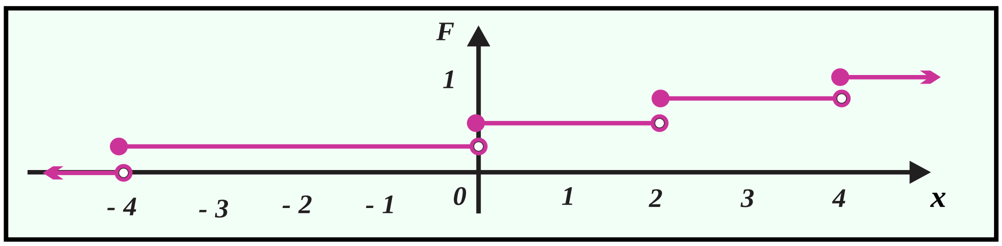


FIGURA 11

i. $p(X \le -2) = F(-2) = 0.3$, *proposición 2. b. inciso a.*
ii. $p(X < 3) = F(2) = 0.8$, *proposición 2.b. inciso a.*
iii. $p(X < 5) = F(5) = 1$, *proposición 2.b. inciso a.*
iv. $p(X \le -1) = F(-1) = 0.3$, *proposición 2.b.inciso a.*
v. $p(X > 1) = 1 - F(1) = 1 - 0.8 = 0.2$, *proposición 2.b. inciso b.*
viii. $p(1 \le X \le 3) = F(3) - F(-1) = 0.8 - 0.5 = 0.3$, *proposición 2.b. inciso c.*

En los cursos elementales de estadística se calcula la media aritmética (que se representa con el símbolo $\bar{x}$ y es un número alrededor del cual se agrupan o distribuyen los números del conjunto) de un grupo de datos (muestra) sumándolos y dividiendo el total por el número de datos, es decir (en notación sigma), para el conjunto de datos

$$\{x_1,\ x_2,\ x_3,\ \cdots,\ x_n\},$$

la media aritmética es el número

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i \cdot x_i}{\sum_{i=1}^{n} f_i} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f_1 \cdot x_1 = \frac{f_1 \cdot x_1 + f_2 \cdot x_2 + f_3 \cdot x_3 + \cdots + f_n \cdot x_n}{n},$$

los números f_i representan las frecuencias de los datos (número de veces que se repite el dato x_i).

Supongamos que

$$R_X = \{ x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n \}$$

es el recorrido de la VAD X con frecuencias

$$f_1, f_2, f_3, \cdots, f_n,$$

respectivamente, entonces

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f_i \cdot x_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{f_i}{n} \cdot x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \frac{f_i}{n} \cdot = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot p (X = x_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot f_X (x_i),$$

es decir,

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot f_X (x_i)$$

representa la media aritmética o “promedio” de la VAD X.
Si suponemos

$$\bar{x} = E[X],$$

podemos rescribir

$$E[X] = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot f_X (x_i).$$

En el contexto de las variables aleatorias discretas el número

$$E[X] = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot f_X (x_i)$$

se llama ESPERANZA, VALOR ESPERADO o simplemente MEDIA de la variable aleatoria X.

DEFINICIÓN 6 (ESPERANZA MATEMÁTICA, VALOR ESPERADO o MEDIA DE LA VAD X)
Sea X la VAD con recorrido

$$R_X = \{ x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n \}$$

numerable y fdp asociada $f_X (x)$, entonces el número

$$E[X] = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot f_X (x_i)$$

es la esperanza matemática, valor esperado o simplemente media de la VAD X)

El valor esperado de la VAD X es uno de sus parámetros y representa el “promedio” o número que se espera obtener al repetir el experimento aleatorio, en forma independiente, un número “muy grande” de veces, en consecuencia, el valor esperado es un número que se encuentra en el intervalo

$$[x_1 , x_n]$$

y no necesariamente coincide con uno de los elementos del recorrido de la VAD.

EJEMPLO 13 (CÁLCULO DEL VALOR ESPERADO)

a. Sea la $VAD\ X$ con distribución de probabilidad

x	0	1	2	6
$f_X(x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$

su valor esperado es

$$E[X] = 0\cdot\frac{1}{4} + 1\cdot\frac{3}{8} + 2\cdot\frac{1}{4} + 6\cdot\frac{1}{8} = \frac{13}{8}.$$

b. Si la $VAD\ Y$ tiene distribución de probabilidad,

y	-2	0	3	4	5
$f_Y(y)$	0.1	0.4	0.2	0.1	0.2

Su valor esperado es

$$E[X] = (-2)(0.1) + (0)(0.4) + (3)(0.2) + (4)(0.1) + (5)(0.2) = 1.8.$$

La descripción de la $VAD\ X$ se complementa con el estudio del parámetro que manifiesta su nivel de variabilidad en relación con su valor esperado. Si la $VAD\ X$ tiene recorrido

$$R_X = \{ x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n \}$$

y valor esperado $E[X]$, entonces las diferencias

$$x_i - E[X]$$

representan las dispersiones de los números x_i respecto al valor esperado

$$E[X],$$

sin embargo, son de mayor utilidad las “dispersiones cuadráticas”, es decir los números,

$$(x_i - E[X])^2 \cdot f_X(x_i),$$

vea la *figura 12*.

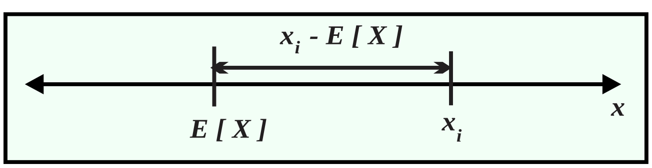


FIGURA 12

El valor esperado de las “dispersiones cuadráticas” proporciona una “buena” medida de la dispersión asociada a la VAD que tiene asociada.

DEFINICIÓN 7 (VARIANZA O VARIANCIA DE LA $VAD\ X$)
Sea X la VAD con recorrido $R_X = \{x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n\}$ numerable y fdp asociada $f_X(x)$,
entonces el número

$$V[X] = E\left[(x_i - E[X])^2 \cdot f_X(x_i)\right] = \sum_{i=1}^{n}(x_i - E[X])^2 \cdot f_X(x_i)$$

se conoce como varianza (o variancia) de X.

Para homogeneizar las unidades de la $VAD\ X$ con las de su varianza es necesario introducir como medida de su variabilidad la desviación estándar.

DEFINICIÓN 8 (DESVIACIÓN ESTÁNDAR DE LA $VAD\ X$)
Sea X la VAD con varianza $V[X]$, entonces el número positivo $\sqrt{V[X]}$ se llama desviación estándar.

Observa que cuando la $VAD\ X$ asume valores "lejanos" a su valor esperado $E[X]$ el término $(X - E[X])^2$ es grande y que, si asume valores "cercanos" al número $E[X]$ el término $(X - E[X])^2$ es pequeño. Por lo antes señalado, la varianza se utiliza para comparar distribuciones de probabilidad semejantes.

EJEMPLO 14 (CÁLCULO DELA VARIANZA Y DE LA DESVIACIÓN ESTÁNDAR)
a. La $VAD\ X$ tiene distribución de probabilidades

x	0	1	2
$f_X(x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

En el cálculo de la varianza es necesario conocer el valor esperado,

$$E[X] = 0\left(\frac{1}{4}\right) + 1\left(\frac{2}{4}\right) + 2\left(\frac{1}{4}\right) = 1,$$

por tanto, la varianza es

$$V[X] = (0-1)^2\frac{1}{4} + (1-1)^2\frac{2}{4} + (2-1)^2\frac{1}{4} = \frac{1}{4} + 0 + \frac{1}{4} = \frac{1}{2},$$

y la desviación estándar

$$\sqrt{V[X]} = +\sqrt{\frac{1}{2}} \approx +0.7071\,.$$

En juegos gobernados por el azar el valor esperado se utiliza para estimar si, a la larga, es conveniente o no participar en el juego, así un juego de azar se denomina "justo" cuando

$$E[X]=0.$$

El cliente gana si

$$E[X]>0$$

y la casa gana cuando

$$E[X]<0.$$

EJEMPLO 15 (APLICACIÓN DEL VALOR ESPERADO Y DE LA VARIANZA)

Un juego consiste en lanzar dos monedas regulares. Se ganan $\$2000$ cuando después de caerse observan dos soles en las caras; se ganan $\$1000$ si se observa un solo sol y se pierden $\$3000$ cuando no se observan soles.

a. Para determinar si conviene jugar (ganar) es necesario calcular el valor esperado de la variable aleatoria

$$X = \text{“ganancia”}$$

y observar que ésta es un número positivo.

La distribución de probabilidades de la variable aleatoria $X =$ "ganancia" es

X	-3000	1000	2000
$f_X(x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{1}{4}$

Entonces

$$E[x]=-3000\left(\frac{1}{4}\right)+1000\left(\frac{2}{4}\right)+2000\left(\frac{1}{4}\right)=250,$$

quien juegue un número "muy grande de veces", en promedio, ganará $\$250$, luego conviene jugar.

b. Por otra parte

$$V[X]=(-3000-250)^2\left(\frac{1}{4}\right)+(1000-250)^2\left(\frac{2}{4}\right)+(2000-250)^2\left(\frac{1}{4}\right)=3\ 687\ 500$$

y

$$\sqrt{V[X]}=\sqrt{3\ 687\ 500}\approx 1920.286.$$

Las propiedades de los parámetros (el *valor esperado* y la *varianza)* son imprescindibles en la justificación de las propiedades de los métodos de la inferencia estadística (que estudiaremos posteriormente), por lo que no podemos prescindir de establecer sus propiedades básicas.

PROPOSICIÓN 3 (PROPIEDADES DEL VALOR ESPERADO)
Si X, Y son variables aleatorias discretas, independientes con la misma función de probabilidad y c cualquier número real, entonces:
a. $E[c]=c$.
b. $E[cX]=cE[X]$.
c. $E[X\pm Y]=E[X]\pm E[Y]$.

Así mismo, la varianza satisface las propiedades de la *proposición 4.*

PROPOSICIÓN 4 (PROPIEDADES DE LA VARIANZA)
Si X, Y son variables aleatorias con la misma función de probabilidad y c es un número real, entonces:
a. $V[c]=0$.
b. $V[cX]=c^2V[X]$.
c. $V[X\pm Y]=V[X]+V[Y]$, siempre que X, Y sean independientes.
d. $V[X]=E\left[X^2\right]-E^2[X]$, "forma reducida de la varianza".

EJEMPLO 16 (APLICACIÓN DE LAS PROPIEDADES DEL VALOR ESPERADO Y DE LA VARIANZA)
Si X, Y son variables aleatorias discretas, independientes con la misma función de probabilidad y
$$E[X]=4,\ E[Y]=-1 \text{ y } V[X]=2,\ V[Y]=1,$$
entonces
a. $E[4X-6Y+5]=E[4X]-E[6Y]+E[5]$ proposición 1.3, inciso c.
$=4E[X]-6E[Y]+E[5]$, proposición 1.3, inciso b.
$=4E[X]-6E[Y]+5$, proposición 1.3, inciso a.
$=4(4)-6(-1)+5=27$.
b. $V[4X-6Y+5]=V[4X]+V[6Y]+V[5]$, proposición 1.4, inciso c.
$=16V[X]+36V[Y]+V[5]$, proposición 1.4, inciso b.
$=16V[X]+36V[Y]+0$, proposición 1.4, inciso a.
$=16(2)+36(1)=68$.

CASO CONTINUO

Hasta el momento solo hemos tratado variables aleatorias con recorrido (o rango)compuesto por un número finito de números, sin embargo, también existen variables, generalmente asociadas a cantidades medibles tales como: tiempos, longitudes, áreas, volúmenes, pesos, entre otras, en las que no es posible contar los valores que asumen. Derivado de la influencia del azar y con la certeza de que la "medición exacta" de características numéricas (como las antes mencionadas) de los objetos es imposible, al medir una característica del objeto, formalmente se le debe asignar un número indicando el nivel de incertidumbre o precisión, lo que, entre otros elementos, justifica la existencia y estudio de las variables aleatorias continuas.

Las variables aleatorias relacionadas con los procesos de medida se denominan continuas (utilizaremos sus iniciales VAC para referirnos a ellas) y se caracterizan por asociar a cada evento del espacio muestral un intervalo de números reales, revisa la *definición 2*.

El proceso de asignación de probabilidades a variables aleatoria continuas es más complejo que en el caso discreto, en particular, se asigna probabilidad cero a valores específicos (números) asumidos o asignados a una VAC .

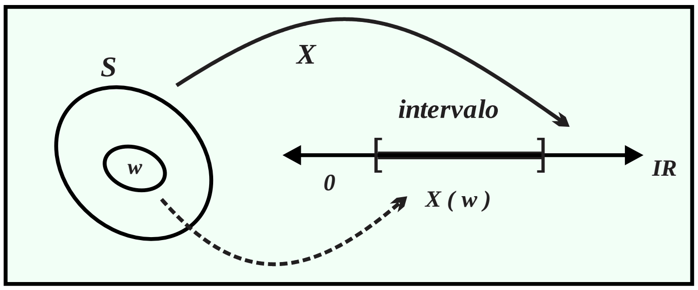


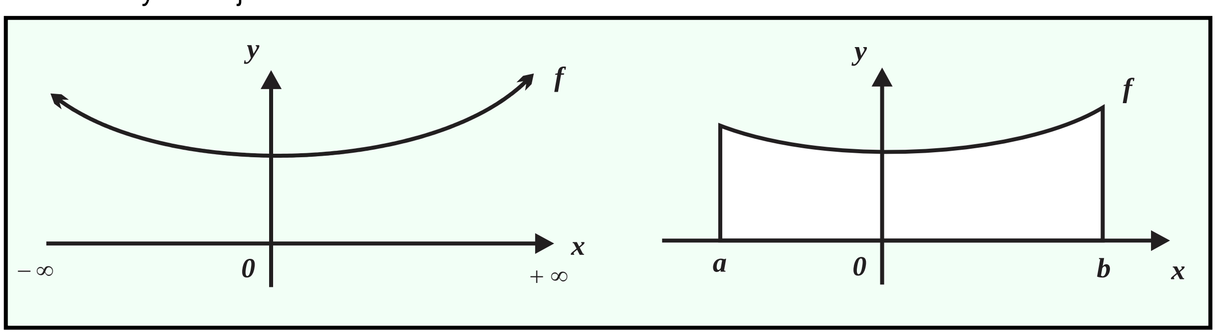
FIGURA 13

La función utilizada para la asignación de probabilidades se llama "función de densidad de probabilidad" y se relaciona con la operación que en el campo de la disciplina del cálculo diferencial e integral se denomina "integral definida", sin embargo, en esta obra no haremos uso de tal concepto y relacionaremos la probabilidad asociada a una VAC con el área de una región del plano cartesiano, vea la *figura 14*. La *figura 14.a.* muestra la curva asociada a la función continua y positiva f en el plano cartesiano, la *figura 14.b.* muestra la región del plano cartesiano limitada por:

i. La curva asociada a la función continua y no negativa f .

ii. El eje x .

iii. Los segmentos de líneas rectas verticales con extremos en la curva asociada a la función f y en los números a y b el eje x .



a. b.

FIGURA 14

Con respecto a la *figura15*, el área de la región limitada por la curva asociada a la función continua y positiva f y el eje X la representaremos con el símbolo $\int_{-\infty}^{+\infty} f$.

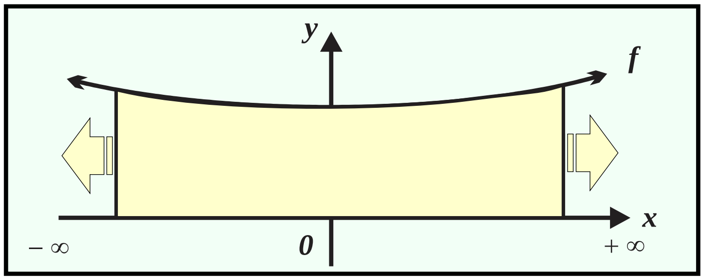


FIGURA 15

DEFINICIÓN 9 (FUNCIÓN DE DENSIDAD DE PROBABILIDAD)
Sea X la variable aleatoria continua tal que:
a. $f_X(x) \geq 0$ para todo número real x.
b. $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) = 1$.
Entonces $f_X(x)$ se denomina “función de densidad de probabilidad”, se simboliza por fdp.

En la *definición 9*:
i. El *inciso a.* garantiza que la probabilidad es un número positivo y que la curva asociada a la función de densidad de probabilidad se encuentra en los dos primeros cuadrantes del plano cartesiano.
ii. El *inciso b.* significa que la probabilidad del espacio muestral es 1, es decir, que el área de la región del plano positiva que está limitada por la curva asociada a $f_X(x)$ y el eje x es 1. Bajo las dos condiciones anteriores $p(a \leq X \leq b) = \int_a^b f_X$, vea a la *figura 16.*

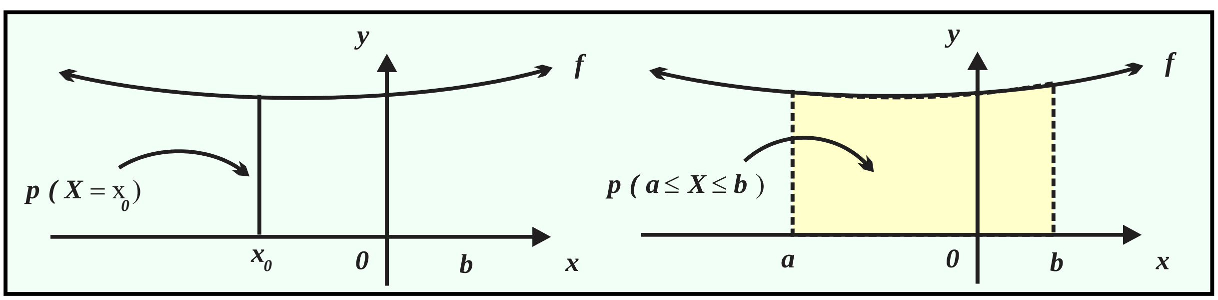


FIGURA 16

Como antes lo señalamos, si X es una VAC con fdp dada por f_X , entonces

$$f_X(x_0) = p(X = x_0) = 0$$

garantiza

$$p(a \leq X \leq b) = p(a < X \leq b) = p(a \leq X < b) = p(a < X < b).$$

EJEMPLO 17 (CÁLCULO DE PROBABILIDADES ASOCIADAS A UNA VAC)

a. La función

$$f_X(x)=\begin{cases} 1 & si \quad 1\le x\le 2 \\ 0 & otro\ caso \end{cases},$$

es una fdp, en efecto, en la *figura 17* se observa una región rectangular de base y altura con longitudes 1, por tanto,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)=\int_{1}^{2} f(x)=(2-1)(1)=1,\ \text{note que}\ f_X(x)\ge 0.$$

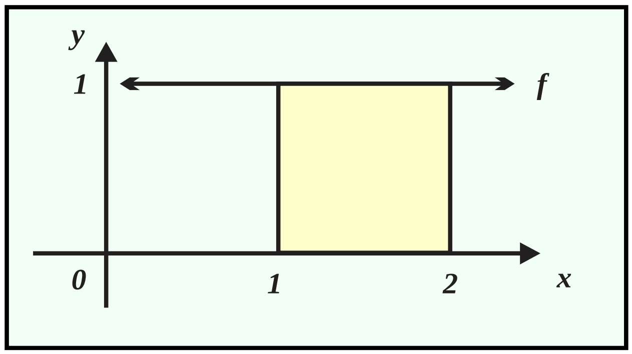


FIGURA 17

b. A continuación se muestra el cálculo de algunas probabilidades, vea la *figura 18*.

$$p(x\le 0.1)=\int_{-\infty}^{0.1} f(x)=0.$$

$$p(-1\le x\le 0.4)=\int_{-1}^{0.4} f(x)=(0.4-(-1))(0)=0.$$

$$p(0.5\le x\le 1.5)=\int_{0.5}^{1.5} f(x)=\int_{0.5}^{1} f(x)+\int_{1}^{1.5} f(x)=(1-0.5)(0)+(1.5-1)(1)=0.5.$$

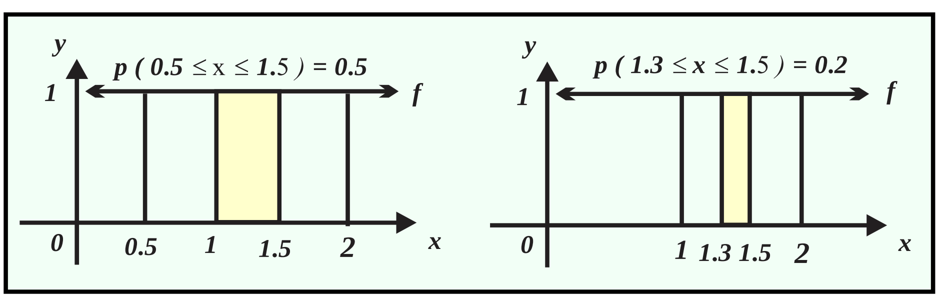


FIGURA 18

$$p(1.1\le x\le 1.9)=\int_{1.1}^{1.9} f(x)=(1.9-1.1)(1)=0.8.$$

$$p(1.8\le x\le 2.5)=\int_{1.8}^{2} f(x)=\int_{1.8}^{2} f(x)+\int_{2}^{2.5} f(x)=(2-1.8)(1)+(2.5-2)(0)=0.2.$$

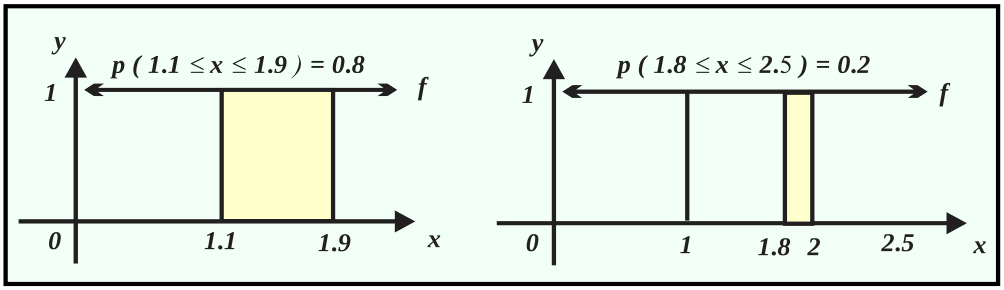


FIGURA 19

$$p(2.8 \le x \le 3) = \int_{2.8}^{3} f(x) = \int_{2.8}^{3} f(x) = (3-2.8)(0) = 0.$$

EJEMPLO 18 (VERIFICACIÓN Y CÁLCULO DE PROBABILIDADES ASOCIADAS A UNA VAC)
Sea la función

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}(2-x) & si \quad 0 \le x \le 2 \\ 0 & otro\ caso \end{cases},$$

a. $f(0)=1$ y $f(2)=0$, por tanto, el segmento de línea recta que le corresponde tiene extremos en los puntos $(0\ ,\ 1)$ y $(2\ ,\ 0)$, vea la *figura 20*.

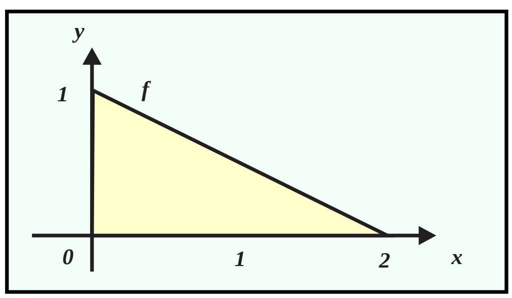


FIGURA 20

La *figura 20* muestra un triángulo rectángulo de base de longitud 2 y altura de longitud 1, por tanto, su área es $A = \frac{1}{2}(2)(1) = 1$.También el segmento de recta asociado a

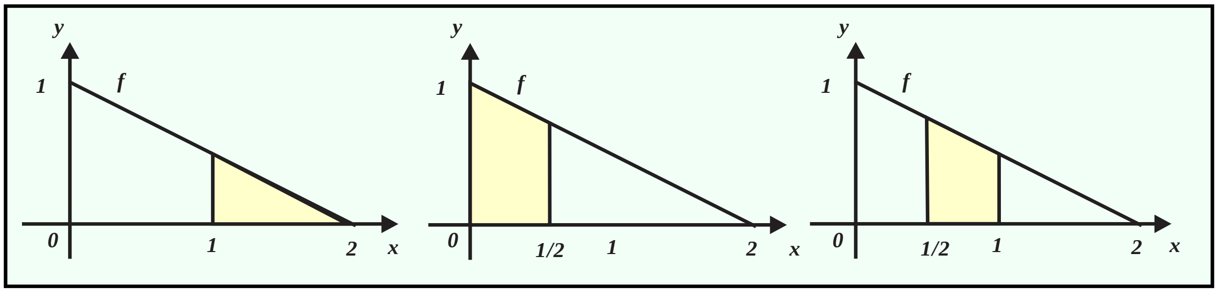
$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}(2-x) & si \quad 0 \le x \le 2 \\ 0 & otro\ caso \end{cases}$$

se encuentra en el primer cuadrante del plano cartesiano, lo que significa que es no negativo.
Con base en las dos observaciones previas concluimos que

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}(2-x) & si \quad 0 \le x \le 2 \\ 0 & otro\ caso \end{cases}$$

es una función de probabilidad.

b. $p(x \geq 1)$ corresponde al área del triángulo mostrado en la *figura 21. a.*, de altura $f(1) = \frac{1}{2}(2-1) = \frac{1}{2}$ y base $b = 2-1 = 1$, por tanto, $p(x \geq 1) = \frac{1}{2}(1)\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$.



a. b. c.

FIGURA 21

c. La probabilidad $p\left(x < \frac{1}{2}\right)$ es el área del trapecio con:

i. Base menor de longitud $f(1/2) = \frac{1}{2}\left(2 - \frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4}$.

ii. Base mayor de longitud 1.

iii. Altura de longitud $\frac{1}{2}$.

Vea la *figura 21.b.*, entonces $p\left(x < \frac{1}{2}\right) = \frac{\left(\frac{3}{4}+1\right)\left(\frac{1}{2}\right)}{2} = \frac{7}{16}$.

d. La probabilidad $p\left(\frac{1}{2} < x < 1\right)$ es el área del trapecio con:

i. Base menor de longitud $f(1) = \frac{1}{2}(2-1) = \frac{1}{2}$.

ii. Base mayor de longitud $f(1/2) = \frac{1}{2}\left(2 - \frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4}$.

iii. Altura de longitud $\frac{1}{2}$.

Vea la *figura 21.c.*, entonces $p\left(\frac{1}{2} < x < 1\right) = \frac{\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{4}\right)\left(\frac{1}{2}\right)}{2} = \frac{5}{16}$.

Las variables aleatorias continuas tienen asociada una función de probabilidad acumulada y los parámetros: valor esperado y varianza, sin embargo, los fundamentos matemáticos que involucran se encuentran fuera de nuestro alcance.

1.1 PROBLEMAS PROPUESTOS

(CASO DISCRETO)

1. Determina el recorrido.

a. $X=$"número de tazas limpias, de las 100 que tiene una escuela".

b. $Y=$"Número de líneas telefónicas ocupadas en momento en específico", de un sistema telefónico con 30 líneas.

c. Un refrigerador contiene 30 botellas de cerveza: 8 "coronas", 6 "bohemias" y 16 "tecates"; se extraen, una tras otra, dos botellas de cerveza. Sea la VAD:

$Z=$"doble del número de las cervezas "tecates" extraídas".

2. Cierta compañía posee tres camiones, mismos que pueden tener motor a diésel o motor eléctrico. Establece el espacio muestral y a cada evento asígnale el valor correspondiente.

a. $X=$"número de camiones con motor diésel".

b. $Y=$"número de camiones con motor eléctrico".

3. En un lapso de tiempo, se observan los automóviles que llegan a un crucero específico y se anota: I si da vuelta a la izquierda, D si da vuelta a la derecha o F si avanza de frente. El experimento termina tan pronto como se observa que un automóvil da vuelta a la izquierda. Sea $X=$"número de automóviles observados".

a. ¿Cuáles son los valores que asume X ?

b. Construya una lista de cinco eventos con los valores que asocia X .

4. Se va a determinar el número de retretes ocupados, por sección, en un momento específico. Una de las secciones tiene seis y la otra cuatro. Determina el recorrido.

a. $X=$"número de retretes ocupados en ambas secciones".

b. $Y=$"diferencia entre el número de retretes ocupados en ambas secciones".

5. Un futbolista ejecutó 4 "tiros penales" en un torneo de fútbol.

En cada caso establece el espacio muestral, a cada evento asígnale el número real correspondiente y luego determina el recorrido de la variable aleatoria.

a. Sea $X=$"tiros penales" convertidos en gol por el futbolista.

b. Sea $Z=$"tiros penales" fallados por el futbolista.

6. Considera el experimento que consiste lanzar simultáneamente dos dados normales y anotar el número de la cara que aparece hacia arriba. Construye el espacio muestral, a cada evento asígnale el número correspondiente y

y determina el recorrido.

a. $X =$"suma de los números que se observan en las caras".

b. $Y =$"menor de los números que se observan en las caras".

c. $Z =$"doble del primer número menos el segundo número".

7. Las caras de una moneda se han marcado como 1 y 2. Se lanza tres veces. En cada caso construye el espacio muestral, a cada evento asígnale el número correspondiente y determina el recorrido.

a. $X =$"suma de los números que aparecen en las caras".

b. $Y =$"menor de los números que aparecen en las caras".

c. $Z =$"suma de los dos primeros números que aparecen en las caras menos el tercero de los números".

8. Un experimento que consiste en lanzar dos veces un dado equilibrado y anotar los números de las caras que quedan hacia arriba. Construye la fdp.

a. $X =$"la suma de los números anotados".

b. $Y =$"el menor de los números anotados".

9. ¿Cuáles de las siguientes tablas corresponden a una fdp?, justifica tu respuesta.

a.

x	-2	1	3	6
$f_X(x)$	0.28	0.55	0.13	0.04

b.

x	2	4	6	8
$g_Y(x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{8}$

c.

y	-2	0	3	4	5
$f_Y(y)$	-0.1	0.4	0.2	0.3	0.2

d.

y	-2	3	4	5	6
$g_Y(y)$	0.3	0.3	0.2	0	0.2

10. Las caras de una moneda han sido marcadas como 1 y 2. Considere el experimento que consiste en lanzarla tres veces y anotar el número de la cara que queda hacia arriba.

Construye la distribución de probabilidad y función de probabilidad.

a. $X =$"suma de los números anotados".

b. $Y =$"menor de los números anotados".

c. $Z =$"suma de los dos primeros números anotados menos el tercero de los números anotados".

11. De las seis personas que solicitaron empleo, tres son menores de edad. Suponga que se seleccionan al azar tres de las personas (a la vez) para asignarles empleo. Sea X "número de menores de edad a los que se les asignó empleo".

a. Determina la fdp.

b. Construye la FPA.

12. De diez personas que solicitaron empleo, seis son mujeres y cuatro son hombres. Suponga que se seleccionan, a la vez y al azar, tres de las personas para emplearlas Sea:

$X =$ "número de mujeres que son empleadas".

a. Determina la fdp.

b. Construye la FPA.

13. Construye: la fdp, la FPA y grafícalas.

a.

X	-2	1	3	5
$f_X(x)$	0.28	0.55	0.13	0.04

b.

Y	-2	-1	0	1	2
$f_Y(y)$	0.1	0.5	0.2	0.1	0.1

c.

X	1	3	4	5
$g_X(x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{3}{6}$	0	$\frac{2}{6}$

d.

Y	0	1	3	4	5
$g_Y(y)$	0.3	0.3	0.2	0	0.2

14. Construye la FDA y traza su gráfico

a. $f_X(x)=\begin{cases} 0.3 & si \quad x=1 \\ 0.5 & si \quad x=3 \\ 0.2 & si \quad x=5 \\ 0 & otro\ caso \end{cases}$.

b. $f_Y(y)=\begin{cases} 0.12 & si \quad x=-3 \\ 0.06 & si \quad x=0 \\ 0.82 & si \quad x=3 \\ 0 & otro\ caso \end{cases}$.

c. $f_X(x)=\dfrac{x^2+1}{18}$ con $x=0,\ 1,\ 2,\ 3$.

15. Un edificio tiene dos entradas, marcadas como E_1 y E_2. Entran tres personas al edificio a las $19:00$. Sea la VAD:

$X=$“número de personas que entran por E_1”.

Si las personas escogen entrada independientemente y tienen la misma probabilidad de utilizar cualquiera de las entradas.

a. Determina la fdp.

b. Determina la FPA.

16. Sea

$$F(x)=\begin{cases} 0 & x<1 \\ 0.5 & 1\le x<3 \\ 1 & x\ge 3 \end{cases},$$

calcula:

a. La distribución de probabilidades.

b. $p(x=3)$.

c. $p(x=2)$.

d. $p(1\le x\le 2)$.

e. $p(1<x\le 3)$.

f. $p(x>1.5)$.

17. Sea X una VAD con FPA:

$$F_X(x)=\begin{cases} 0 & x<1 \\ 0.4 & 1\le x<3 \\ 0.8 & 3\le x<4 \\ 1 & x\ge 4 \end{cases},$$

determina:

a. $p(x\le 2)$.

b. $p(x<2)$.

c. $p(1<x\le 3)$.

d. $p(0<x<3)$.

e. $p(x>2)$.

f. $p(x=2)$.

g. $p(x=4)$.

h. $p(0\le x\le 3)$.

18. Si

$$F_Z(z)=\begin{cases} 0 & z<-3 \\ 0.4 & -3\le z<-1 \\ 0.9 & -1\le z<0 \\ 1 & z\ge 0 \end{cases},$$

obtén la fdp

9. Si $f_X(x)=\begin{cases} 3K & si \quad x=1 \\ 0.2 & si \quad x=3 \\ K & si \quad x=5 \\ 0 & otro\ caso \end{cases}$.

a. Determina K para que sea una fdp.

b. Determina la FPA y traza su gráfica.

20. Sea

$$f_X(x)=\begin{cases} K & si \quad x=-1 \\ 0.6 & si \quad x=0 \\ K & si \quad x=2 \\ 0 & otro\ caso \end{cases}$$

a. Determina el valor de K de manera que sea una fdp.

b. Determina la FDA y traza su gráfica.

21. Si

X	-4	5	10	K
$f_X(x)$	0.25	0.20	0.30	0.25

a. Si $E[X]=4$, determina el valor de K.

b. Calcula la varianza y la desviación estándar.

22. Para la distribución de probabilidades,

x	0	1	2	3
$f_X(x)$	0.20	K	K	0.20

a. Si $E[X]=1.5$, determina el valor de K,

b. Calcula la varianza y la desviación estándar.

23. El jefe de redacción de la revista "Paradero 69" ha solicitado que el reporte de actividades de los redactores sea entregado la semana siguiente, ha agregado la condición: aquél reporte que rebase cuatro páginas será rechazado. Sea la variable aleatoria X "número de páginas del reporte de los "redactores", supón que la distribución de probabilidad es:

X	1	2	3	4
$f_X(x)$	0.01	0.19	0.35	0.45

a. Calcula $E[X]$ e interprétala.

b. Calcula $V[X]$ y la desviación estándar.

24. Los "*Condominios HIR*" disponen de una gran cantidad de viviendas para rentar cada mes, lo que preocupa a la gerencia. Un estudio reciente reveló el número de departamentos desocupados por mes sigue la distribución de probabilidad:

X	10	20	30	40
$f_X(x)$	0.10	0.20	0.30	0.40

a. Calcula $E[X]$ e interprétela.

b. Calcula $V[X]$ y la desviación estándar.

25. Sea $f_X(x)=\dfrac{5-x}{10}$ con $x=1,\ 2,\ 3,\ 4$, determina:

a. La FPA.

b. $E[X]$ y la desviación estándar.

26. Sea $f_X(x)=\dfrac{x}{10}$ y $x=1,\ 2,\ 3,\ 4$.

a. Construye la FPA.

b. Calcula $E[X]$ y la desviación estándar.

27. Sea

$$F(x)=\begin{cases} 0 & si \quad x<1 \\ 0.5 & si \quad 1\le x<3 \\ 1 & si \quad x\ge 3 \end{cases}.$$

Obtén la esperanza y la desviación estándar.

28. Se lanzan simultáneamente dos monedas, si aparecen dos "soles" se ganan $\$50$, en cualquier otro caso se pierden $\$10$. ¿Conviene jugar "muchas" veces?

29. Se lanzan simultáneamente tres monedas, si aparece al menos un "sol" se ganan $\$50$, en cualquier otro caso se pierden $\$150$.

¿Conviene jugar un gran número de veces?

30. Se lanzan simultáneamente dos dados, si la suma de las caras es mayor que 7, se duplica la cantidad invertida, en cualquier otro caso se pierden la inversión. ¿Conviene jugar “muchas” veces?

31. Se lanzan simultáneamente dos dados, si la suma de las caras es un número par, se le duplica la cantidad invertida, en cualquier otro caso, usted pierde su inversión. ¿Jugarías “muchas” veces?

32. Sean X, Y variables aleatorias independientes e igualmente distribuidas, $E[\,X\,]=-1$ y $E[\,Y\,]=-2$ calcula:

a. $E[\,5X-2\,]$.

c. $E[\,\frac{1}{2}X-2Y\,]$.

b. $E[\,X+Y-2\,]$.

d. $E[-\frac{1}{4}X-\frac{2}{3}Y+\frac{1}{12}\,]$.

33. Sean X, Y variables aleatorias independientes e igualmente distribuidas

$$E[\,X\,]=0.3 \text{ y } E[\,Y\,]=0.8.$$

Calcula:

a. $E[\,10X+5Y-21\,]$.

b. $E[\,-X+15Y+1\,]$.

c. $E[\,-0.4X+1.2Y-1.6\,]$.

d. $E[\,-4+2.8Y\,]$.

34. Sean X, Y variables aleatorias independientes igualmente distribuidas con

$$V[\,X\,]=0.1 \text{ y } V[\,Y\,]=2 \text{ calcula:}$$

a. $V[\,4Y-2\,]$.

b. $V[-2X+2Y+1]$.

c. $V[\,-0.2X+0.1Y-0.3\,]$.

b. $V[\,2X+2Y+3\,]$.

35. Sean X, Y variables aleatorias independientes e igualmente distribuidas con $V[\,X\,]=\frac{7}{3}$ y $V[\,Y\,]=\frac{1}{3}$ calcula:

a. $V[\,\frac{1}{2}X-\frac{1}{4}Y-1\,]$.

b. $V[\,2-\frac{1}{8}X+\frac{1}{4}Y\,]$.

c. $V[\,-4+X+2.8Y\,]$.

d. $V[\,1.4X-0.8Y+0.6\,]$.

(CASO CONTINUO)

36. Verifica que las siguientes funciones son fdp. Traza su gráfica.

a. $f_X(x)=\begin{cases} 2 & 0\le x\le 0.5 \\ 0 & otro\ caso \end{cases}$.

b. $f_X(x)=\begin{cases} \frac{1}{8} & 2\le x\le 10 \\ 0 & otro\ caso \end{cases}$.

c. $f_X(x)=\begin{cases} \frac{1}{4}x & 0\le x\le 2 \\ 0 & otro\ caso \end{cases}$.

37. Si $f_X(x)=\begin{cases} 2 & 0\le x\le 0.5 \\ 0 & otro\ caso \end{cases}$

es una función de densidad continua, evalúa:

a. $p(\,x<0.3\,)$.

b. $p(\,0.2<x<0.3\,)$.

c. $p(\,x>0.4\,)$.

d. $p(\,x\ge 0.1\,)$.

38. Si $f_X(x)=\begin{cases} 1-\frac{1}{2}x & 0\le x\le 2 \\ 0 & otro\ caso \end{cases}$

es una función de densidad continua, evalúa:

a. $p\left(x<0.5 \right)$.
b. $p\left(1<x<2 \right)$.
c. $p\left(x>0.5 \right)$.
d. $p\left(x\le 1.5 \right)$.

39. Si $f_X\left(x \right)=\begin{cases} 8x & 0\le x\le A \\ 0 & otro\ caso \end{cases}$.

a. ¿Cuál es el valor de A (positivo)?

b. Calcula $p\left(x<\frac{1}{10} \right)$.

c. Calcula $p\left(x\ge \frac{1}{10} \right)$.

d. Calcula $p\left(\frac{1}{20}\le x<\frac{1}{10} \right)$.

1.2 DISTRIBUCIÓN BINOMIAL Y DISTRIBUCIÓN NORMAL

¿Qué debe aprender?

5. Identificar las características de un proceso binomial.
6. Construye el modelo para la distribución binomial, apoyándose en la simulación física o con la computadora.
7. Aplica el modelo binomial, su valor esperado y su desviación estándar a fenómenos contextualizados que se ajusten a este modelo, interpretando los resultados, obtenidos desde la propia o de tablas.
8. Esboza la curva de densidad para una variable aleatoria aproximadamente normal, a partir de la suavización del polígono de frecuencias de un ejemplo sencillo.
10. Deduce el proceso de estandarización de la distribución normal, aplicando la Regla Empírica, dentro de un problema contextualizado.
11. Utiliza la tablas para valores bajo la curva de la función normal estandarizada como el recurso para el cálculo de probabilidades o de valores z para dicha distribución.
12. Calcula probabilidades por medio de la distribución normal dentro de problemas contextualizados interpretando resultados.
13. Contrasta la gráfica para una situación de comportamiento aproximadamente normal con su correspondiente gráfica en el modelo estandarizado.

¿Por qué debe aprenderlo?

La distribución binomial modela fenómenos en los que el espacio muestral sólo tiene dos resultados por lo que es básico en el estudio de la inferencia estadística. La distribución normal modela experimentos aleatorios en los que las variaciones son muy pequeñas e independientes entre sí, y que proporcionan resultados que se distribuyen alrededor de su valor esperado y disminuyen simétricamente conforme se alejan este valor.

Temática

Distribución binomial: Experimento binomial, variable aleatoria binomial, parámetros y aplicaciones

Distribución Normal: Distribución normal estándar, área bajo la curva normal y manejo de tablas, problemas de aplicación.

DISTRIBUCIÓN BINOMIAL

Los experimentos aleatorios discretos pueden tratarse considerando que su espacio muestral está constituido por un par de eventos simples, uno de ellos puede considerarse como el evento favorable y el otro negando el evento favorable. Si éste es el caso, al evento favorable se denomina "éxito" (se representa por E) y el otro (su negación) es el "fracaso" (se representa por F). Bajo este enfoque, el espacio muestral de un solo experimento es $S=\{E,F\}$ y cada experimento recibe el nombre de "ensayo "Bernoulli".

EJEMPLO 1 (ENSAYOS, ÉXITO E Y FRACASO F)

a. En el experimento aleatorio que consiste en "lanzar un dado y anotar el número de la cara visible:

$E=$"se observa el número 3" y $F=$"no se observa el número 3"

b. Se mide la estatura de una persona:

$E=$"se obtiene una medida superior a 170 centímetros" y

$F=$"no se obtiene una medida superior a 170 centímetros".

c. Se compra un boleto para participar en la rifa de un avión.

$E=$"se gana el avión" y $F=$"no se gana el avión".

d. Se mide el contenido de un envase que indica en su etiqueta 600 mililitros.

$E=$"el contenido es menor a 600 mililitros" y $F=$"el contenido es mayor de 600 mililitros".

DEFINICIÓN 1 (ENSAYO BERNOULLI)

a. Un ensayo es un experimento aleatorio con sólo dos resultados posibles: *éxito* y *fracaso*, entonces su espacio muestral es $S=\{\text{éxito}, \text{fracaso}\}$.

b. En un ensayo representaremos la probabilidad de éxito por $p(E)=p$ y la de fracaso por $p(F)=1-p=q$.

Nota

En un ensayo, él *éxito* es aquel resultado que satisface la afirmación dada en la variable aleatoria, y él *fracaso* es el evento que se obtiene negando al *éxito*.

En el *ejemplo 2* obtendremos las características de la VAD:

$X=$"número de éxitos en un ensayo Bernoulli".

EJEMPLO 2 (CARACTERÍSTICAS DE LA VARIABLE ALEATORIA BERNOULLI)

Sea la variable aleatoria discreta (VAD)

$X=$ "número de éxitos en un ensayo Bernoulli".

a. El recorrido (rango) de la VAD $X=$"número de éxitos en un ensayo Bernoulli" es el conjunto

$$R_X = \{ 0,\ 1 \}.$$

b. Construyamos la fdp,

si $x=0$, entonces se obtuvo un fracaso en el ensayo, por tanto, $f(0) = p(X=0) = 1-p$,

si $x=1$, entonces se obtuvo éxito en el ensayo, por tanto, $f(1) = p(X=1) = p$.

Entonces,

$$f_X(x) = \begin{cases} 1-p & \text{si } x=0 \\ p & \text{si } x=1 \\ 0 & \textit{otro caso} \end{cases},$$

en forma tabular

x	0	1
$f_X(x)$	$1-p$	p

cuyo gráfico es

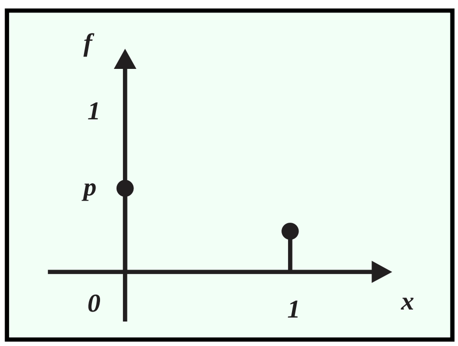


FIGURA 1

c. Para construir la FPA notemos

x	0	1
$f_X(x)$	$1-p$	p
$F(x)$	$1-p$	$1-p+p=1$

por tanto,

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x<0 \\ 1-p & \text{si } 0 \le x < 1 \\ 1 & \text{si } x \ge 1 \end{cases}$$

cuyo gráfico es

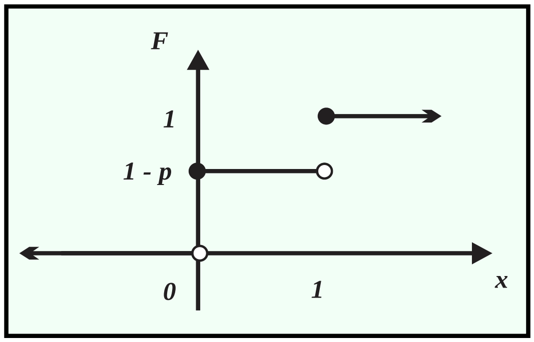


FIGURA 2

d. Valor esperado

$$E[X]=(0)(1-p)+(1)(p)=p.$$

e. Varianza

$$V[X]=(0-p)^2(1-p)+(1-p)^2(p)=p^2(1-p)+p(1-p)$$
$$=p(1-p)(1-p+p)=p(1-p)=pq.$$

f. Desviación estándar $\sqrt{V[X]}=\sqrt{pq}$.

¿QUÉ ES UNA VARIABLE ALEATORIA BINOMIAL?

La generalización de la VAD $X=$"número de éxitos en un ensayo Bernoulli", recibe el nombre de variable aleatoria Binomial, sin embargo, antes de caracterizarla conviene definirla y tener en cuenta las condiciones que satisface.

DEFINICIÓN 2 (VARIABLE ALEATORIA BINOMIAL)
La variable aleatoria discreta: $X=$"número de éxitos en n ensayos independientes", se conoce como variable aleatoria binomial.

Un experimento binomial tiene las características:

i. Consiste en n ensayos idénticos (Bernoulli)), cada ensayo tiene dos resultados denominados $éxito$ y $fracaso$.

ii. Los ensayos son independientes y la probabilidad de éxito es constante de un ensayo a otro, en consecuencia, también lo es la probabilidad de fracaso.

iii. Se rige por la variable aleatoria discreta: $X=$"número de éxitos en n ensayos independientes".

iv. Si E representa al éxito, su probabilidad es $p(E)=p$ y si F representa al fracaso, su probabilidad es $p(F)=1-p=q$.

v. Tanto p como q se mantienen constantes, además $p+q=1$.

Para construir la fdp, misma que representaremos por $b(x;n,p)$, utilizaremos un proceso inductivo y posteriormente generalizaremos el patrón de comportamiento.

Nota

En el contexto de variable aleatoria binomial la notación $b(x;n,p)$ significa "probabilidad binomial de obtener x *éxitos* en n ensayos independientes cuando la probabilidad de un éxito es p.

¿CÓMO SE CONSTRUYE LA fdp DE UNA VARIABLE ALEATORIA BINOMIAL?

EJEMPLO 3 (CONSTRUCCIÓN DE LA fdp ASOCIADA A LA VAD BINOMIAL, SI $n=1,\ 2\ ,\ 3$.

a. Sea la VAD

$X=$ "número de éxitos en $n=1$ ensayo".

El espacio muestral es el conjunto $S=\{\ F\ ,\ E\ \}$.

Las asignaciones numéricas a los eventos por parte de la variable aleatoria son

$$X(F)=0\ ,\ X(E)=1\ ,$$

por tanto,

$$b(0;1,p)=p(X=0)=p(F)=q \text{ y } b(1;1,p)=p(X=1)=p(E)=p\ ,$$

de donde obtenemos

$$b(x;1,p)=\begin{cases} q & \text{si } x=0 \\ p & \text{si } x=1 \\ 0 & \textit{otro caso} \end{cases} \text{ o bien, en términos de combinaciones } b(x;1,p)=C_x^1 p^x q^{1-x}\ ,$$

siempre que $X=0,\ 1$.

b. Sea la VAD

$X=$ "número de éxitos en $n=2$ ensayos".

El espacio muestral es el conjunto $S=\{\ (F,F),(F,E),(E,F),(E,E)\ \}$.

Las asignaciones numéricas a los eventos por parte de la variable aleatoria son

$$X((F,F))=0\ ,\ X((F,E))=1\ ,\ X((E,F))=1\ ,\ X((E,E))=2\ ,$$

por tanto,

$$b(0;2,p)=p(X=0)=p(F_1\cap F_2)=p(F_1)p(F_2)=1\cdot q\cdot q=q^2p^0\ .$$

$$\begin{aligned} b(1;2,p)&=p(X=1)=p(F_1\cap E_2)+p(E_1\cap F_2) \\ &=p(F_1)p(E_2)+p(E_1)p(F_2)=q\cdot p+p\cdot q=2p\cdot q \end{aligned}$$

$$b(2;2,p)=p(X=2)=p(E_1\cap E_2)=p(E_1)p(E_2)=p\cdot p=1\cdot q^0\cdot p^2$$

$$b(x;2,p)=\begin{cases} q^2 & \text{si } x=0 \\ 2p\cdot q & \text{si } x=1 \\ p^2 & \text{si } x=2 \\ 0 & \textit{otro caso} \end{cases} \text{, o bien } b(x;2,p)=C_x^2 p^x q^{2-x} \text{, si } X=0,\ 1,\ 2\ .$$

c. $X =$"número de éxitos en $n = 3$ ensayos".

El espacio muestral es $S = \left\{ \begin{array}{l} (F,F,F),(F,F,E),(F,E,F),(E,F,F), \\ (F,E,E),(E,F,E),(E,E,F),(E,E,E) \end{array} \right\}$.

Las asignaciones numéricas a los eventos por parte de la variable aleatoria son

$$X((F,F,F))=0,\ X((F,F,E))=1,\ X((F,E,F))=1,\ X((E,F,F))=1$$
$$X((F,E,E))=2,\ X((E,F,E))=2,\ X((E,E,F))=2,\ X((E,E,E))=3.$$

Por tanto,

$$b(0;3,p)=p(X=0)=p(F_1\cap F_2\cap F_3)=p(F_1)p(F_2)p(F_3)=q\cdot q\cdot q=q^3.$$

$$\begin{aligned} b(1;3,p)&=p(X=1)=p(E_1\cap F_2\cap F_3)+p(F_1\cap E_2\cap F_3)+p(F_1\cap F_2\cap E_3) \\ &=p(E_1)p(F_2)p(F_3)+p(F_1)p(E_2)p(F_3)+p(F_1)p(F_2)p(E_3) \\ &=q^2\cdot p+q^2\cdot p+q^2\cdot p=3pq^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b(2;3,p)&=p(X=2)=p(F_1\cap E_2\cap E_3)+p(E_1\cap F_2\cap E_3)+p(E_1\cap E_2\cap F_3) \\ &=p(F_1)p(E_2)p(E_3)+p(E_1)p(F_2)p(E_3)+p(E_1)p(E_2)p(F_3) \\ &=q\cdot p^2+q\cdot p^2+q\cdot p^2=3p^2q \end{aligned}$$

$$b(3;3,p)=p(X=3)=p(E_1\cap E_2\cap E_3)=p(E_1)p(E_2)p(E_3)=p\cdot p\cdot p=p^3.$$

$$b(x;3,p)=\begin{cases} q^3 & \text{si } x=0 \\ 3p\cdot q^2 & \text{si } x=1 \\ 3p^2\cdot q & \text{si } x=2 \\ p^3 & \text{si } x=3 \\ 0 & \textit{otro caso} \end{cases}, \text{ o bien } b(x;3,p)=C_x^3 p^x q^{3-x}, \text{ sí } X=0,\ 1,\ 2,\ 3.$$

La *tabla 1* sistematiza los resultados obtenidos en el *ejemplo 1* y justifica las conjeturas que se encuentran después de ella.

NÚMERO DE ENSAYOS	FUNCIÓN DE PROBABILIDAD
$n=1$	$b(x;1,p)=C_x^1 p^x q^{1-x}$, si $X=0,\ 1.$
$n=2$	$b(x;2,p)=C_x^2 p^x q^{2-x}$, si $X=0,\ 1,\ 2.$
$n=3$	$b(x;3,p)=C_x^3 p^x q^{3-x}$, si $X=0,\ 1,\ 2,\ 3.$

TABLA 1

GENERALIZACIÓN DE LAS OBSERVACIONES ANTERIORES

Si X es la VAD "número de éxitos en n ensayos independientes", ($p=$probabilidad de éxito y $q=$probabilidad de fracaso), entonces

i. Tiene como fdp a $b(x;n,p)=C_x^n p^x q^{n-x}$, si $X=0,\ 1,\ 2,\cdots,\ n$".

ii. Tiene como FPA a $B(x,n,p)=\sum_{k=0}^{x} b(k\ ,\ n\ ,\ p)=\sum_{k=0}^{x} C_k^n p^k q^{n-k}$, sí $X=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n$.

Conjeturas que son correctas y que se encuentran escritas formalmente en la *proposición 1*.

PROPOSICIÓN 1 (FUNCIÓN DE PROBABILIDADES DE LA VARIABLE ALEATORIA BINOMIAL)
Sea la VAD $X=$"número de éxitos en n ensayos independientes", si p es la probabilidad de éxito y q es la probabilidad de fracaso, entonces:

a. La fdp correspondiente es $b(x,n,p)=C_x^n p^x q^{n-x}$, si $X=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n$.

b. La FDA es $B(x,n,p)=\sum_{k=0}^{x} b(k\ ,\ n\ ,\ p)=\sum_{k=0}^{x} C_k^n p^k q^{n-k}$, si $X=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n$.

c. $b(x,n,p)=B(x,n,p)-B(x-1,n,p)$.

La expresión $b(x,n,p)$ se interpreta como "la probabilidad de obtener x éxitos en n ensayos independientes cuando la probabilidad de un éxito es p" y la expresión $X\sim \mathrm{B}(x,n,p)$ se interpreta: "la probabilidad de obtener a lo más x éxitos en n ensayos independientes cuando la probabilidad de un éxito es p".

Nota

Cabe señalar:

a. La fdp asociada a la variable aleatoria binomial X, depende de los "parámetros" n y p, esto es $X\sim b(x,n,p)$.

b. La FPA asociada a la variable aleatoria binomial X la representaremos por

$$X\sim B(x,n,p).$$

¿CÓMO SE CALCULAN LAS PROBABILIDADES BINOMIALES?

EJEMPLO 4 (OBTENCIÓN DE PROBABILIDADES BINOMIALES)
(En las páginas 81 a 83 se obtienen estas probabilidades utilizando una APP, revise los ejemplos 4 bis y 4 tris)
Para la VAD $X=$"número de éxitos en 4 ensayos independientes", con probabilidad de éxito $p=0.3$.
Se tiene que $n=4$ y $p=0.30$, entonces $q=0.70$ y la fdp es

$$b(x,4,\ 0.30)=C_x^4(0.30)^x(0.70)^{4-x},\ \text{si}\ X=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4.$$

Por tanto,

$$b(0,\ 4,\ 0.30)=C_0^4(0.30)^0(0.70)^4=\frac{4!}{(4-0)!\,0!}(0.30)^0(0.70)^4=(1)(0.30)^0(0.70)^4=0.2401.$$

$$b(1,4,0.30)=C_1^4(0.30)^1(0.70)^3=\frac{4!}{(4-1)!\,1!}(0.30)^1(0.70)^3=(4)(0.30)^1(0.70)^3=0.4116.$$

$$b(2,4,0.30)=C_2^4(0.30)^2(0.70)^2=\frac{4!}{(4-2)!\,2!}(0.30)^2(0.70)^2=(6)(0.30)^2(0.70)^2=0.2646\,.$$

$$b(3,4,0.30)=C_3^4(0.30)^3(0.70)^1=\frac{4!}{(4-3)!\,3!}(0.30)^3(0.70)^1=(4)(0.30)^3(0.70)^1=0.0756\,,$$

$$b(4,4,0.30)=C_4^4(0.30)^4(0.70)^0=\frac{4!}{(4-4)!\,4!}(0.30)^4(0.70)^0=(1)(0.30)^4(0.70)^0=0.0081\,.$$

La distribución de probabilidad es

X	0	1	2	3	4
$b(x,\ 4,\ 0.30)$	0.2401	0.4116	0.2646	0.0756	0.0081

La *figura 3* muestra el gráfico correspondiente.

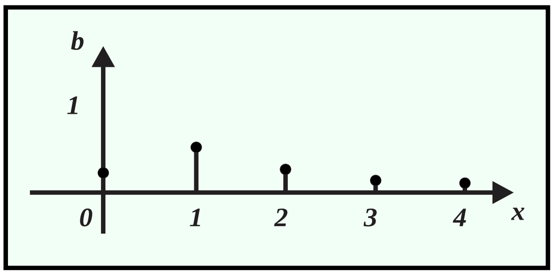


FIGURA 3

Por otra parte, la FPA es

$$B(x,4,0.30)=\sum_{k=0}^{x}C_k^4\,p^k q^{4-k}\ \text{, si } X=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4\text{, o bien}$$

$$B(x,\ 4,\ 0.30)=\begin{cases}0 & \text{sí} \quad x<0\\ 0.2401 & \text{sí} \quad 0\le x<1\\ 0.6517 & \text{sí} \quad 1\le x<2\\ 0.9163 & \text{sí} \quad 2\le x<3\\ 0.9919 & \text{sí} \quad 3\le x<4\\ 1 & \text{sí} \quad x\ge 4\end{cases}.$$

El gráfico asociado se muestra en la *figura 4*.

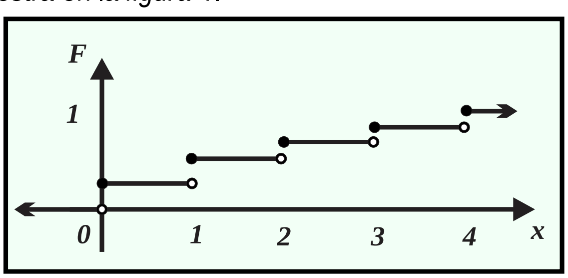


FIGURA 4

La determinación de la probabilidad binomial, tanto puntual (para un solo valor de X) como acumulada (para una secuencia de números enteros no negativos de X) el proceso puede ser largo y tedioso, sin embargo, el uso de tablas puede facilitar su evaluación. El apéndice $A.1$ contiene las tablas de las probabilidades binomiales acumuladas desde $n=1$ ensayo hasta $n=25$ ensayos para diversos valores de p; la *tabla 2* muestra una sección de ellas.

n	X	0.40	0.45	0.50
19	4	0.0696	0.0280	0.0096
	5	0.1629	0.0777	0.0318
	6	0.3081	0.1727	0.0835
	7	0.4878	0.3169	0.1796
	8	0.6675	0.4940	0.3238
	9	0.8139	0.6710	0.5000
	10	0.9115	0.8159	0.6762
	11	0.9648	0.9129	0.8204

n	X	0.85	0.90	0.95
10	3	0.0001	0.0000	0.0000
	4	0.0014	0.0001	0.0000
	5	0.0099	0.0016	0.0001
	6	0.0500	0.0128	0.0010
	7	0.1798	0.0702	0.0115
	8	0.4557	0.2639	0.0861
	9	0.8031	0.6513	0.4013
	10	1.0000	1.0000	1.0000

TABLA 2

El *ejemplo 5* muestra la forma de uso de las tablas de probabilidades binomiales acumuladas que se incluyen en el apéndice $A.1$ de este libro.

EJEMPLO 5 (DETERMINACIÓN DE PROBABILIDADES BINOMIALES UTILIZANDO TABLAS)
(En la página 86 se obtienen estas probabilidades utilizando una APP para celular, revise el ejemplo 5 bis)

a. Para determinar la probabilidad binomial acumulada $B(7,19,0.45)$, en la primera columna de la primera tabla se localiza el parámetro $n=19$, a continuación, en la segunda columna se localiza el número $x=7$ y sobre esa fila nos desplazamos a la derecha hasta la columna encabezada por el parámetro $p=0.45$, por tanto,

$$B(7,19,0.45)=0.3169\,.$$

b. Para determinar la probabilidad binomial acumulada $B(8,10,0.95)$, en la primera columna localizamos el parámetro $n=10$, a continuación, en la segunda columna localizamos el número $x=8$ y sobre esa fila nos desplazamos a la derecha hasta la columna encabezada por el parámetro $p=0.95$, obtenemos

$$B(8,10,0.95)=0.0861\,.$$

c. Para calcular $b(5,19,0.75)$ utilizando tablas es necesario rescribirla en términos de $B(x,9,0.75)$, obtenemos

$$b(5,19,0.75)=B(5,19,0.75)-B(4,19,0.75).$$

Posteriormente utilizamos el proceso seguido en los incisos anteriores, entonces

$$b(5,19,0.75)=B(5,19,0.75)-B(4,19,0.75)=0-0=0$$

d. Basta recordar las propiedades de la FDA, en particular $p(X=x_i)=F(x_i)-F(x_{i-1})$, que para la vad binomial equivale a $b(x,n,p)=B(x,n,p)-B(x-1,n,p)$ y aplicar el procedimiento descrito en el inciso anterior un par de veces.

$$b(7,19,0.45)=B(7,19,0.45)-B(6,19,0.45)=0.3169-0.1727=0.1442\,.$$

Nota

Las tablas de probabilidad binomiales del apéndice $A.1$ pueden ser inoperantes para ciertos valores de los parámetros binomiales, sin embargo, una aplicación computacional facilita los cálculos, revise la *sección 1.3*.

¿CÓMO SE CALCULA EL VALOR ESPERADO DE LA DISTRIBUCIÓN BINOMIAL?

Para caracterizar completamente la VAD binomial $X=$“número de éxitos en n ensayos independientes”, es necesario obtener su valor esperado y su varianza, para ello, nuevamente utilicemos un proceso inductivo y aprovecharemos los resultados obtenidos en el *ejemplo 6*.

EJEMPLO 6 (VALOR ESPERADO DE LA VAD BINOMIAL SI $n=0,\ 1,\ 2,\ 3$)

a. Si $X=$”número de éxitos en $n=1$ ensayo”, entonces la fdp es

x	0	1
$b(x;1,p)$	q	p

luego

$$E[X]=(0)(q)+(1)(p)=p\,.$$

b. Si $X=$”número de éxitos en $n=2$ ensayos”, entonces la fdp es

x	0	1	2
$b(x;2,p)$	q	p	q^2

de donde

$$E[X]=(0)(q^2)+(1)(2pq)+(2)(p^2)$$
$$=2p(q+p)=2p$$

c. Si $X=$”número de éxitos en $n=3$ ensayos”, entonces la fdp es

x	0	1	2	3
$b(x;2,p)$	q^3	$3q^2p$	$3qp^2$	p^3

luego

$$\begin{aligned} E[X] &= (0)(q^3) + (1)(3q^2 p) + (2)(3qp^2) + (3)(p^3) \\ &= (1)(3q^2 p) + (2)(3qp^2) + (3)(p^3) \\ &= 3q^2 p + 6qp^2 + 3p^3 = 3p(q^2 + qp + p^2) \\ &= 3p(q+p)^2 \\ &= 3p. \end{aligned}$$

La *tabla 3* reúne los resultados obtenidos en el *ejemplo 6*.

NÚMERO DE ENSAYOS	VALOR ESPERADO
$n = 1$	$E[X] = p$
$n = 2$	$E[X] = 2p$
$n = 3$	$E[X] = 3p$

TABLA 3

Fundamentándonos en la *tabla 3* podemos establecer la siguiente conjetura (que en realidad es verdadera e que inmediatamente la formalizamos).

PROPOSICIÓN 2 (ESPERANZA DE LA VARIABLE ALEATORIA BINOMIAL)
Sea la VAD $X =$"número de éxitos en n ensayos independientes", si p representa la probabilidad de éxito y q la probabilidad de fracaso, entonces

$$E[X] = np.$$

¿CÓMO SE CALCULA EL LA VARIANZA DE LA DISTRIBUCIÓN BINOMIAL?

La obtención del parámetro varianza, se facilita utilizando la propiedad $V[X] = E[X^2] - E^2[X]$ (que se trató en la sección anterior). De acuerdo con la *proposición 2*, $E[X] = np$, por tanto, $E^2[X] = n^2 p^2$, falta calcular $E[X^2]$.

EJEMPLO 7 (VARIANZA DE LA VAD BINOMIAL PARA $n = 1, 2, 3$)

a. Sea la VAD $X =$"número de éxitos en $n = 1$ ensayo", entonces la fdp es

x	0	1
x^2	0	1
$b(x;1,p)$	q	p

también

$$E\left[X^2\right]=(0)(q)+(1)(p)=p \text{ y } V[X]=p-p^2=p(1-p)=pq.$$

b. Sea $VAD\ \ X=$"número de éxitos en $n=2$ ensayos", entonces la fdp es

x	0	1	2
x^2	0	1	4
$b(x;2,p)$	q	p	q^2

Luego

$$E\left[X^2\right]=(0)\left(q^2\right)+(1)(2pq)+(4)\left(p^2\right)=2pq+4p^2$$

por lo que

$$V[X]=2pq+4p^2-(2p)^2=2pq.$$

c. Sea la $VAD\ \ X=$"número de éxitos en $n=3$ ensayos", entonces la fdp es

x	0	1	2	3
x^2	0	1	4	9
$b(x;2,p)$	q^3	$3q^2p$	$3qp^2$	p^3

entonces

$$E\left[X^2\right]=3q^2p+12qp^2+9p^3,$$

por tanto,

$$V[X]=3q^2p+12qp^2+9p^3-9p^3=3pq(q+p)=3pq.$$

En la *tabla 4.*, sistematizamos los resultados obtenidos en el *ejemplo 7*.

NÚMERO DE ENSAYOS	VARIANZA
$n=1$	$V[X]=pq$
$n=2$	$V[X]=2pq$
$n=3$	$V[X]=3pq$

TABLA 4

Con fundamento en la *tabla 4.* se establece la siguiente conjetura (que en realidad es verdadera e que inmediatamente la formalizamos).

GENERALIZACIÓN

PROPOSICIÓN 3 (VARIANZA DE LA VARIABLE ALEATORIA BINOMIAL)
Sea la VAD $X=$“número de éxitos en n ensayos independientes”, si p es la probabilidad de éxito y q es la probabilidad de fracaso, entonces:

a. $V[X]=npq$.

b. $\sqrt{V[X]}=\sqrt{npq}$.

EJEMPLO 8 (APLICACIONES DE LA DISTRIBUCIÓN BINOMIAL)
Los estudios muestran que 1 de cada 4 alumnos inscritos en el sexto semestre del CCHO cursan una asignatura en el programa PAE.
Sea la VAD $X=$“número de alumnos del CCHO que cursan una asignatura en el programa PAE en una muestra de tamaño 6”.

i. La probabilidad de que ningún alumno del CCHO, seleccionado al azar curse una asignatura en el programa PAE es

$$p(X=0)=b(0\,,\,6\,,\,0.25)=\overset{6}{\underset{0}{C}}(0.25)^0(0.75)^6=0.1780\,.$$

ii. La probabilidad de que exactamente dos alumnos del CCHO, seleccionados al azar cursen una asignatura en el programa PAE está dada por

$$p(X=2)=b(2\,,\,6\,,\,0.25)=\overset{6}{\underset{2}{C}}(0.25)^2(0.75)^4=0.2966\,.$$

iii. La probabilidad de que más de dos alumnos del CCHO, seleccionados al azar, cursen una asignatura en el programa PAE es

$$p(X>2)=1-p(X\le 2)=1-B(2\,,\,6\,,\,0.25)=1-\overset{6}{\underset{2}{C}}(0.25)^2(0.75)^4=0.1694\,.$$

iv. El valor esperado y la varianza de la VAD $X=$“número de alumnos del CCHO que cursan una asignatura en el programa PAE en una muestra de tamaño 6” son

$$E[X]=6(0.25)=1.5 \text{ y } V[X]=6(0.25)(0.75)=\frac{9}{8} \text{ respectivamente.}$$

EJEMPLO 9 (APLICACIONES DE VACUNAS)
Al aplicar cierta vacuna a cien alumnos, se encontró que noventa de ellos perdieron el hábito de copiar en los exámenes.

a. Sea la VAD $X=$“número de alumnos que perdieron el habito de copiar en los exámenes en una muestra de 12”.

i. La fdp y la FPA son

$$b(x\,,\,12\,,\,0.90)=\overset{12}{\underset{x}{C}}(0.90)^x(0.10)^{12-x} \text{ y } B(x\,,\,12\,,\,0.90)=\sum_{k=0}^{x}\overset{12}{\underset{k}{C}}(0.90)^k(0.10)^{12-k}$$

respectivamente.
ii. El valor esperado y la varianza son

$$E[\ X\ ]=12(\ 0.90\ )=10.8 \text{ y } V[\ X\ ]=12(\ 0.90\ )(\ 0.10\ )=1.08 \text{ respectivamente.}$$

iii. La probabilidad de que entre tres (inclusive) y seis (inclusive) alumnos hayan perdido el hábito de copiar en los exámenes es

$$p(3 \le X \le 6)=B(\ 6\ ,\ 12\ ,\ 0.90\ )-B(\ 2\ ,\ 12\ ,\ 0.90\ )=0.0005\ .$$

iv. La probabilidad de que más de cuatro alumnos hayan perdido el hábito de copiar en los exámenes es

$$p(X \ge 5)=1-p(X \le 4)=1-B(\ 4\ ,\ 12\ ,\ 0.90\ )=1.$$

b. Sea la $VAD\ \ X=$"número de alumnos que no perdieron el habito de copiar en los exámenes en una muestra de 12".
i. La fdp y la FPA son

$$b(\ x\ ,\ 12\ ,\ 0.10\ )=\overset{12}{\underset{x}{C}}(\ 0.10\ )^{x}(\ 0.90\ )^{12-x}$$

y

$$B(\ x\ ,\ 12\ ,\ 0.90\ )=\sum_{k=0}^{x}\overset{12}{\underset{k}{C}}(\ 0.10\ )^{k}(\ 0.90\ )^{12-k}\ ,$$

respectivamente.
ii. El valor esperado y la varianza son

$$E[\ X\ ]=12(\ 0.10\ )=1.2 \text{ y } V[\ X\ ]=12(\ 0.10\ )(\ 0.90\ )=1.8\text{, respectivamente.}$$

ii. La probabilidad de que entre tres (inclusive) y seis (inclusive) alumnos no hayan perdido el hábito de copiar en los exámenes es

$$p(3 \le X \le 6)=B(\ 6\ ,\ 12\ ,\ 0.10\ )-B(\ 2\ ,\ 12\ ,\ 0.10\ )=0.1108\ .$$

iii. La probabilidad de que más de cuatro alumnos hayan perdido el hábito de copiar en los exámenes es

$$p(X \ge 5)=1-p(X \le 4)=1-B(\ 4\ ,\ 12\ ,\ 0.90\ )\approx 1-0.0043=0.9957.$$

El *ejemplo 10* muestra que en ocasiones definir nuevamente el "éxito" facilita el cálculo de las probabilidades.

EJEMPLO 10 (EXTERMINIO DE RATAS)

Una persona que se dedica a exterminar plagas afirma "el 95% de las ratas a las que asesta un garrotazo en la cabeza pasan a mejor vida". Sean las variables aleatorias:
$X=$ "número de ratas que reciben un garrotazo en la cabeza y que pasan a mejor vida".
$X^C=$ "número de ratas que reciben un garrotazo en la cabeza y que no pasan a mejor vida".
Suponiendo que su afirmación es verdadera y que en una faena asesta un garrotazo en la cabeza a 24 ratas, las probabilidades de que:
i. Exactamente 6 de las ratas que asestó un garrotazo en la cabeza no pasen a mejor vida es

$$p\left(X^c = 6\right) = B(6, 24, 0.05) - B(5, 24, 0.05) = 0.9998 - 0.9990 = 0.0008 .$$

ii. Más de 9 ratas a las que asestó un garrotazo en la cabeza no pasen a mejor vida.

$$p\left(X^c \geq 10\right) = 1 - B(9, 24, 0.05) = 1 - 1.0000 = 0 .$$

iii. Más de 9 pero menos de 15 ratas que recibieron un garrotazo en la cabeza pasen a mejor vida es

$$p(9 < X < 15) = B(14, 24, 0.95) - B(9, 24, 0.95) = 0 - 0 = 0 .$$

iii. Más de 9 pero menos de 15 ratas que recibieron un garrotazo en la cabeza no pasen a mejor vida es $p\left(9 < X^c < 15\right) = B(14, 24, 0.05) - B(9, 24, 0.05) = 0$.

iv. Entre 15 y 22 ratas que recibieron un garrotazo en la cabeza pasen a mejor vida es

$$p(15 < X < 22) = B(21, 24, 0.95) - B(15, 24, 0.95) = 0.1159 .$$

EJEMPLO 11 (PROBLEMAS OPERATIVOS)

a. Si una VAD se distribuye binomialmente y tiene fdp $f(x) = \overset{18}{\underset{x}{C}}(0.35)^x(0.65)^{18-x}$, entonces sus parámetros son $n = 12$ y $p = 0.35$, también

$$E[X] = 18(0.35) = 6.3 \text{ y } V[X] = 18(0.35)(0.65) = 4.095 .$$

b. Si una VAD se distribuye binomialmente con valor esperado 8 y desviación estándar 2, para determinar su fdp es necesario conoces los valores de sus parámetros n y p. Puesto que $E[X] = 8$, si $DE[X] = 2$, entonces $V[X] = 4$.

Al sustituir estos datos en las expresiones para el valor esperado y la varianza de la distribución binomial obtenemos el sistema de ecuaciones: $np = 8$ y $npq = 4$.

Entonces $8q = 4$ y $q = 0.5$, así $p = 1 - 0.5 = 0.5$. De la primera de las ecuaciones obtenemos

$$n(0.5) = 8, \quad n = \frac{8}{0.5} \text{ y } n = 16 .$$

La fdp es

$$b(x, 16, 0.5) = \overset{16}{\underset{x}{C}}(0.5)^x(0.5)^{16-x} .$$

DISTRIBUCIÓN NORMAL

El grafico asociado a una variable aleatoria (o no aleatoria) proporciona información sobre su comportamiento. En el proceso de la descripción estadística de un grupo de medidas (datos), después del cálculo de algunas de sus medidas descriptivas (en particular las de tendencia central y las de dispersión) el siguiente paso consiste en realizar su descripción gráfica, misma que proporciona una buena idea del comportamiento de la variable que los genera. La *figura 5* presenta el gráfico de la distribución de probabilidad asociada a cierta variable aleatoria discreta junto con su histograma de probabilidad.

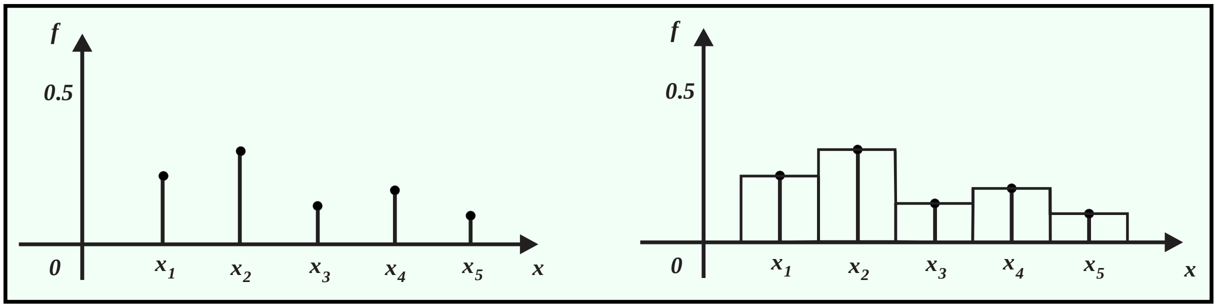


FIGURA 5

Una de las características que se busca en un histograma de probabilidad se refiere a su simetría, respecto a una línea recta específica, en particular a aquella cuya ecuación es igual al valor esperado de la variable aleatoria (en el caso de una distribución de frecuencias a una medida de tendencia central, por ejemplo, la media aritmética), vea la *figura 6*.

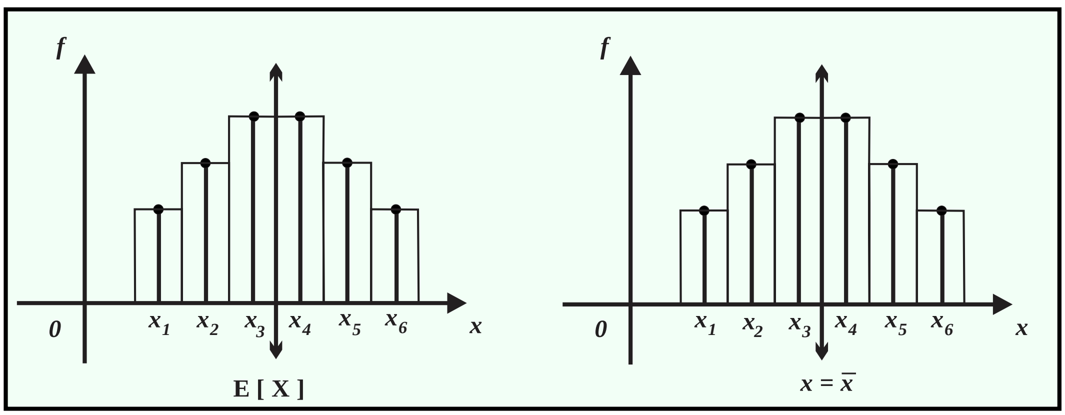


FIGURA 6

Cuando una distribución de probabilidad (o en su caso una distribución de frecuencias) no es simétrica se conoce como asimétrica y su asimetría puede ser a la derecha (también llamada positiva) o a la izquierda (también llamada negativa), vea la *figura 7*.

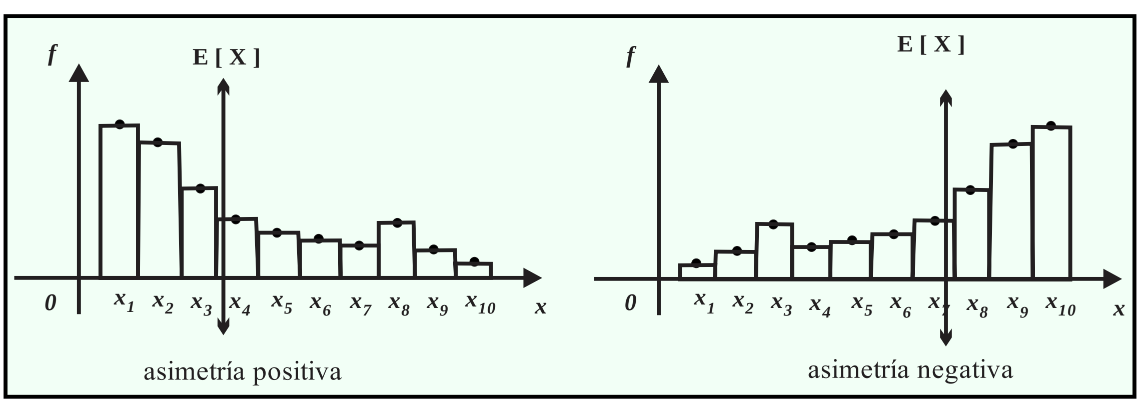


FIGURA 7

En una gran diversidad de estudios y análisis del comportamiento de grupos de medidas (datos), se ha observado que el patrón de comportamiento del histograma de frecuencias (o probabilidades) es similar al mostrado en la *figura 8.*

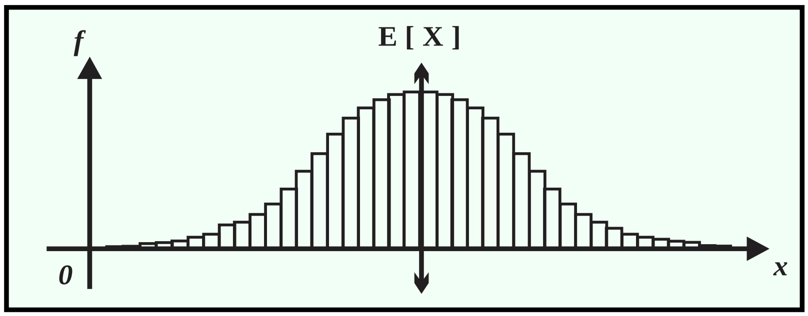


FIGURA 8

Si el gráfico de la *figura 8* se "suaviza" se obtiene la curva de la *figura 9.* Esta curva suave "asintótica" (con asíntota el eje cartesiano horizontal) representa de modo intuitivo la distribución teórica de la característica observada y su importancia se debe a la frecuencia con la que distintas variables asociadas a mediciones (de características de objetos, fenómenos naturales y cotidianos, entre otros) se aproximan a ella.

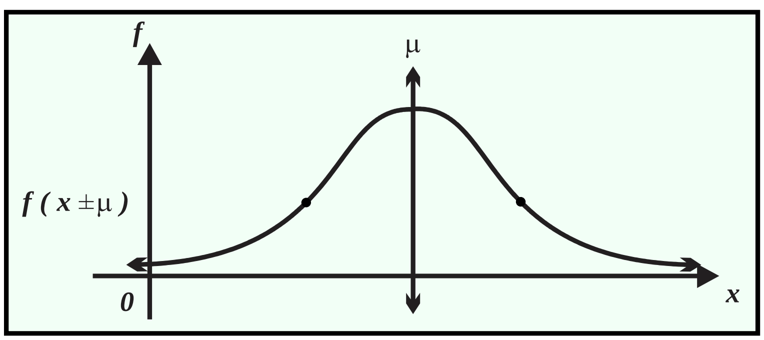


FIGURA 9

Por tanto, la función de probabilidad (regla de correspondencia) que tiene asociada se ha llamado normal o distribución normal. La palabra normal viene de la palabra griega «normalis», cuyo significado es conforme a la regla, o conforme a la norma, que es lo típico o que se repite muchas veces según la experiencia. La forma de la curva es parecida a una campana y es simétrica respecto a la línea recta que representa su valor esperado y por este motivo se llama "campana de Gauss o simplemente Gaussiana"; la función (matemática) que tiene asociada fue descrita por Gauss por lo que en muchos autores de textos se refieren a ella como "ley de probabilidades de Gauss". Según este modelo de probabilidad, en todo proceso de medida influyen diversas causas que hacen variar su resultado (real), todas las causas son independientes entre sí y son muy pequeñas de manera que los resultados se acumulan alrededor de su valor esperado.

¿CÓMO SE DEFINE LA DISTRIBUCIÓN NORMAL?

DEFINICIÓN 3 (FUNCIÓN DE PROBABILIDAD NORMAL O DE GAUSS)
La variable aleatoria continua X tiene distribución normal o de Gauss con parámetros μ y σ^2, si SU función de densidad de probabilidad es:

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$, siempre que $-\infty < X < +\infty$, $-\infty < \mu < +\infty$ y $\sigma > 0$.

En la *definición 3* el símbolo e es el número de Euler y representa la base de los logaritmos naturales, tiene un valor aproximado de 2.718, el símbolo π es la constante matemática de valor aproximado a 3.1416, los símbolos μ (miú) y σ (sigma) son letras griegas y denominan parámetros. Para referirnos a distribución normal se utilizaremos la notación

$$X \sim N\left(\mu,\, \sigma^2\right),$$

misma que interpretaremos como: “la variable aleatoria continua X se distribuye normalmente con parámetros μ y σ^2”.

¿CUÁLES SON LAS CARACTERÍSTICAS DE LA DISTRIBUCIÓN NORMAL?

Retornando a la curva asociada a la fdp normal, presenta las características gráficas:

i. Es simétrica a la línea recta vertical de ecuación $x=\mu$, por tanto, $f(x-\mu)=f(x+\mu)$, vea la *figura 10*.

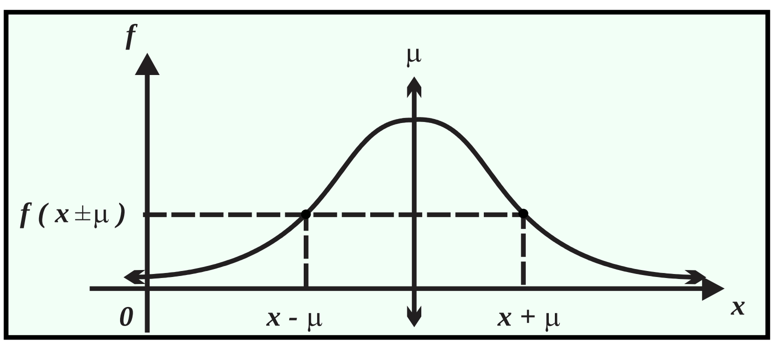


FIGURA 10

ii. El eje x es su única asíntota (en este caso horizontal).

iii. Alcanza su valor máximo cuando $x=\mu$ y éste es $f(\mu)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$, vea la *figura 11*.

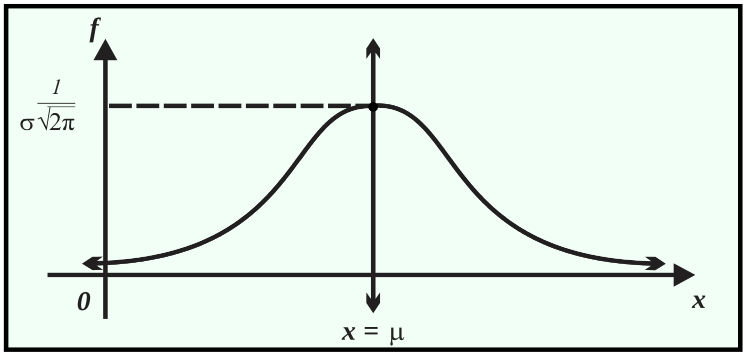


FIGURA 11

La función $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$ y cumple con los axiomas:

i. Es no negativa no negatividad (la curva gaussiana está “arriba” del eje de las abscisas).

ii. El área de la región que define con el eje de las abscisas es de una unidad, por tanto, la región izquierda (derecha) que definen: el eje x, la línea recta de ecuación $x = \mu$ y la curva Gaussiana es 0.5 unidades de área, vea la *figura 12*.

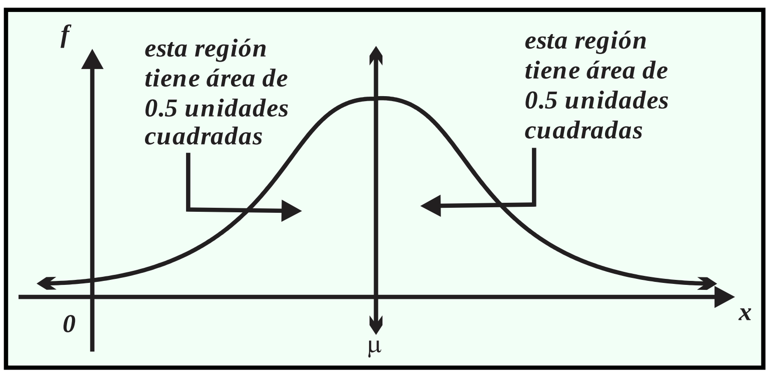


FIGURA 12

La caracterización completa de la distribución normal requiere la construcción de su FPA, determinar su valor esperado y su varianza, sin embargo, para ello se utilizan técnicas matemáticas de nivel superior, por tanto, que simplemente las enunciaremos.

DEFINICIÓN 4 (FUNCIÓN DE PROBABILIDAD ACUMULADA)

Si $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, entonces la función de probabilidad acumulada se define como

$$\Phi(x) = p(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}, \text{ si: } -\infty < X < +\infty,\ -\infty < \mu < +\infty \text{ y } \sigma > 0.$$

La *figura 13* muestra el área o probabilidad asociada a la FPA

$$\Phi(x)=p(X\leq x)=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^{2}}.$$

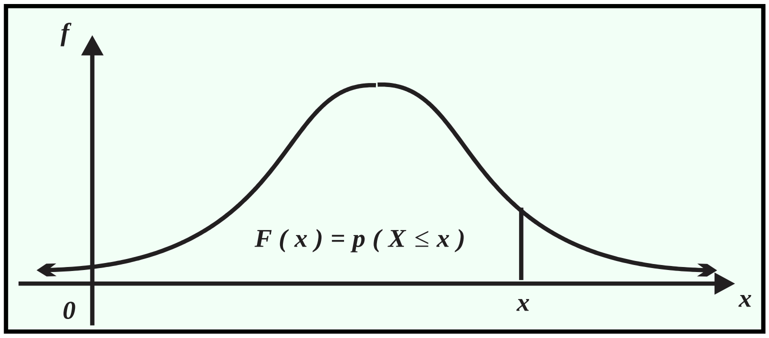


FIGURA 13

Nota

El símbolo Φ corresponde a la letra griega phi y lo utilizaremos para referirnos a la función de distribución acumulada normal.

En la *figura 13*, al desplazar continuamente x a la derecha el área (o probabilidad acumulada) aumenta y se aproxima a 1, por tanto, el gráfico de

$\Phi(x)=p(X\leq x)=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^{2}}$ toma la forma de la *figura 14*.

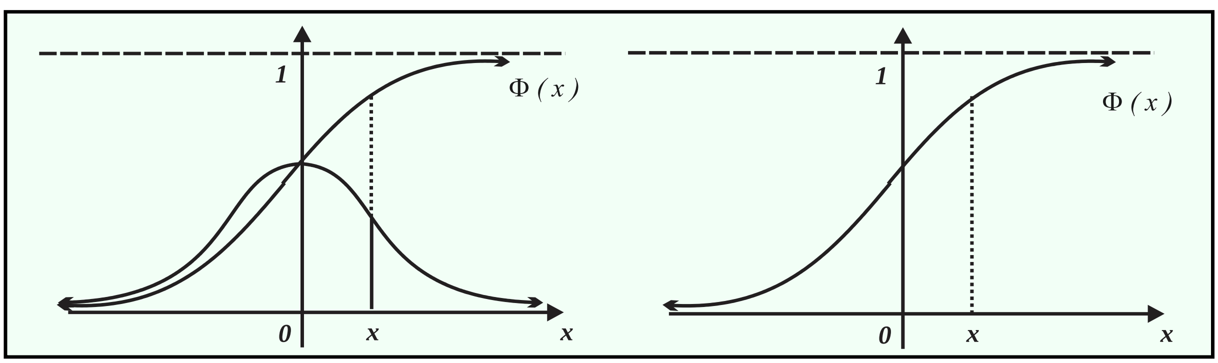


FIGURA 14

La *proposición 4* incluye los parámetros de la variable $X\sim N\left(\mu,\ \sigma^{2}\right)$.

PROPOSICIÓN 4 (VALOR ESPERADO Y VARIANZA DE LA VARIABLE ALEATORIA NORMAL)

Si $X\sim N\left(\mu\ ,\ \sigma^{2}\right)$, entonces

a. $E[X]=\mu$.

b. $V[X]=\sigma^{2}$ y $DE[X]=+\sigma$.

Nota

En lo subsecuente nos referiremos al valor esperado de la distribución normal como “media”.

¿CÓMO SE CALCULAN LAS PROBABILIDADES DE LA DISTRIBUCIÓN NORMAL?

La distribución normal es la de mayor importancia en la probabilidad y la estadística, por consiguiente, debemos detallar su comportamiento con el fin de facilitar el cálculo de probabilidades.

Sea

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$, si $\mu = 0$ obtenemos $$f_1(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\sigma}\right)^2}$$

y la curva asociada a esta última función se obtiene por medio de un desplazamiento horizontal de la gaussiana asociada a

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2},$$

de manera que la línea recta de ecuación $x = \mu$ coincida con el eje de las ordenadas, vea las *figuras 15 y 16*.

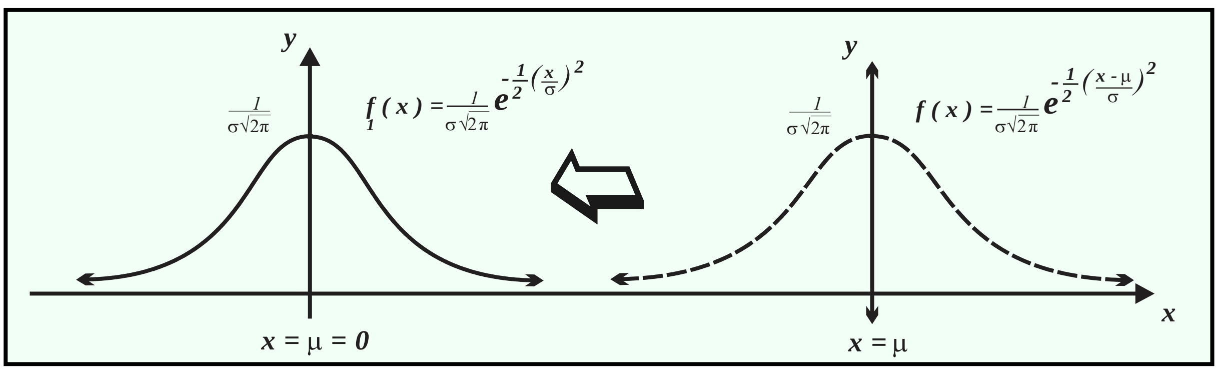


FIGURA 15

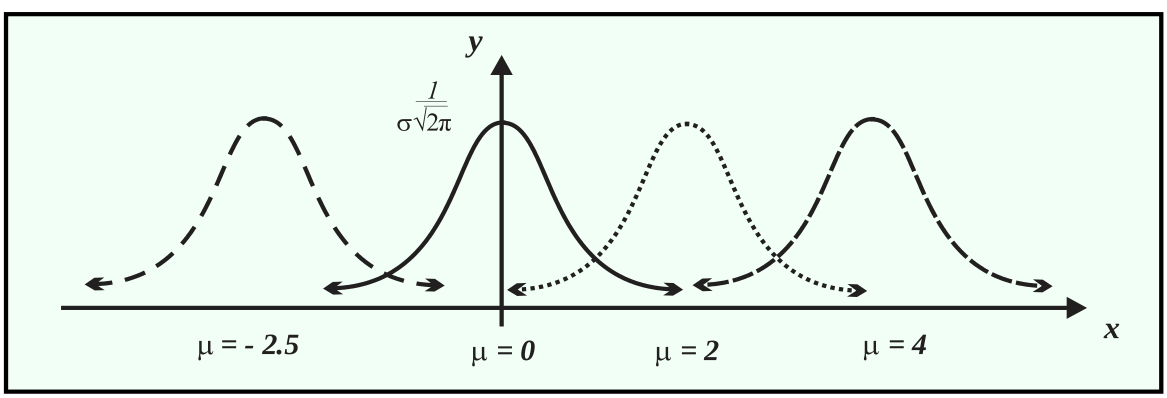


FIGURA 16

ii. El valor máximo de la función $f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$ es el número $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$ y lo alcanza si $x=\mu$. Si se incrementa σ disminuye el número $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$, este hecho se refleja en un "aplanamiento" de la curva gaussiana asociada a $f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$.

En la *figura 17*, σ_2 es menor que σ_1 y σ_1 es menor que σ_3.

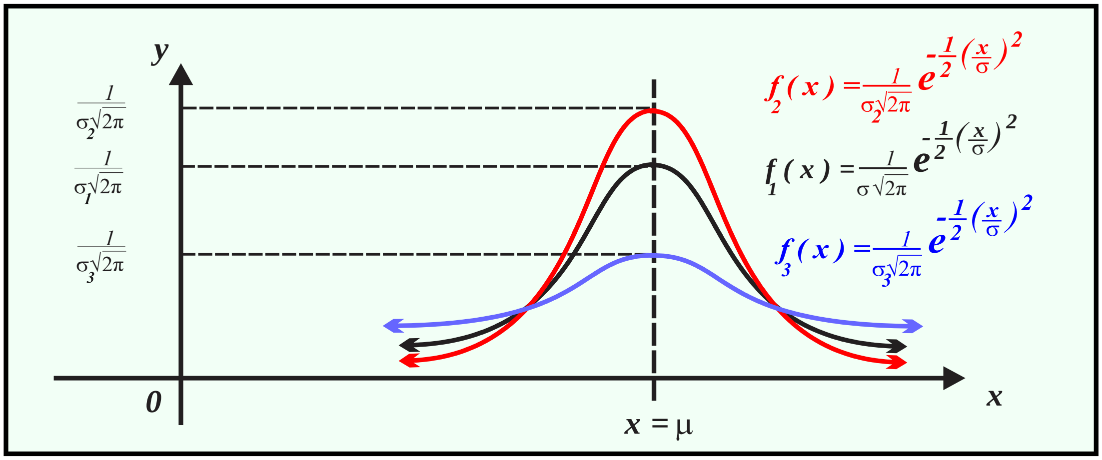


FIGURA 17

Todas las curvas gaussianas, junto con el eje de las abscisas, determinan regiones cuya área (o probabilidad) igual a la unidad, sin embargo, el cálculo de áreas de secciones como las mostradas en la *figura 18* resulta prácticamente imposible utilizando "métodos geométricos" y su cálculo requiere de elementos de otras ramas de la matemática (por ejemplo, cálculo diferencial o métodos numéricos). Por esta razón el cálculo de probabilidades de distribuciones normales se realiza utilizan las "tablas de probabilidades normales estandarizadas" (construidas previamente) o alguna aplicación computacional, sin embargo, en ambos casos es necesario "convertir" la distribución normal de parámetros μ y σ^2 en la distribución normal de parámetros

$$\mu=0,\ \sigma^2=1 \text{ y } fdp\ \ f(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}z^2}.$$

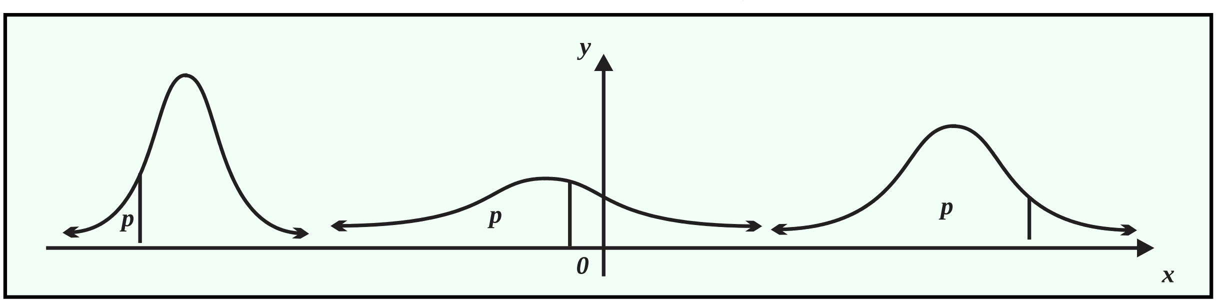


FIGURA 18

DEFINICIÓN 5 (VARIABLE ALEATORIA Y DISTRIBUCIÓN NORMAL ESTÁNDAR)

Si $X \sim N\left(\mu \ , \ \sigma^2 \right)$, entonces

a. La variable $Z = \dfrac{X - \mu}{\sigma}$ se denomina "variable aleatoria normal estándar".

b. El proceso de conversión de $X \sim N\left(\mu \ , \ \sigma^2 \right)$ a $Z \sim N\left(0 \ , \ 1^2 \right)$ se llama "normalización" o "estandarización".

c. Si $Z \sim N\left(0 \ , \ 1^2 \right)$, entonces $f\left(z \right) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2}$.

Si aplicamos la transformación $Z = \dfrac{X - \mu}{\sigma}$ a cualquier fdp de una variable aleatoria normal obtenemos

$$f\left(z \right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} ,$$

vea la *figura 19*, por tanto, el cálculo de probabilidades la VAC

$$X \sim N\left(\mu \ , \ \sigma^2 \right)$$

puede tratarse como un problema de evaluación de probabilidades de la variable aleatoria normal cero uno (parámetros)

$$E\left[X \right] = 0 \text{ y } \sigma^2 = 1 .$$

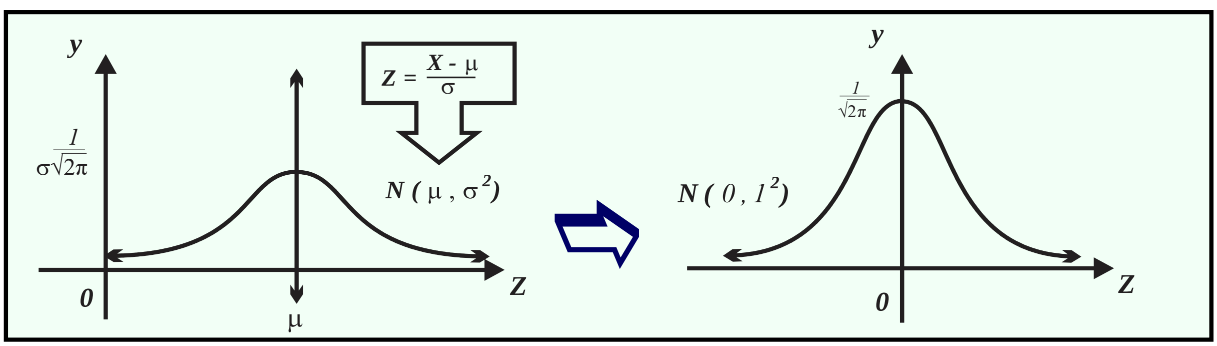


FIGURA 19

DEFINICIÓN 6 (FUNCIÓN DE PROBABILIDAD ACUMULADA NORMAL ESTÁNDAR)

Si $Z \sim N\left(0 \ , \ 1^2 \right)$, entonces la FPA correspondiente es $\Phi\left(z \right) = p\left(Z \le z \right) = \int_{-\infty}^{z} \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2}$,

para todo número real z .

La interpretación geométrica de la *definición* anterior se muestra en la *figura 20*.

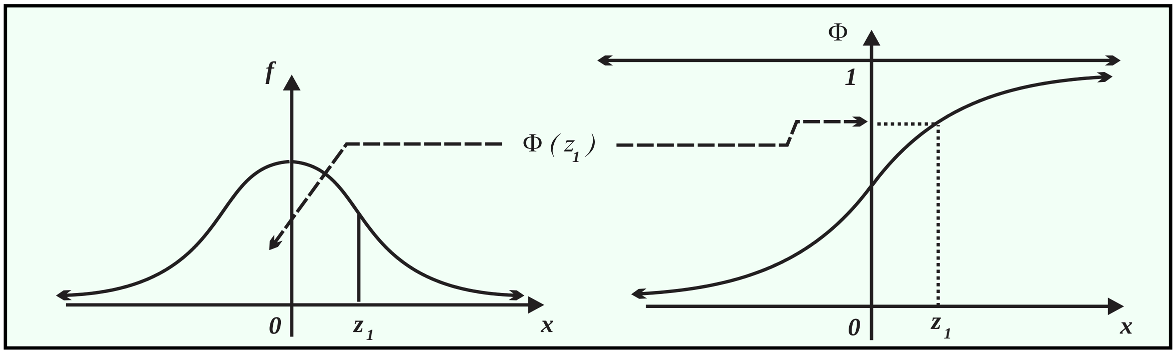


FIGURA 20

La *proposición 5* incluye otras propiedades de la variable aleatoria $Z \sim N\left(0\ ,\ 1^2\right)$.

PROPOSICIÓN 5 (PROPIEDADES DE $Z \sim N\left(0\ ,1^2\right)$)
Si $Z \sim N\left(0\ ,1^2\right)$ y $\Phi\left(z_1\right) = p\left(Z < z_1\right)$, entonces
a. $p\left(Z > z_1\right) = \Phi\left(-z_1\right)$ y $p\left(Z > -z_1\right) = \Phi\left(z_1\right)$.
b. $p\left(a < Z < b\right) = \Phi\left(b\right) - \Phi\left(a\right)$.
c. $p\left(-a < Z < a\right) = D\left(a\right)$.

La *figura 21* ilustra la *proposición 5*.

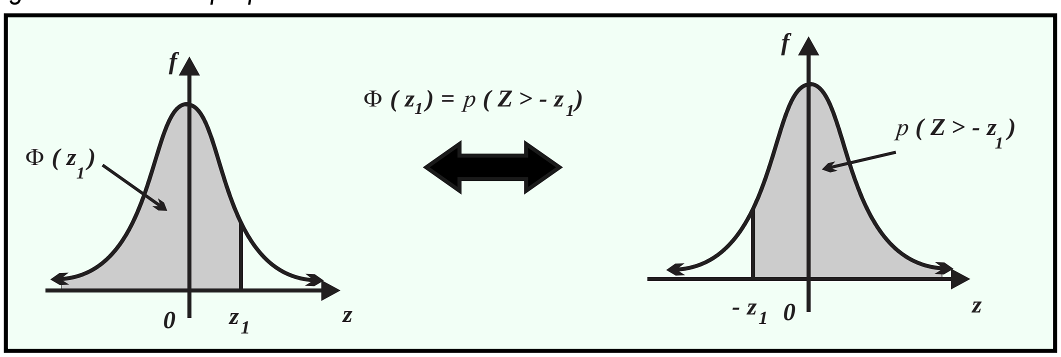


FIGURA 21.a.

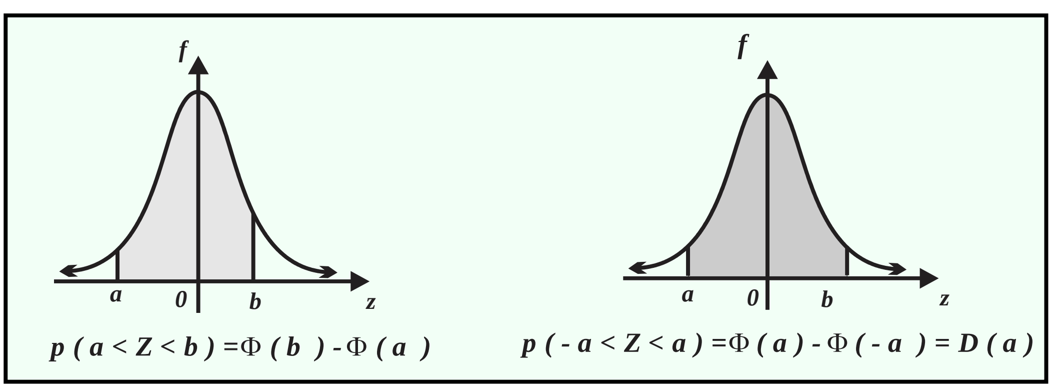


FIGURA 21.b.

CÁLCULO DE PROBABILIDADES NORMALES CERO–UNO, UTILIZANDO TABLAS

Las tablas $A.2$ del *apéndice* $A.1$ están encabezadas por una fila como la mostrada a continuación:

z	$\Phi(-z)$	$\Phi(z)$	$D(z)$

i. La primera columna contiene las asignaciones a la variable aleatoria Z.
ii. La segunda columna proporciona la probabilidad acumulada $\Phi(-z)=p(Z\leq -z)$, para asignaciones negativas z.
iii. La tercera columna contiene la probabilidad acumulada $\Phi(z)=p(Z\leq z)$, para asignaciones positivas a z.
iv. La cuarta columna contiene la probabilidad $D(z)=p(-z\leq Z\leq z)$ que corresponde a dos números simétricos $-z$ y z.

EJEMPLO 12 (USO DE TABLAS DE PROBABILIDAD NORMAL)
(Este proceso se facilita utilizando una APP ya sea para PC o para celular, revisa el *ejemplo 12 bis y 12 tris* de las páginas 87 a 92).
Supongamos que $Z\sim N(0\ ,\ 1^2)$.
a. Para determinar $p(Z\leq 1.20)$, notemos que $p(Z\leq 1.20)=\Phi(1.20)$, en las tablas $A.2$ del *apéndice 1* observamos

z	$\Phi(-z)$	$\Phi(z)$	$D(z)$
1.20	0.1151	0.8849	0.7699

entonces $p(Z\leq 1.20)=0.8849$.
b. Para calcular $p(Z\leq -1.60)$, notemos que $p(Z\leq -1.60)=\Phi(-1.60)$, en las tablas $A.2$ del *apéndice 1* observamos

z	$\Phi(-z)$	$\Phi(z)$	$D(z)$
1.60	0.0548	0.9452	0.8904

por tanto,

$$p(Z\leq -1.60)=\Phi(-1.60)=0.0548.$$

c. Para calcular $p(0\leq Z\leq 1.20)$, escribimos $p(0\leq Z\leq 1.20)=\Phi(1.20)-\Phi(0)$, en las tablas $A.2$ del *apéndice 1* observamos

z	$\Phi(-z)$	$\Phi(z)$	$D(z)$
1.20	0.1151	0.8849	0.7699

z	$\Phi(-Z)$	$\Phi(z)$	$D(z)$
0	0.5000	0.5000	0.0000

por tanto,

$$p(0\leq Z\leq 1.20)=\Phi(1.20)-\Phi(0)=0{,}8849-0.5000=0.3849.$$

d. Para calcular $p(-0.90 \le Z \le 0)$, primero escribimos $p(-0.90 \le Z \le 0) = \Phi(0) - \Phi(-0.90)$, en las tablas $A.2$ del *apéndice 1* observamos

z	$\Phi(-z)$	$\Phi(z)$	$D(z)$
-0.90	0.1841	0.8159	0.6319

z	$\Phi(-Z)$	$\Phi(z)$	$D(z)$
0	0.5000	0.5000	0.0000

entonces

$$p(-0.90 \le Z \le 0) = \Phi(0) - \Phi(-0.90) = 0.5000 - 0.1841 = 0.3159 .$$

e. Puesto que $p(0.30 \le Z \le 1.56) = \Phi(1.56) - \Phi(0.3)$; las tablas $A.2$ del *apéndice 1* muestran

z	$\Phi(-z)$	$\Phi(z)$	$D(z)$
0.30	0.3821	0.6179	0.2358

z	$\Phi(-Z)$	$\Phi(z)$	$D(z)$
1.56	0.0594	0.9406	0.8812

luego

$$p(0.30 \le Z \le 1.56) = \Phi(1.56) - \Phi(0.3) = 0.9406 - 0.6179 = 0.3227 .$$

f. Puesto que $p(-0.20 \le Z \le 0.20) = D(0.20)$; las tablas $A.2$ del *apéndice 1* muestran

z	$\Phi(-z)$	$\Phi(z)$	$D(z)$
0.20	0.4207	0.5793	0.1585

entonces

$$p(-0.20 \le Z \le 0.20) = D(0.20) = 0.1585 .$$

g. Si $p(Z \ge -0.20)$, por la propiedad de simetría obtenemos $p(Z \ge -0.20) = \Phi(0.20)$, en las tablas $A.2$ del *apéndice 1* se observa

z	$\Phi(-z)$	$\Phi(z)$	$D(z)$
0.20	0.4207	0.5793	0.1585

luego

$$p(Z \ge -0.20) = \Phi(0.20) = 0.5793 .$$

h. Si $p(Z \ge 2.30)$, por la propiedad de simetría obtenemos $p(Z \ge 2.30) = \Phi(-2.30) = 0.0107$; las tablas $A.2$ del *apéndice 1* muestran

z	$\Phi(-z)$	$\Phi(z)$	$D(z)$
-2.30	0.0107	0.9893	0.9786

entonces

$$p(Z \ge 2.30) = 0.0107 .$$

En la resolución de problemas relacionados con la distribución normal, en ocasiones, se conoce la probabilidad, pero no así el valor de la variable aleatoria que le corresponde.

DEFINICIÓN 7 (CUANTILES)

Si $Z \sim N\left(0\ ,\ 1^2\right)$, entonces

El número $Z = z_0$ tal que $p(Z \leq z_0) = \Phi(z_0) = p_0$ se denomina "cuantil del $100\% p_0$".

La *figura 22* ilustra los conceptos antes definidos.

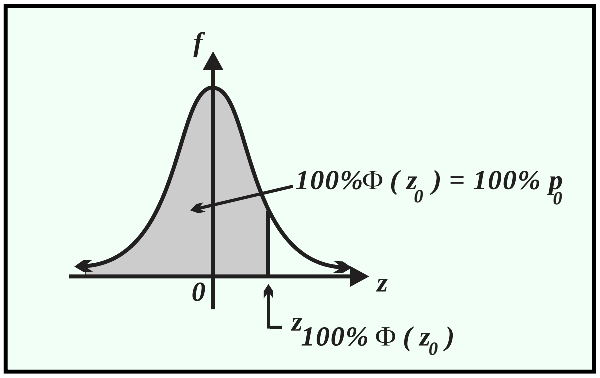


FIGURA 22

En las tablas del apéndice A se incluyen los cuantiles asociados a la distribución normal estandarizada y el *ejemplo 13* muestra la forma en que se calculan.

EJEMPLO 13 (CÁLCULO DE CUANTILES AL 100% DE LA NORMAL)

(Este proceso se facilita utilizando una APP ya sea para PC o para celular, revisa el ejemplo 13 BIS de las páginas 90 y 91).

a. Si $p\left(Z \leq z_0\right) = 0.30$, entonces el número z_0 se llama cuantil 30% y se representa por z_{30}, además tiene signo negativo (el área o probabilidad se mide desde $-\infty$ hasta z_{30}), en las tablas del apéndice $A.2$ observamos

$p_{\%}$	$Z(\Phi)$	$Z(D)$
30.0	−0.524	0.385

entonces

$$z_{30} = -0.524 .$$

b. Si $p\left(Z \leq z_0\right) = 0.875$, entonces el cuantil 87.5% , que se representa por $z_{87.5}$ tiene signo positivo (deja a su izquierda un área o probabilidad de 0.875 o 87.5%), en las tablas del apéndice $A.2$ observamos:

%	$Z(\Phi)$	$Z(D)$
87.5	1.1503	1.534

entonces

$$z_{87.5} = 1.1503 .$$

EJEMPLO 14 (CÁLCULO DE CUANTILES z_0)

(Este proceso se facilita utilizando una APP ya sea para PC o para celular, revisa el ejemplo 14 bis de las páginas 92 y 93).

a. Si $p\left(Z \geq z_0\right) = 0.525$, entonces la probabilidad acumulada hasta el número z_0 es $p\left(Z < z_0\right) = 0.475$, las tablas del apéndice $A.2$ muestran:

%	$Z(\Phi)$	$Z(D)$
47.5	0.063	0.714

por consiguiente $z_0 = -0.063$.

b. Si $p\left(Z \geq z_0\right) = 0.11$, entonces la probabilidad acumulada hasta el número z_0 es $p\left(Z < z_0\right) = 0.89$, las tablas del apéndice $A.2$ muestran

%	$Z(\Phi)$	$Z(D)$
89	1.227	0.138

por consiguiente $z_0 = -1.227$.

c. Si $p\left(-z_0 \leq Z \leq z_0\right) = 0.45$, entonces $Z(D) = p\left(-z_0 \leq Z \leq z_0\right) = 0.45$, en las tablas del apéndice $A.2$ observamos:

%	$Z(\Phi)$	$Z(D)$
45	-0.126	0.598

por tanto, $z_0 = \pm 0.598$.

d. Si $p\left(-z_0 \leq Z \leq z_0\right) = 0.90$, entonces $Z(D) = p\left(-z_0 \leq Z \leq z_0\right) = 0.90$, en las tablas del apéndice $A.2$ observamos:

%	$Z(\Phi)$	$Z(D)$
90	1.281	1.645

en consecuencia $z_0 = \pm 1.645$.

EJEMPLO 15 (ANCHO DE LAS PUERTAS)

El ancho de las puertas de las crujías de cierto reclusorio se distribuye normalmente con una longitud media de 100 centímetros y desviación estándar de 4 centímetros.

Sea la VAC $X =$ “ancho de las puertas de las crujías del reclusorio”.

a. En la restructuración de las crujías, las puertas serán medidas y aquellas que tengan anchos comprendidas entre los 90 y los 105 centímetros serán reemplazadas. Para determinar la fracción de puertas que deben ser reemplazadas consideremos:

$X \sim N\left(100\,,\,4^2\right)$, entonces

$$p\left(90 \le X \le 105\right) = p\left(\frac{90-100}{4} < Z < \frac{105-100}{4}\right) = p\left(-2.5 < Z < 1.25\right),$$

$$= \Phi\left(1.25\right) - \Phi\left(-2.5\right) = 0.8944 - 0.0062 = 0.8882\ ,$$

es decir, el 88.82% de las puertas serán reemplazadas.

b. Las puertas con un ancho menor a los 102 centímetros serán enviadas a reparación, entonces la probabilidad de que una puerta sea enviada a reparación es

$$p\left(X \le 102\right) = p\left(Z < \frac{102-100}{4}\right) = p\left(Z < 0.5\right) = 0.6915\,.$$

por tanto, el 30.85% de las puertas serán enviadas a reparación.

EJEMPLO 16 (PESO DE LAS PIÑAS)

El peso de las piñas hawaianas que expende *"Súper frutas"*, se distribuyen normalmente, con un valor promedio de 2.4 kilogramos y desviación estándar de 0.8 kilogramos.

Sea la $VAC\quad X =$"peso de las piñas hawaianas", entonces $X \sim N\left(2.4,\ 0.8^2\right)$.

a. Si los clientes adquieren primero las piñas hawaianas con peso superior a los 3.0 kilogramos, entonces la fracción de las piñas que serán seleccionadas inicialmente se calcula como sigue,

$$p\left(X > 3\right) = p\left(Z > \frac{3-2.4}{0.8}\right) = p\left(Z > 0.75\right) = \Phi\left(-0.75\right) = 0.2266\ .$$

Por tanto, el 22.66% de las piñas hawaianas tiene un peso superior a 3.0 kilogramos.

b. Si se ponen en oferta las piñas hawaianas de peso inferior a los 1.9 kilogramos, entonces el porcentaje de piñas que será puesto en oferta se calcula como sigue:

$$p\left(0 < X \le 1.9\right) = p\left(\frac{0-2.4}{0.8} < Z \le \frac{1.9-2.4}{0.8}\right) = p\left(-3 < Z \le -0.625\right)$$

$= \Phi\left(-0.625\right) - \Phi\left(-3\right) = 0.2660 - 0.0013 = 0.2647$, el 26.47% .

EJEMPLO 17 (GASTO EN TRANSPORTE)

El gasto semanal de Ramón, en transporte, se distribuye normalmente con media $\$400$ y desviación estándar de $\$20$, es decir, $X =$"gasto semanal de Ramón en transporte" y

$$X \sim N\left(400, 20^2\right).$$

a. La probabilidad de que Ramón gaste más de $\$450$ en transporte la próxima semana es

$$p\left(X > 450\right) = p\left(Z > \frac{450-400}{20}\right) = p\left(Z > 2.5\right) = \Phi\left(-2.5\right) = 0.0062\ .$$

b. La probabilidad de que Ramón gaste menos de $\$440$ en transporte la próxima semana es

$$p\left(0 < X < 440\right) = p\left(\frac{0-400}{20} < Z < \frac{440-400}{20}\right) = p\left(-20 < Z < 2\right) = \Phi\left(2\right) = 0.9772\,.$$

c. El gasto semanal x_0 que se rebasa con una probabilidad de 0.10 se calcula de la siguiente forma, de $p\left(X > x_0\right) = p\left(Z > \frac{x_0 - 400}{20}\right) = 0.10$,

obtenemos $z_{10} = 1.2816$, luego

$$\frac{x_0 - 400}{20} = 1.2816,$$

el gasto semanal es

$$x_0 = 425.632 \text{ pesos.}$$

EJEMPLO 18 (SELECCIÓN DE EMPLEADOS)

Para seleccionar a sus futuros empleados, el jefe de personal de *El Pingüino S.A.* utiliza una prueba cuya puntuación promedio es μ y desviación estándar $\sigma = 10$. Suponga que la distribución de las puntuaciones es normal y que una puntuación mínima de 65 le permite al solicitante seguir siendo considerado.

Sea la VAC $X =$"puntuación obtenida por los aspirantes", entonces $X \sim N\left(\mu,\ 10^2\right)$.

a. Para calcular el valor de μ sabiendo que $p\left(X > 65\right) = 0.025$. Si estandarizamos obtenemos

$$p\left(X > 65\right) = p\left(Z > \frac{65 - \mu}{10}\right) = 0.025,$$

En la tabla de percentiles normales se observa $z_{2.5} = 1.96$, entonces

$$\frac{65 - \mu}{10} = 1.96, \text{ por tanto, } \mu = 65 - 19.6 = 45.4.$$

b. Para calcular el valor de μ, de manera que el 5% de los solicitantes sigan siendo considerados después de la prueba debemos determinar el valor de μ bajo la condición $p\left(X > 65\right) = 0.05$, al estandarizar obtenemos

$$p\left(X > 65\right) = p\left(Z > \frac{65 - \mu}{10}\right) = 0.05,$$

en las de percentiles normales se observa $z_0 = 1.645$, por tanto,

$$\frac{65 - \mu}{10} = 1.645, \text{ luego } \mu = 65 - 16.449 = 48.55.$$

EJEMPLO 19 (ENVASANDO CEREALES)

El Ingeniero Sánchez diseñó una máquina envasadora de cereales, en su instructivo de características indica que deposita la cantidad de cereal deseada con una desviación estándar de σ gramos. Suponga que la cantidad de cereal vertida se distribuye normalmente.

Sea la VA $X =$"peso del cereal vertido en los sacos".

a. Para determinar el valor de σ, cuando los sacos contienen la leyenda *contenido neto* 20 *kilogramos*, y el 5% de los sacos contiene más de 20.5 kilogramos de cereal:

$X \sim N\left(20 , \ \sigma^2 \right)$, entonces $p\left(X > 20.5 \right) = p\left(Z > \dfrac{20.5-20}{\sigma} \right) = 0.05$, el número z_0 que deja un área de $z_0 = 0.05$ unidades, de acuerdo con las tablas de percentiles normales, es 1.6449, entonces

$$\frac{20.5-20}{\sigma} = 1.6449 \text{, de aquí } \sigma = 0.304 .$$

b. $X \sim N\left(50 , \ \sigma^2 \right)$, entonces $p\left(X > 50.1 \right) = p\left(Z > \dfrac{50.1-50}{\sigma} \right) = 0.02$, el número z_0 que deja un área de 0.02 unidades a su derecha es: $z_0 = 2.0537$, así

$$\frac{50.1-50}{\sigma} = 2.0537 \text{, de donde } \sigma = 0.0487 .$$

EJEMPLO 20

Sea la VAC tal que $Z \sim N\left(0 , \ \sigma^2 \right)$

a. Para determinar la proporción de asignaciones a X que difieren de la media en menos de una desviación estándar, es decir, $p\left(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma \right)$, al estandarizar y simplificar obtenemos

$$p\left(\mu-\sigma < X < \mu+\sigma \right) = p\left(\frac{\mu-\sigma-\mu}{\sigma} < \frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{\mu+\sigma-\mu}{\sigma} \right)$$

$$= p\left(\frac{-\sigma}{\sigma} < \frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{\sigma}{\sigma} \right) = p\left(-1 < Z < 1 \right).$$

Las tablas de la distribución normal dan

$$p\left(-1 < Z < 1 \right) = 0.8413 .$$

b. Para determinar la proporción de asignaciones a X que difieren de la media en menos de dos desviaciones estándar, es decir, $p\left(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma \right)$, al estandarizar y simplificar obtenemos

$$p\left(\mu-2\sigma < X < \mu+2\sigma \right) = p\left(\frac{\mu-2\sigma-\mu}{\sigma} < \frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{\mu+2\sigma-\mu}{\sigma} \right)$$

$$= p\left(\frac{-2\sigma}{\sigma} < \frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{2\sigma}{\sigma} \right) = p\left(-2 < Z < 2 \right).$$

De las tablas de la distribución normal

$$p\left(-2 < Z < 2 \right) = 0.9545 .$$

c. Para determinar la proporción de asignaciones a X que difieren de la media en menos de tres desviaciones estándar, es decir, $p\left(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma \right)$, al estandarizar y simplificar obtenemos

$$p\left(\mu-3\sigma < X < \mu+3\sigma \right) = p\left(\frac{\mu-2\sigma-\mu}{\sigma} < \frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{\mu+3\sigma-\mu}{\sigma} \right) = p\left(\frac{-3\sigma}{\sigma} < \frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{3\sigma}{\sigma} \right).$$

Las tablas de la distribución normal dan

$$p\left(-3 < Z < 3 \right) = 09773 .$$

1.2 PROBLEMAS PROPUESTOS

DISTRIBUCIÓN BINOMIAL

1. Si $X \sim b(x, 15, 0.25)$, calcula las probabilidades binomiales.

a. $b(3, 15, 0.25)$.
b. $b(5, 15, 0.25)$.
c. $p(X \leq 6)$.
d. $p(X < 8)$.
e. $p(2 < X \leq 9)$.
f. $p(2 \leq X < 9)$.
g. $p(X \geq 10)$.
h. $p(X > 9)$.

2. Suponga que $X \sim b(x, 23, 0.70)$ y calcula las probabilidades binomiales.

a. $b(3, 23, 0.70)$.
b. $b(5, 23, 0.70)$.
c. $p(X \leq 13)$.
d. $p(X < 18)$.
e. $p(5 < X \leq 10)$.
f. $p(12 \leq X < 21)$.
g. $p(X \geq 17)$.
h. $p(X > 11)$.

3. Construya la función de probabilidad y traza la grafica.

a. $b(x, 6, 0.2)$.
b. $b(x, 3, 0.4)$.
c. $B(x, 8, 0.2)$.
d. $B(x, 10, 0.4)$.

4. Construye la función de probabilidad y traza la grafica.

a. $b(x, 7, 0.2)$.
b. $b(x, 12, 0.2)$.
c. $B(x, 4, 0.2)$.
d. $B(x, 8, 0.2)$.

5. Mr. Aldo produce el 10% de las piezas, utilizadas en la elaboración de las sillas de montar, defectuosas lo que es muy elevado. El ingeniero de control de calidad ha estado verificando la producción de Mr. Aldo utilizando un muestreo continuo desde que notó la situación anormal. Calcula la probabilidad de que en una muestra de diez piezas producidas por Mr. Aldo y revisadas por el ingeniero encuentre:

a. Exactamente cinco defectuosas.
b. Cero defectuosas.
c. A lo más cinco defectuosas.
d. Cinco o más defectuosas.

6. Una moneda se ha balanceado de manera que la probabilidad de observar sol al ser lanzada es 0.6. Si la moneda se lanza nueve veces determina la probabilidad de observar:

a. Exactamente dos soles.
b. Menos de tres soles.
c. A lo más tres soles.
d. Al menos cuatro soles.
e. Un número par de soles.

7. El 95% de los discos que ofrecen los vendedores ambulantes del Eje Central de la Ciudad de México son piratas. Un inspector selecciona 10 de los discos que ofrecen los vendedores del Eje Central.

a. ¿Cuál es la probabilidad de que ninguno de los discos sea pirata?
b. ¿Cuál es la probabilidad de que todos los discos sean piratas?

8. Un examen de opción múltiple incluye 15 preguntas, cada una con cinco respuestas de las que solamente una es correcta. Supóngase que uno de los "estudiantes" que realizan el examen contesta las preguntas al azar.
a. ¿Cuál es la probabilidad de que conteste correctamente al menos 10 preguntas?
b. ¿Cuál es la probabilidad de que conteste correctamente a lo más 10 preguntas?
c. ¿Cuál es la probabilidad de que conteste correctamente menos de 10 preguntas?
d. ¿Cuál es la probabilidad de que conteste correctamente más de 10 preguntas?

9. Una vendedora tiene una probabilidad p de éxito de vender una aspiradora. Suponga que la vendedora efectúa cinco intentos para vender aspiradoras y que los resultados son independientes uno de otro.
a. ¿Cuál es la probabilidad de que las cinco operaciones sean exitosas, si $p=0.8$?
b. ¿Cuál es la probabilidad de que exactamente cuatro operaciones sean exitosas, si $p=0.6$?
c. ¿Cuál es la probabilidad de que menos de dos operaciones sean exitosas, si $p=0.3$?

10. El jefe de personal de "Sintex S. A." detectó que algunas de las personas que contrató no son lo que dicen ser. Sabe que el 35% de los antecedentes de las personas que contrató fue alterado. La semana pasada contrató a cinco nuevos empleados. ¿Cuáles son las probabilidades de que hayan sido alterados los expedientes de las personas que contrató?
a. De al menos uno.
b. De tres o más.
c. De un número.

11. La CFE, "Zona Norte" promueve el ahorro de energía eléctrica ofreciendo descuentos a consumidores que mantienen su consumo por debajo de las normas de subsidio establecidas. Estudios recientes muestran que en el 70% de los usuarios han reducido el uso de energía eléctrica y pueden disfrutar de los descuentos. Si se seleccionan cinco usuarios de la "Zona Norte", determina las probabilidades:
a. Los cinco califiquen para obtener tarifas más favorables.
b. Al menos cuatro califiquen para tarifas más favorables.

12. Un sistema de detección de humo, en lugares en que está prohibido fumar, utiliza tres celdas sensibles al humo que actúan independientemente entre sí, una o más de ellas pueden activar la alarma. Cada celda tiene una probabilidad $p=0.8$ de activar la alarma al detectar el humo. Sea $X=$ "el número de celdas que activan la alarma cuando detectan el humo". Determina:
a. La distribución de probabilidad para X.
b. La probabilidad de que la alarma funcione cuando detecte el humo.

13. Un estudio sobre los residentes de la Ciudad de Chilpancingo mostró que el 30% de ellos prefieren la carne de cerdo en lugar de la carne de iguana. Se preguntó a 10 residentes de la ciudad sobre sus preferencias en cuanto a los dos tipos de carne señalados. Determina la probabilidad de:
a. Ninguna prefiera la carne del cerdo.
b. Cuatro prefieran la carne del cerdo.
c. Al menos ocho prefieran la carne del cerdo.
d. A lo más dos prefieran la carne del cerdo.
e. La mayoría no prefiera la carne de cerdo.

14. El 20% de los estudiantes del sexto semestre del CCH han contestado *sí* a la pregunta ¿le has quemado las patas al diablo? En una muestra aleatoria de 15 estudiantes de sexto semestre, determina la probabilidad de:
a. Cuatro no hayan contestado *sí* a la pregunta.
b. Seis no hayan contestado sí.
c. Al menos seis no hayan contestado *"sí"* a la pregunta señalada?
d. Desde ocho y hasta trece inclusive, no hayan contestado "*sí*".
e. Entre ocho y trece inclusive, hayan contestado *"sí"*.

15. Supón que las condiciones para un experimento binomial son válidas y determine $E[X]$ y $V[X]$ si:
a. $n = 20$ y $p = 0.60$.
b. $n = 20$ y $p = 0.85$.
c. $n = 40$ y $p = 0.30$.

16. Con base en un largo periodo de estudio, se ha determinado que el 10% de los estudiantes inscritos en los cursos de matemáticas amenazan al profesor para que los apruebe. Si los estudiantes toman el curso en grupos de treinta, determina el valor esperado y la desviación estándar del número de estudiantes que amenazan, por grupo, al profesor para que los apruebe.

17. Sea X una variable aleatoria binomial con valor esperado 10 y varianza 5. Determina la fdp.

18. La probabilidad de que un niño de cierta familia herede la inteligencia de su padre es 0.2. Si un padre de familia tiene 5 niños. ¿Cuál es el número de niños que se espera hereden la inteligencia de su padre?

19. El 60% de los clientes de la cantina "*Las Pelotas de Villa"* piden tequila como primera bebida. Sean 25 clientes de "*Las Pelotas de Villa"*, determina la probabilidad:
a. Exactamente ocho no pidan tequila como primera bebida.
b. Seis no pidan tequila como primera bebida.
c. Más de 6 pidan tequila como primera bebida.
d. El número esperado y la varianza de que pedirán tequila como primera bebida.

20. El 40% de los tiros penales que ejecutan los seleccionados del equipo mexicano de fútbol no son gol, determina la probabilidad de que en los próximos 15 penales que efectuarán los seleccionados mexicanos de fútbol:
a. Ocho no sean gol.
b. Seis no sean gol.
c. Menos de seis no sean gol.
d. El número esperado y la varianza de los tiros penales, ejecutados por los seleccionados del equipo mexicano de fútbol, que son gol.

21. Un agricultor afirma que: en las cajas con treinta mangos, que distribuye, el 60% de ellos se encuentran deliciosos, jugosos, maduros y listos para comer. Considera una caja y determina la probabilidad:
a. Al menos dos mangos no se encuentren deliciosos, jugosos, maduros y listos para comer.
b. El número esperado de mangos que no se encuentren deliciosos, jugosos, maduros y listos para comer.

c. La varianza del número de mangos que se encuentran deliciosos, jugosos, maduros y listos para comer.
d. Al menos dos de los mangos, se encuentren deliciosos, jugosos, maduros y listos para comer.

22. "Vitro S. A." produce vasijas de cristal cortado y el gerente sabe que el 15% de ellas tienen defectos y en consecuencia deben venderse en los tianguis.
a. De seis piezas seleccionadas al azar, ¿qué tan probable es que sólo dos deban venderse en los tianguis?
b. De doce piezas seleccionadas al azar, ¿qué tan probable es que sólo dos no deban venderse en los tianguis?
c. De diez piezas seleccionadas al azar, ¿cuántas cabe esperar que no deban venderse en los tianguis?
d. De nueve piezas seleccionadas al azar, ¿cuántas cabe esperar que deban venderse en los tianguis?

23. Una avioneta dispone de cuatro lugares para un viaje. El piloto acepta un máximo de seis reservaciones por viaje, y un pasajero debe tener una reservación para poder viajar. Por registros pasados, el piloto sabe que el 20% de las personas que reservan, no se presentan al viaje. Suponiendo independencia, si se hacen seis reservaciones:
a. ¿Cuál es la probabilidad de que al menos una persona que reservó no tenga espacio para el viaje?
b. ¿Cuál es el número esperado de lugares disponibles al inicio del viaje?

24. Juan Mota sabe que la probabilidad de que germine una semilla de amapola es 0.9. Desea vender cultivos de amapola garantizando que cada uno contiene 100 plantas. Si siembra 110 semillas en cada cultivo (que se supone germinarán independientemente).
a. ¿Cuántos cultivos se espera que contenga un contenido de plantas medio?
b. ¿Cuántas semillas de amapola deben poner en cada cultivo para tener la certeza de que el cultivo tendrá 105 plantas?

25. Un sistema de protección contra robos está construido por n cámaras de vídeo que funcionan independientemente, cada una con probabilidad de 0.9 de detectar al sospechoso que ingrese en la zona de cobertura. Si $n = 5$ y un sospechoso entra en la zona.
a. ¿Cuál es la probabilidad de que exactamente cuatro cámaras detecten al sospechoso?
b. ¿Cuál es la probabilidad de que al menos una cámara detecte al sospechoso?
c. ¿Cuál debe ser el número de cámaras para que la probabilidad de detectar al sospechoso al entrar en la zona sea de 0.9990 ?

26. Si "Beto Pelotas" (habitante de la zona de la merced) *"gorrea"* un promedio de 25 cigarrillos diarios, con una desviación estándar de $\sqrt{6}$, determina la fdp binomial correspondiente.

27. Si $X \sim N\left(0\ ,\ 1^2\right)$ determine:
a. $p\left(Z < -2.78\right)$.
b. $p\left(Z < 2.78\right)$.
c. $p\left(-0.87 < Z < 0.87\right)$.
d. $p\left(-0.34 < Z < 0.62\right)$.

e. $p(-2.12 < Z < 0.37)$.
f. $p(Z > 0.85)$.
g. $p(Z > -0.65)$.
h. $p(-0.34 < Z < 0.34)$.
i. $p(-0.62 < Z < 0.62)$.

28. Si $X \sim N(200,\ 20^2)$, determina:
a. $p(185 < X < 210)$.
b. $p(215 < X < 250)$.
c. $p(X > 240)$.
d. $p(X > 178)$.
e. $p(X > -181)$.
f. $p(-176 < X < 176)$.

29. Si $X \sim N(300,\ 10^2)$, obtén:
a. $p(315 < X < 410)$.
b. $p(325 < X < 3600)$.
c. $p(X > 340)$.
d. $p(X > 278)$.
e. $p(X > -225)$.
f. $p(-325 < X < 4312)$.

30. Sea $X \sim N(0,\ 1^2)$, determina z_0.
a. $p(Z < z_0) = 0.035$.
b. $p(Z < z_0) = 0.98$.
c. $p(Z > z_0) = 0.215$.
d. $p(X > z_0) = 0.63$.
e. $p(-z_0 < Z < z_0) = 0.775$.
f. $p(-z_0 < Z < z_0) = 0.18$.
g. $p(X < z_0) = 0.001$.
h. $p(X < z_0) = 0.00001$.
i. $p(X < z_0) = 0.0000001$.

31. Sea $X \sim N(0,\ 1^2)$, obtén z_0.
a. $p(Z < z_0) = 0.125$.
b. $p(Z < z_0) = 0.92$.
c. $p(Z > z_0) = 0.895$.
d. $p(Z > z_0) = 0.16$.
e. $p(-z_0 < Z < z_0) = 0.35$.
f. $p(-z_0 < Z < z_0) = 0.84$.
g. $p(Z > z_0) = 0.001$.
h. $p(Z > z_0) = 0.999$.
i. $p(Z > z_0) = 0.5000$.

32. Sea $X \sim N(0,\ 1^2)$, calcula z_0.
a. $p(-2 < Z < z_0) = 0.35$.
b. $p(1 < Z < z_0) = 0.10$.
c. $p(-2.28 < Z < z_0) = 0.70$.
d. $p(z_0 < Z < 2.33) = 0.65$.
e. $p(-1.4 < Z < z_0) = 0.13$
f. $p(-2.03 < Z < z_0) = 0.3995$.

33. Sea $X \sim N(0,\ 1^2)$, calcula z_0.
a. $p(-2.2 < Z < z_0) = 0.65$.
b. $p(1.3 < Z < z_0) = 0.02$.
c. $p(z_0 < Z < 2.24) = 0.60$.
d. $p(z_0 < Z < 2.43) = 0.96$.
e. $p(z_0 < Z < 0) = 0.15$.
f. $p(0 < Z < z_0) = 0.38$.

34. Sea $X \sim N(-25,\ 10^2)$, determina x_0.
a. $p(X < x_0) = 0.125$.
b. $p(X < x_0) = 0.635$.
c. $p(X > x_0) = 0.80$.
d. $p(X > x_0) = 0.94$.

35. Sea $X \sim N\left(5,\ 2^2\right)$, determina x_0 en cada caso.
a. $p\left(X < x_0\right) = 0.22$.
b. $p\left(X < x_0\right) = 0.39$.
c. $p\left(X > x_0\right) = 0.96$.
d. $p\left(X > x_0\right) = 0.62$.

36. Cierta clase de lagartijas viven en promedio 40 meses. Si sus tiempos de vida se distribuyen normalmente y tienen una desviación estándar de 6.3 meses, determina la probabilidad de que una lagartija viva:
a. Más de 32 meses.
b. Menos de 28 meses.
c. Entre 37 y 49 meses.

37. Los *virotes* distribuidos por *“Bizcochos S. A.”* tienen una longitud promedio de 30 centímetros, una desviación estándar de 2 centímetros. Supón que las longitudes están normalmente distribuidas.
a. ¿Qué porcentaje de los virotes miden más de 31.7 centímetros de longitud?
b. ¿Qué porcentaje de los virotes miden entre 29.5 y 33.5 centímetros de longitud?
c. ¿Qué porcentaje de los virotes miden menos de 25.5 centímetros?

38. Los *virotes* distribuidos por “Bizcochos S. A.” tienen un grosor promedio de 8 centímetros y una desviación estándar de 0.8 centímetros y están normalmente distribuidos.
a. ¿Qué porcentaje de los virotes tienen un grosor mayor a 7.7 centímetros?
b. ¿Qué porcentaje de los virotes tienen un grosor entre 0.72 y 8.04 centímetros?
c. ¿Qué porcentaje de los virotes tienen un grosor menor de 8.09 centímetros?

39. Las donas elaboradas por *“Donuts S. A.”* tienen un hueco cilíndrico con diámetro promedio de 2 centímetros y desviación estándar 0.2 centímetros. Si los diámetros se distribuyen normalmente.
a. ¿Qué porcentaje de las donas tienen hueco con diámetro mayor de 1.8 centímetros?
b. ¿Qué porcentaje de las donas tienen hueco con diámetro entre 1.91 y 2.24 centímetros?
c. ¿Qué porcentaje de las donas tienen hueco con diámetro menor de 1.95 centímetros?

40. Los radios internos de los balones que fabrica la *“Estrella S. A.”* se distribuyen normalmente con un valor promedio de 15 centímetros y desviación estándar de 0.03 centímetros.
a. ¿Qué proporción de ellos tienen un radio interno superior a los 15.75 centímetros?
b. ¿Cuál es la probabilidad de que un balón fabricado tenga radio interno comprendido entre 14.97 y 10.03 centímetros?
c. ¿Debajo de qué longitud de radio interno está el 15% de los balones?

41. Las estaturas de 1000 granaderos está normalmente distribuida con un valor promedio de 174.5 centímetros y desviación estándar de 6.9 centímetros. Si las alturas se registran cerrando los valores a los medios centímetros:
a. ¿Cuántos granaderos tendrán estaturas menores que 160 centímetros?
b. ¿Cuántos granaderos tendrían estaturas entre 171.5 y 182 centímetros inclusive?
c. ¿Cuántos granaderos tendrán estaturas de 175 centímetros o menos?
d. ¿Cuántos granaderos tendrán estaturas mayores que o iguales a 188 centímetros?

42. Los pesos de los perros Coker Spani*el* con un año se distribuyen normalmente, con media de 8 kilogramos y desviación estándar de 0.9 kilogramos. Si se registran las mediciones y se cierran a décimas de kilogramos, determine la proporción de perros con peso:
a. Superior a 9.5 kilogramos.
b. Menor a 8.6 kilogramos.
c. Entre 7.3 y 9.1 kilogramos inclusive.

43. La precipitación pluvial media (registrada en centésimas de milímetro) en *Valle de Bravo*, en el mes de agosto fue de 9.22 centímetros. Suponiendo una distribución normal con desviación estándar 2.83 centímetros, determine la probabilidad de que, en el próximo mes de agosto, *Valle de Bravo,* tenga una precipitación pluvial de:
a. Menos de 1.84 centímetros.
b. Más de 5 centímetros, pero menos de 7 centímetros.
c. Más de 13.8 centímetros.

44. El tiempo que tarda *Mamerto* en transportarse de su casa a su trabajo se distribuye normalmente con valor medio de 40 minutos y desviación estándar de 4 minutos.
a. ¿A qué hora debe de salir de su casa para tener una probabilidad del 95% de estar en su trabajo antes de las 8 horas?
b. ¿A qué hora debe de salir para tener una probabilidad del 99% de estar en su trabajo antes de las 8 de la mañana?

45. El tiempo de vida de las licuadoras *"Sunbeam"* se distribuye normalmente con media de cinco años y desviación estándar de un año.
a. Si el fabricante de *"Sunbeam"* sólo desea reponer 1% de las licuadoras cuya vida útil es menor al periodo promedio. ¿Qué tiempo de garantía debe ofrecer?
b. Si el fabricante de *"Sunbeam"* sólo desea reponer 5% de las licuadoras cuya vida útil es menor al periodo promedio. ¿Qué tiempo de garantía debe ofrecer?

46. *"Bremen S. A."* envasa bombones en bolsas de plástico, los pesos netos siguen una distribución normal con desviación estándar de 1.4 gramos. Si el 4% de las bolsas con bombones pesan más de 350 gramos, determina el peso promedio de las bolsas de bombones.

47. *"Bremen S. A."* envasa las gomitas en bolsas de plástico, los pesos netos siguen una distribución normal, con valor promedio de 500 gramos.
a. Si el 6% de las bolsas con gomitas pesan más de 504 gramos, calcula la desviación estándar.
b. Si el 2% de las bolsas con gomitas pesan más de 502 gramos, determina la desviación estándar.

48. Las barras de metal utilizadas en la construcción de las perreras del antirrábico *"El Perrón"*, son cortadas de forma automática por una máquina con longitud nominal de 60 centímetros. Las longitudes reales se distribuyen normalmente con valor medio de 60 centímetros y desviación estándar 0.6 centímetros.
a. ¿Qué proporción de las barras rebasan los límites de tolerancia que son de 59 a 61 centímetros?

b. ¿A qué valor debe ajustarse la desviación estándar si el 98% de las barras debe estar dentro de los límites de tolerancia?

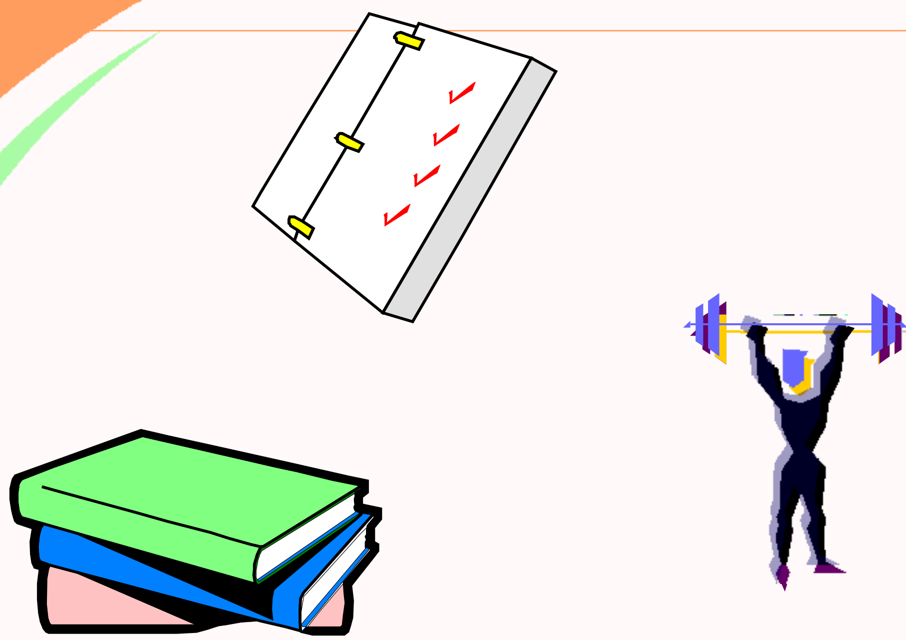
49. La distribución de los pesos de las cajas con aguacates del *Sr. Plancarte* es normal con un valor promedio de 10 kilogramos y desviación estándar 1 kilogramo. El servicio de fletes desea establecer un valor de peso p_0, a partir del qué hará un cargo de tres pesos al *Sr. Plancarte*.
a. ¿Cuál es el valor del peso p_0 de manera que el 99% de las cajas de aguacates del *Sr. Plancarte* pesen un kilogramo menos del peso con cargo extra?
b. ¿Cuál es el valor del peso p_0 de forma que el 99% de las cajas con aguacates del *Sr. Plancarte* lo excedan en un kilogramo o más?

50. La puntuación promedio de los artilleros del *Ejército Mexicano* es 500 y la desviación estándar 75. Las puntuaciones se distribuyen en forma normal.
a. ¿Qué porcentaje de artilleros tendrán puntuaciones menores a 320?
b. ¿Cuál es la puntuación mínima que tendrá el 20% de los artilleros?
c. ¿Cuál es la puntuación máxima que tendrá el 10% de los artilleros?

51. El peso de la harina contenida en las cajas de *“Trigal”* sigue una distribución normal con un valor promedio de 600 gramos. La máquina que efectúa el proceso de llenado, de las cajas de *“Trigal”*, está diseñada para que vierta entre 590 y 610 gramos harina con una probabilidad de 0.90. ¿Cuál es el valor máximo de la desviación estándar para alcanzar tal necesidad?

52. La resistencia de las cajas en las que se envasa la mantequilla “Chipilo” se distribuye normalmente. Si el 10% de las cajas tienen una resistencia que excede los 10.216 kilogramos y el 5% tiene una resistencia menor de 9.671 kilogramos. ¿Cuál es el valor promedio y cuál es la desviación estándar de la distribución de la resistencia de las cajas?

53. El peso de los mangos “paraíso” que exporta *“Frutitas S.A.”* se distribuye normalmente. Si el 40% de los mangos “paraíso” tiene un peso que excede los 250 gramos y 5% tiene un peso menor a 200 gramos, ¿cuál es el valor promedio y cuál es la desviación estándar de los pesos de los mangos “paraíso”?



1.3 RESUMEN Y AUTOEVALUACIÓN

ACTIVIDADES

SECCIÓN 1.1

ACTIVIDAD 1

Observe el último dígito de 20 placas de automóviles que se encuentran en el estacionamiento del plantel en que estudia.
Sea la variable aleatoria $X =$”dígito en que termina el número de la placa”.

a. Construya la distribución de probabilidad de X .

b. Trace la gráfica de la fdp de X .

c. Determine la FDA y trace su gráfica.

d. Calcule $E[X]$ y $V[X]$ e interprételas.

ACTIVIDAD 2

Un juego que consiste en lanzar 200 veces un dado y observar el número de la cara que queda hacia arriba.

a. Construya la distribución de probabilidades para X .

b. ¿Está bien balanceado el dado? Explique.

ACTIVIDAD 3

Sea la variable aleatoria $Z =$“número de mujeres entre las próximas cuatro personas que observa”, construya la fdp correspondiente (suponga que la probabilidad de que la próxima persona que se observe sea mujer es 0.5).

ACTIVIDAD 4

Un juego consiste en lanzar dos dados y sumar los puntos que aparecen en las caras.
Si la suma de los puntos de las caras es menor que 7 se pierden 20 pesos.
Si la suma de los puntos de las caras es mayor que 7 se ganan 20 pesos.
Si la suma de los puntos de las caras es igual a 7 se pierden 5 pesos.
Defina la variable aleatoria X “ganancia”.
Calcule $E[X]$ y $V[X]$ e interprételas.

ACTIVIDAD 5

La variable aleatoria Y es uniforme discreta si su fdp es $f_Y(y_i)=\frac{1}{n}$ para $i=1, 2, 3, 4$.

a. Construya la FDA y trace su gráfica.

b. Calcule $E[X]$ y $V[X]$ e interprételas.

c. Compare $E[X]$ y $V[X]$ con $\bar{x}$ y s^2, ¿Qué similitudes identificas? ¿Qué diferencias observas?

SECCIÓN 1.2

ACTIVIDAD 1

Calcula la proporción de mujeres en el curso de Estadística.

a. Construya la distribución de probabilidades para x .

b. Calcule el valor esperado y la desviación estándar, interprételas.

ACTIVIDAD 2

Establezca la regla empírica para la distribución normal.

ACTIVIDAD 3

Verifique el teorema de Chebyshev para $K=2$, $K=3$ y $K=4$.

RESUMEN

SECCIÓN 1.1

Variable aleatoria.	Transforma un evento de s en un número real x o en un intervalo de números reales. Cuantifica un evento
Variable aleatoria discreta.	Transforma un espacio muestral S en conjunto finito (o infinito numerable) de números reales.
Variable aleatoria continua.	Asocia a los eventos de un espacio muestral S un intervalo de números reales.
Recorrido (rango) de una variable aleatoria discreta (VAD).	Todos los valores que asume.
Función de distribución de probabilidad.	Función (puede presentarse en forma tabular) que relaciona los valores asumidos por una variable aleatoria con sus probabilidades asociadas.
Propiedades de una Función de distribución de probabilidad.	No negativa. Imágenes menores a uno. Suma de imágenes igual a uno.
Función de probabilidad acumulada.	Función que proporciona la suma de las probabilidades hasta un número (inclusive) específico. $F(x_0) = p(X \leq x_0) = \sum_{x \leq x_0} f_X(x)$
Propiedades de la Función de probabilidad acumulada (caso discreto).	**a.** $0 \leq F(x_i) \leq 1$. **b.** $p(X < x_i) = F(x_{i-1})$ **c.** $p(X > x_i) = 1 - F(x_i)$. **d.** $p(X \geq x_i) = 1 - F(x_{i-1})$. **e.** $p(X = x_i) = F(x_i) - F(x_{i-1})$. **f.** $p(a < X \leq b) = F(b) - F(a)$. **g.** No negativa y no decreciente **h.** Valor mínimo cero y valor máximo 1.
Propiedades de la Función de probabilidad acumulada (caso continuo).	**a.** $0 \leq F(x) \leq 1$. **b.** $F(x_0) = p(X < x_0) = p(X \leq x_0)$ **c.** $p(X \leq x_0) = 1 - F(x_0)$. **d.** $p(X \geq x_0) = 1 - F(x_0)$. **e.** $p(X = x_0) = 0$. **f.** $p(a < X \leq b) = F(b) - F(a)$.
Valor esperado o esperanza de una VAD X.	$E[X] = x_1 \cdot f_X(x_1) + x_2 \cdot f_X(x_2) + \cdots + x_n \cdot f_X(x_n)$ $= \sum_{\forall x_i} x_i \cdot f(x_i)$
Propiedades del valor esperado de una VAD X.	**a.** $E[c] = c$. **b.** $E[cX] = c \cdot E[X]$. **c.** $E[X \pm Y] = E[X] \pm E[Y]$.

Varianza de una $VAD\ \ X$ **.**	Medida de la dispersión o variabilidad de una variable aleatoria. Se conoce también como promedio de las dispersiones cuadráticas de una variable aleatoria. $V[X]=E\left[(X-E[X])^2\right]=\sum_{\forall x_i}(x_i-E[X])^2 f_X(x_i)$.
Desviación estándar de una VAD X **.**	Raíz cuadrada positiva de la varianza $D.E[X]=+\sqrt{V[X]}$.
Propiedades de la varianza de una $VAD\ \ X$ **.**	**a.** $V[c]=c$. **b.** $V[cX]=c^2\cdot V[X]$. **c.** $V[X\pm Y]=V[X]+V[Y]$ si X , Y son variables aleatorias independientes. **d.** $V[X]=E\left[X^2\right]-E^2[X]$.

SECCIÓN 1.2

Ensayo Bernoulli.	Experimento aleatorio con espacio muestral $S=\{E,F\}$, el evento "E" se denomina éxito y el evento "F" se llama fracaso. La probabilidad de éxito se representa por $P(E)=p$ y la probabilidad de fracaso por $P(F)=1-p=q$.
Variable aleatoria binomial.	X "Número de éxitos en n ensayos independientes".
Experimento binomial.	Es una secuencia de n ensayos idénticos (n se fija antes de realizar el experimento). Los experimentos son independientes y la probabilidad de éxito es constante de un ensayo a otro.
fdp **binomial.**	Probabilidad de obtener x éxitos en n ensayos independientes si la probabilidad de un éxito es p. $b(x,n,p)=C_x^n p^x q^{n-x}$, si $X=0,\ 1,\ 2,\cdots,\ n$.
FDA **binomial.**	Probabilidad acumulada correspondiente hasta $X=0,\ 1,\ 2,\ \ldots x$ éxitos en n ensayos independientes, con probabilidad de un éxito es p. $B(x,n,p)=\sum_{k=0}^{x} C_k^n p^k q^{n-k}$.
Relación entre la FDA **binomial y la** fdp **binomial.**	$b(x,n,p)=B(x,n,p)-B(x-1,n,p)$.
Parámetros de VAD **Binomial.**	**a.** $E[X]=n\,p$. **b.** $V[X]=n\,p\,q$. **c.** $DE\ [X]=\sqrt{n\,p\,q}$.
fdp **normal.**	$f(x;\ \mu,\ \sigma)=\dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$, siempre que

$-\infty < \mu < +\infty$, $\sigma > 0$ y $-\infty < X < +\infty$.

FDA **Normal.**

$$F(x) = \Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2} dt.$$

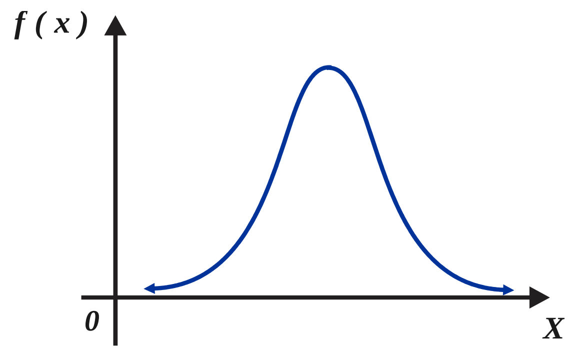
Notación

$X \sim N(\mu, \sigma^2)$.

Parámetros de la VAC **Normal.**

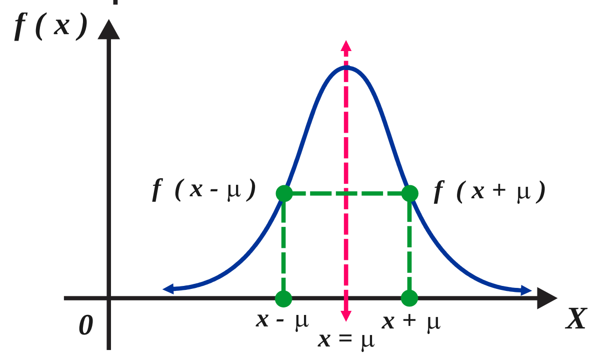
$E[X] = \mu$ y $V[X] = \sigma^2$.

Gráfico de la fdp **normal (curva Gaussiana o campana de Gauss).**



Propiedad de simetría

$f_X(\mu - x) = f_X(\mu + x)$.



Variable aleatoria normal estándar.

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}.$$

fdp **de la variable aleatoria normal estándar.**

$$f(z; 0, 1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2}.$$

Parámetros de VAC **normal estándar.**

$E[X] = \mu = 0$ y $V[X] = \sigma^2 = 1$.

Notación y lectura

$X \sim N(\mu, \sigma^2)$, "la variable aleatoria continua X se distribuye normalmente con valor medio $\mu = 1$ y varianza $\sigma^2 = 1$".

USO DE LAS TECNOLOGÍAS

CÁLCULO DE PROBABILIDADES BINOMIALES CON LA APLICACIÓN “CALCULADORAS ONLINE”

EJEMPLO 4 BIS (OBTENCIÓN DE PROBABILIDADES BINOMIALES CON APPS)

Para la $VAD \quad X =$“número de éxitos en 4 ensayos independientes”, con probabilidad de éxito $p = 0.3$. Se tiene que $n = 4$ y $p = 0.30$, entonces $q = 0.70$ y fdp

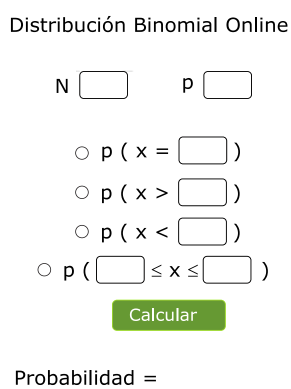
$$b(x, 4,\ 0.30) = C_x^4 (0.30)^x (0.70)^{4-x}, \text{ si } X = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4.$$

Por otra parte, la FPA es $B(x, 4, 0.30) = \sum_{k=0}^{x} C_k^4 p^k q^{4-k}$, si $X = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4$.

a. Utilizaremos la aplicación ***calculadora on-line*** con liga

https://calculadorasonline.com/distribucion-binomial-probabilidad-binomial/

que permite calcular tanto probabilidades puntuales como probabilidades acumuladas de una distribución binomial. Una vez que has ingresado al sitio antes señalado observarás en la pantalla de tu dispositivo electrónico



Para calcular la probabilidad deseada debes ingresar el número de ensayos N realizados para un evento, la probabilidad de éxito p de dicho evento, la fila que corresponda al evento deseado dar click en la pestaña calcular.

Por ejemplo:

En el cálculo de probabilidades binomiales puntuales se utiliza la opción.

◉ p (x = ☐)

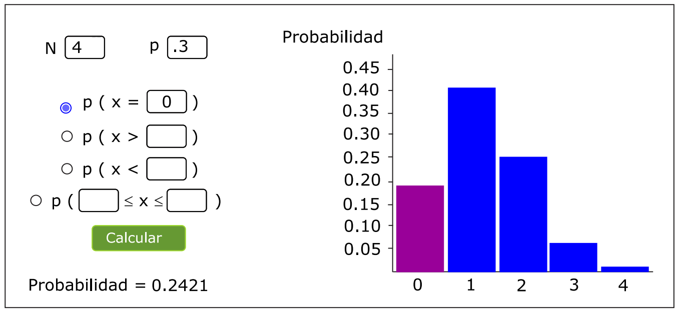
En el cálculo de probabilidades acumuladas hasta un número específico se utiliza la opción.

◉ p (0 ≤ x ≤ ☐)

i. En el cálculo de $b(0,\ 4,\ 0.30)$ utilizamos la opción

◉ p (x = 0)

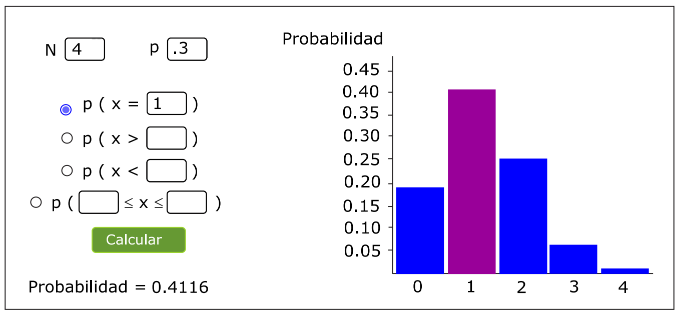
Se observa en la pantalla



ii. Para calcular $b(1,\ 4,\ 0.30)$ utilizamos la opción

◉ p (x = 1)

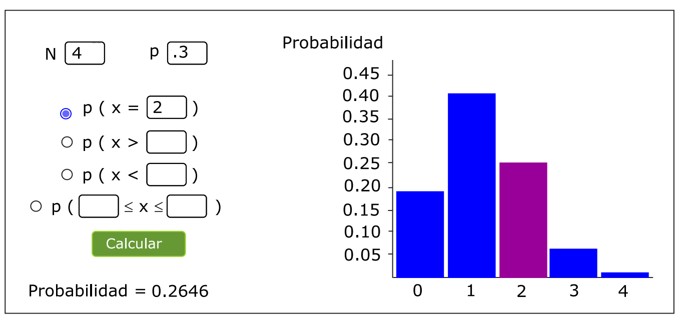
Se observa en la pantalla



iii. Para calcular $b(2,\ 4,\ 0.30)$ utilizamos la opción

◉ p (x = 2)

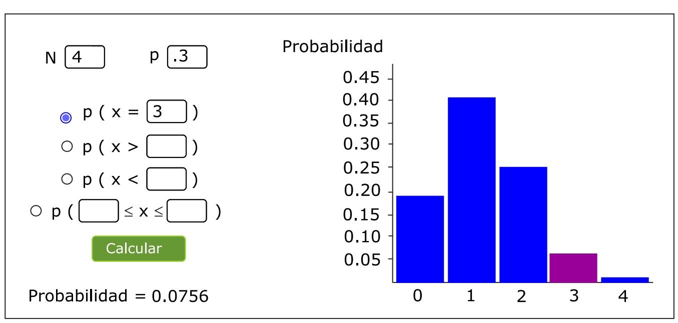
Se observa en la pantalla



iv. Para calcular $b(3,\ 4,\ 0.30)$ utilizamos la opción

◉ p (x = 3)

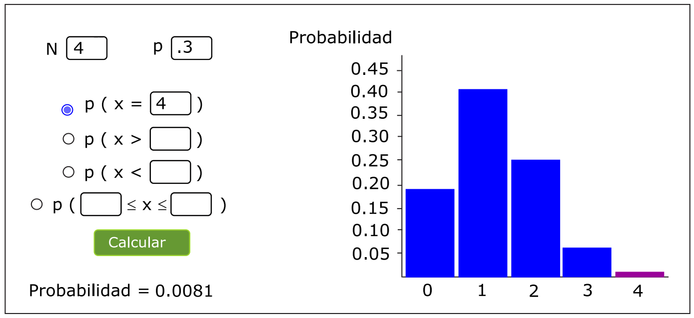
Se observa en la pantalla



v. Para calcular $b(4,\ 4,\ 0.30)$ utilizamos la opción

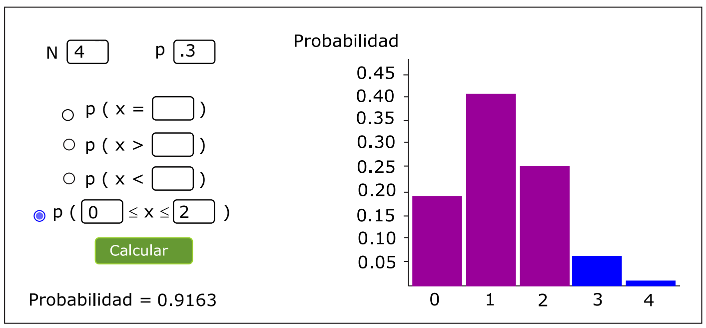
◉ p (x = 4)

Se observa en la pantalla



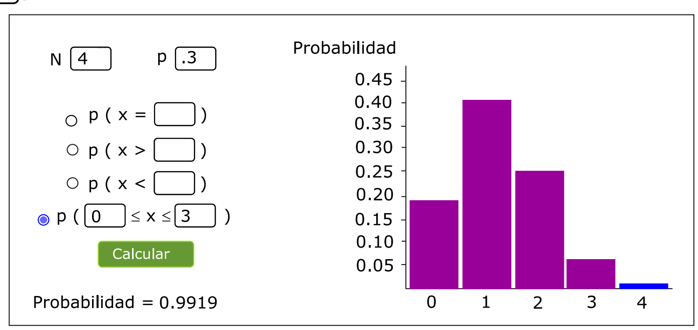
vi. En el cálculo de la probabilidad $B(2,\ 4,\ 0.30)$ utilizamos la opción

◉ p (0 ≤ x ≤ 2)



vii. Para calcular $B(3,\ 4,\ 0.30)$ utilizamos la opción

◉ p (0 ≤ x ≤ 3)



CÁLCULO DE PROBABILIDADES BINOMIALES CON LA APLICACIÓN "*MATHCRACKER*"

EJEMPLO 4 TRIS (OBTENCIÓN DE PROBABILIDADES BINOMIALES CON APP)

Utilizaremos la aplicación ***calculadora on-line*** con liga

https://mathcracker.com/es/calculadora-probabilidad-binomial

Ingresando al enlace anterior se despliega mathcracker Free Math Help   CALCULADORAS EN LÍNEA   HERRAMIENTAS GRÁFICAS   GALLETAS MATEMÁTICAS

CALCULADORA DE PROBABILIDAD BINOMIAL

Instrucciones: Utilice nuestra Calculadora de probabilidad binomial para calcular probabilidades binomiales utilizando el formulario a continuación. Escriba la proporción de población de éxito p, y el tamaño de la muestra n, y proporcione detalles sobre el evento para el que desea calcular la probabilidad (observe que los números que definen los eventos deben ser enteros):

Proporción de la población (p)=

Tamaño de muestra (n)=

○ **Two-Tailed:** $\le x \le$

○ **Left-Tailed:** $x \le$

○ **Right-Tailed:** $x \ge$

Calcular

i. Para calcular la probabilidad binomial puntual $b(2,\ 4,\ 0.30)$ completamos los campos requeridos y al digitalizar la "pestaña" calcular, observamos

Solution:

Necesitamos calcular una probabilidad de distribución binomial. Se proporciona la siguiente información

Probabilidad de éxito de la población (p)=	0.3
Tamaño de muestra (n)=	4
Evento de probabilidad =	Pr(X = 3)

Esto implica que

$$\Pr(X=2)=\binom{4}{2}0.3^2\times 0.7^{4-2}=0.2646$$

Lo que significa que la probabilidad que estamos buscando es $\Pr(X=2)=0.2646$

START OVER

ii. En el cálculo de la probabilidad binomial puntual $b(3,\ 4,\ 0.30)$ completamos los campos solicitados y oprimimos la "pestaña" calcular, obtenemos

Solution:

Necesitamos calcular una probabilidad de distribución binomial. Se proporciona la siguiente información

Probabilidad de éxito de la población (p)=	0.3
Tamaño de muestra (n)=	4
Evento de probabilidad =	Pr(X = 3)

Esto implica que

$$\Pr(X=3)=\binom{4}{3}0.3^3\times 0.7^{4-3}=0.0756$$

Lo que significa que la probabilidad que estamos buscando es $\Pr(X=3)=0.0756$

START OVER

$b(3,\ 4,\ 0.30) = 0.0756.$

iii. En la determinación de la probabilidad binomial acumulada $B(1,\ 4,\ 0.30)$ completamos los campos solicitados y al oprimir la “pestaña” calcular, observamos

Solution:

Necesitamos calcular una probabilidad de distribución binomial. Se proporciona la siguiente información

Probabilidad de éxito de la población (p)=	0.3
Tamaño de muestra (n)=	4
Evento de probabilidad =	Pr(X ≤ 1)

Por lo tanto, lo obtenemos

$$\Pr(X \le 1) = \sum_{i=0}^{1} \Pr(X = i) = \sum_{i=0}^{1} \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i}$$

Esto implica que

$$\Pr(X \le 1) = \Pr(X = 0) + \Pr(X = 1)$$

$$= \binom{4}{0} 0.3^0 \times 0.7^{4-0} + \binom{4}{1} 0.3^1 \times 0.7^{4-1}$$

$$= 0.2401 + .4116 = 0.6517$$

Lo que significa que la probabilidad que estamos buscando es $\Pr(X \le 2) = 0.6117$

START OVER

Luego $B(1,\ 4,\ 0.30) = 0.6117.$

iv. En la obtención de la probabilidad binomial acumulada $B(2,\ 4,\ 0.30)$ completamos los campos solicitados y al oprimir la “pestaña” calcular obtenemos

Solution:

Necesitamos calcular una probabilidad de distribución binomial. Se proporciona la siguiente información

Probabilidad de éxito de la población (p)=	0.3
Tamaño de muestra (n)=	4
Evento de probabilidad =	Pr(X ≤ 2)

Por lo tanto, lo obtenemos

$$\Pr(X \le 2) = \sum_{i=0}^{2} \Pr(X = i) = \sum_{i=0}^{2} \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i}$$

Esto implica que

$$\Pr(X \le 2) = \Pr(X = 0) + \Pr(X = 1) + \Pr(X = 2)$$

$$= \binom{4}{0} 0.3^0 \times 0.7^{4-0} + \binom{4}{1} 0.3^1 \times 0.7^{4-1} + \binom{4}{2} 0.3^2 \times 0.7^{4-2}$$

$$= 0.2401.4116 + 0.2646 = 0.9163$$

Lo que significa que la probabilidad que estamos buscando es $\Pr(X \le 2) = 0.9163$

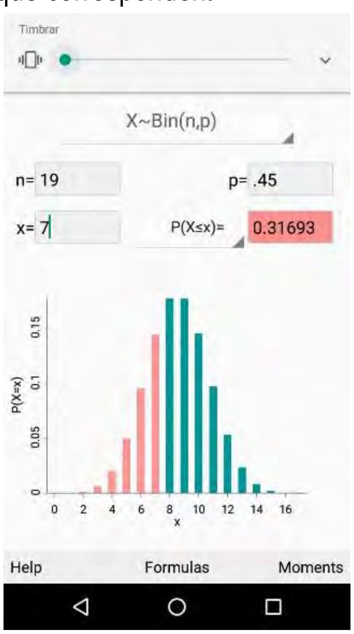
START OVER

Entonces $B(2,\ 4,\ 0.30) = 0.9163.$

CÁLCULO DE PROBABILIDADES BINOMIALES CON APP PARA MOVIL (CELULAR)

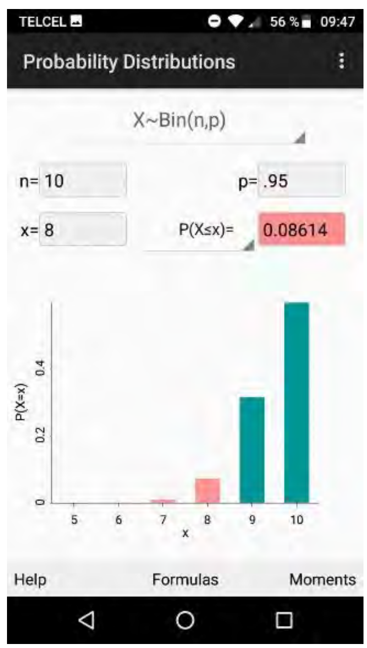
EJEMPLO 5 BIS (PROBABILIDADES BINOMIALES UTILIZANDO UNA APP PARA CELULAR)
Ahora utilizaremos la aplicación para teléfono celular: Probability Distributions, PhD. Bognar, Matthew. Departament of Statistics and Actuarial Science. University of Iowa, 2017, en el cálculo de las probabilidades binomiales solicitadas en el ***ejemplo 5 de la página 46***.

a. Para determinar la probabilidad binomial acumulada $B(7,19,0.45)$, sólo es necesario rellenar adecuadamente los espacios que corresponden.



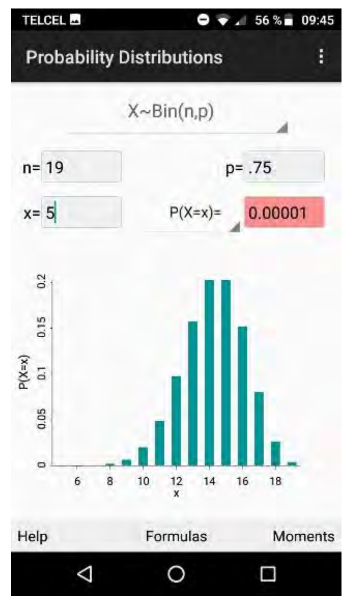
por tanto, $B(7,19,0.45)=0.31693$.

b. Para determinar la probabilidad binomial acumulada $B(8,10,0.95)$, rellenamos los espacios pedidos, observamos



luego, $B(8,10,0.95)=0.08614$.

c. Para calcular $b(5,19,0.75)$ completamos los espacios que señala la aplicación, observamos

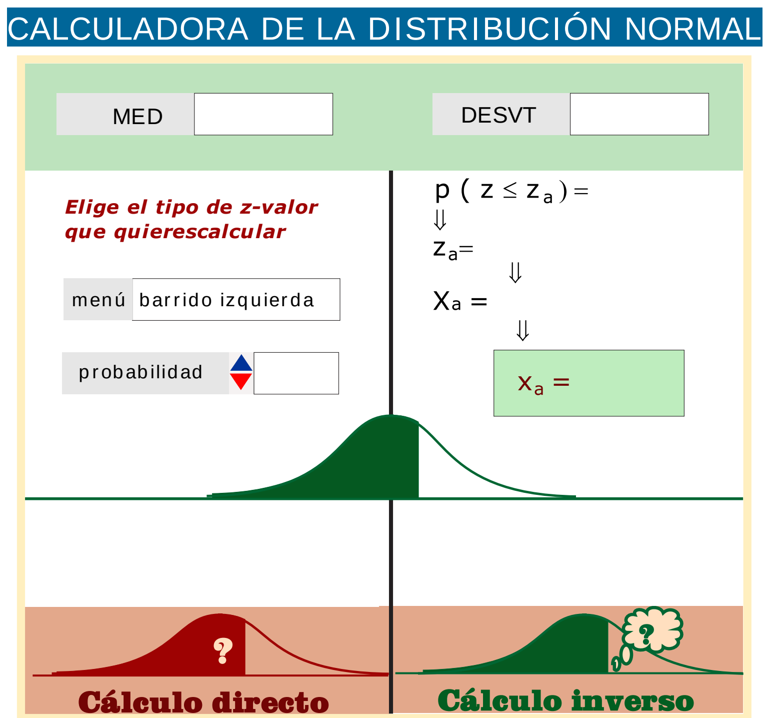


Así obtenemos $b(5,19,0.75)=0.00001$

CÁLCULO DE PROBABILIDADES CON LA APLICACIÓN "*CALCULADORA DE LA DISTRIBUCIÓN NORMAL*"

Utilizaremos la aplicación ***calculadora on-line*** de nombre "calculadora de la distribución normal" con enlace en la WEB https://proyectodescartes.org/miscelanea/materiales_didacticos/normal-JS/

Ingresando el enlace anterior se despliega y ejecutando observamos en la pantalla del dispositivo electrónico

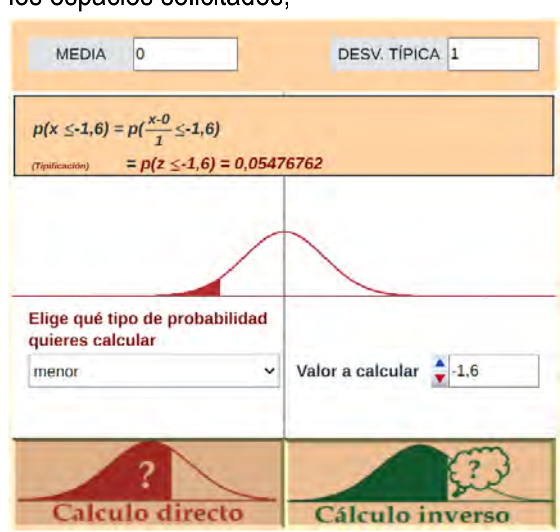


EJEMPLO 12 BIS (USO DE APP EN EL CÁLCULO DE PROBABILIDADES NORMALES)

a. En el cálculo de $p(Z \leq 1.20)$, completamos espacios,

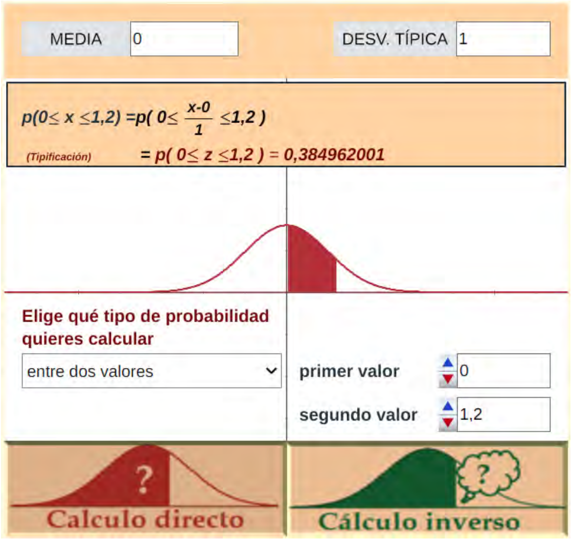
entonces $p(Z \leq 1.20) = 0.8849.$

b. Para calcular $p(Z \leq -1.60)$, completamos los espacios solicitados,



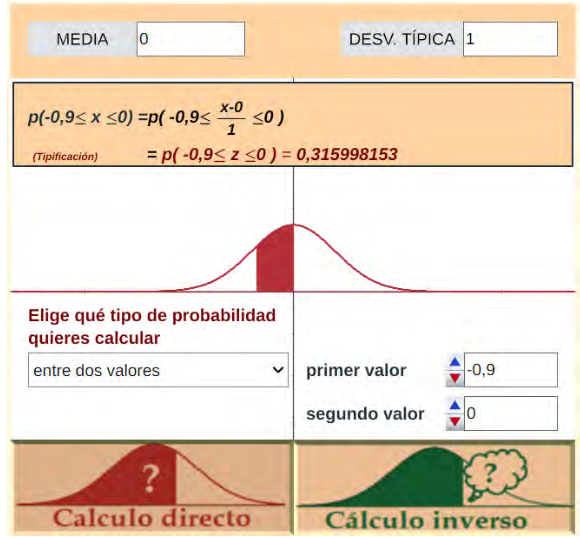
$p(Z \leq -1.60) = \Phi(-1.60) = 0.0548.$

c. Para calcular $p(\ 0 \le Z \le 1.20\ )$, completamos espacios y observamos.



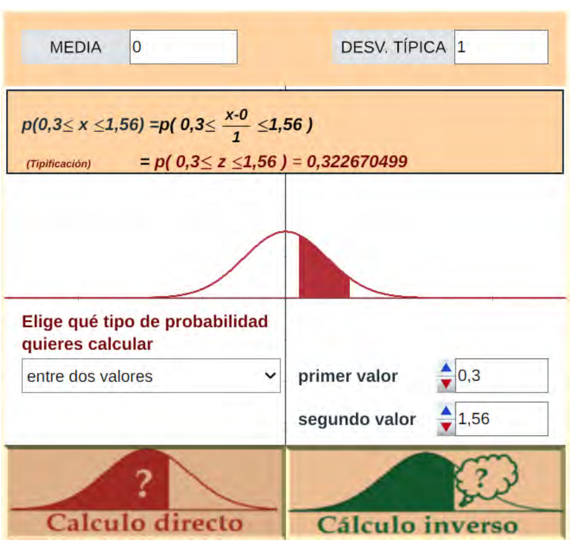
Entonces
$p(\ 0 \le Z \le 1.20\ ) = 0.3849$

d. Para calcular $p(\ -0.90 \le Z \le 0\ )$, completamos los espacios correspondientes.



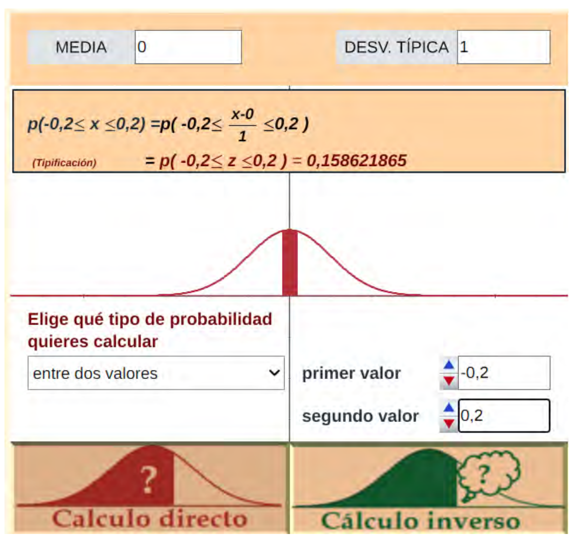
Entonces
$$p(\ -0.90 \le Z \le 0\ ) = 0.3159.$$

e. Para el cálculo de $p(\ 0.30 \le Z \le 1.56\ )$, completamos espacios, observamos



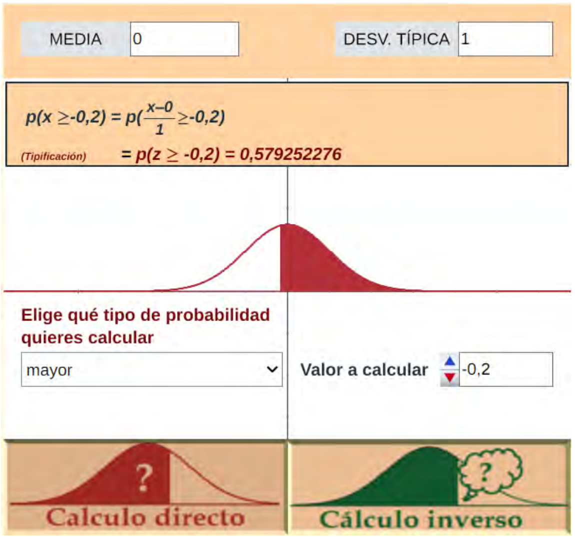
entonces
$$p(\ 0.30 \le Z \le 1.56\ ) = 0.3227.$$

f. Para calcular $p(\ -0.20 \le Z \le 0.20\ )$, rellenamos espacios y se despliega la pantalla,



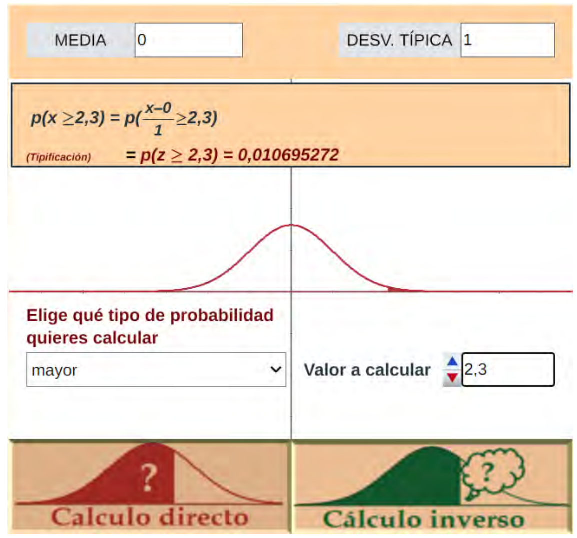
entonces
$p(\ -0.20 \le Z \le 0.20\ ) = D(\ 0.20\ ) = 0.1585.$

g. En el cálculo de $p\left(Z \geq -0.20\right)$ completamos espacios, se despliega la pantalla



luego
$p\left(Z \geq -0.20\right) = \Phi\left(0.20\right) = 0.5793.$

h. En el cálculo de $p\left(Z \geq 2.30\right)$, completamos espacios, observamos

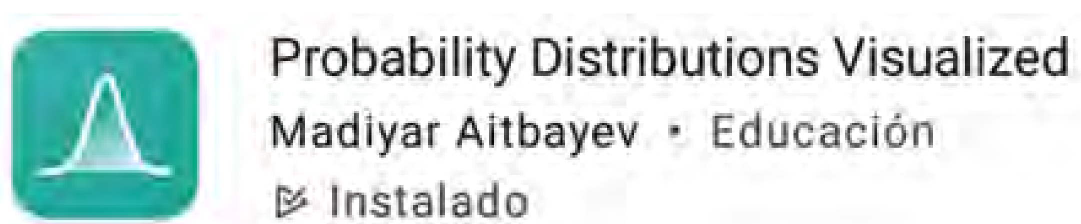


entonces

$$p\left(Z \geq 2.30\right) = 0.0107.$$

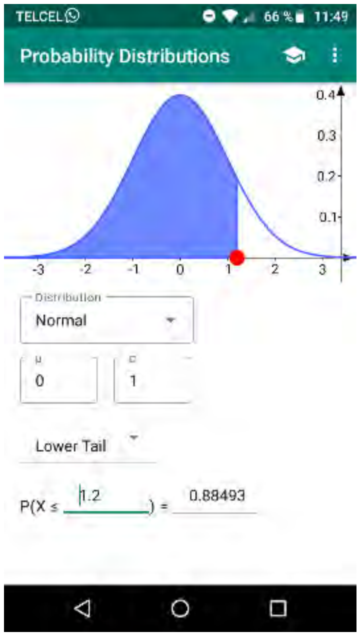
CÁLCULO DE PROBABILIDADES NORMALES CON APLICACIONES PARA MOVIL (CELULAR)

EJEMPLO 12 tris (PROBABILIDADES BINOMIALES CON UNA APP PARA CELULAR)
En la resolución de este ejemplo utilizaremos la APP para celular



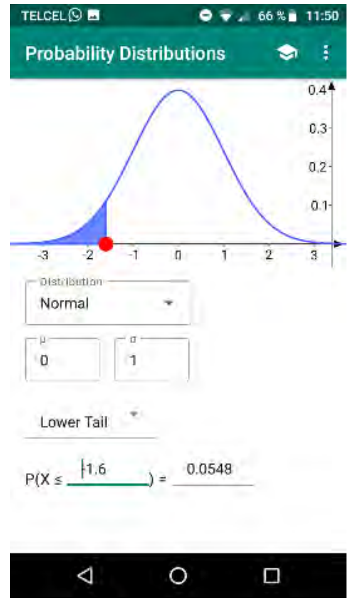
Se descarga desde Play Store. Sea que $Z \sim N\left(0\ ,\ 1^2\right)$. Sólo hay que llenar los espacios requeridos con los datos de interés.

a. Para determinar $p\left(Z \leq 1.20\right)$, en la APP observamos



entonces $p\left(Z \leq 1.20\right) = 0.8849.$

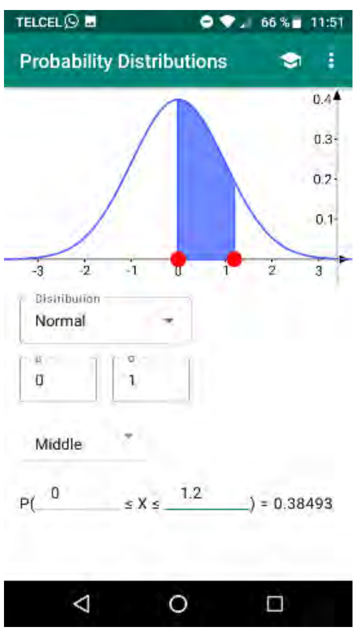
b. Para calcular $p\left(Z \leq -1.60\right)$, en la APP observamos



por tanto,

$$p\left(Z \leq -1.60\right) = \Phi\left(-1.60\right) = 0.0548.$$

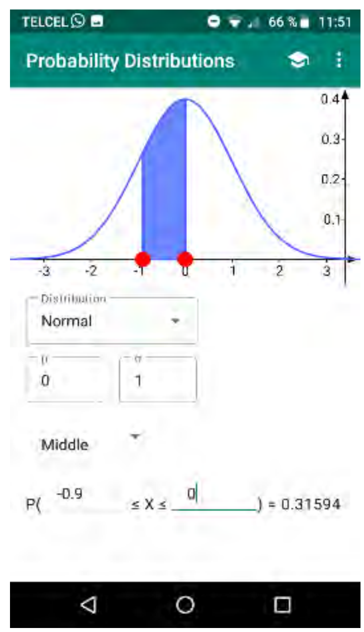
c. Para calcular $p\left(0 \leq Z \leq 1.20\right)$, en la APP notemos



Por tanto,

$$p\left(0 \leq Z \leq 1.20\right) = 0.38493.$$

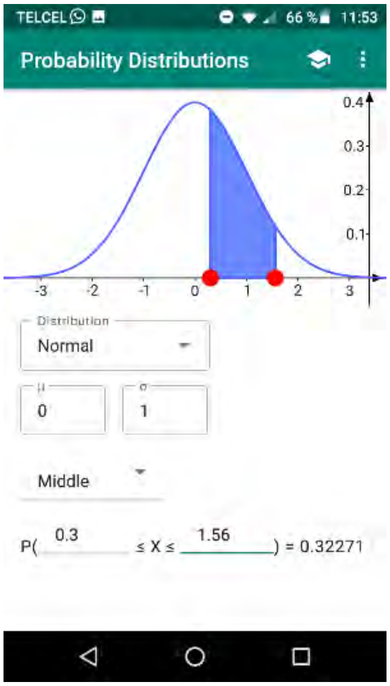
d. En el cálculo de $p\left(-0.90 \leq Z \leq 0\right)$, en la APP observamos



Por tanto,

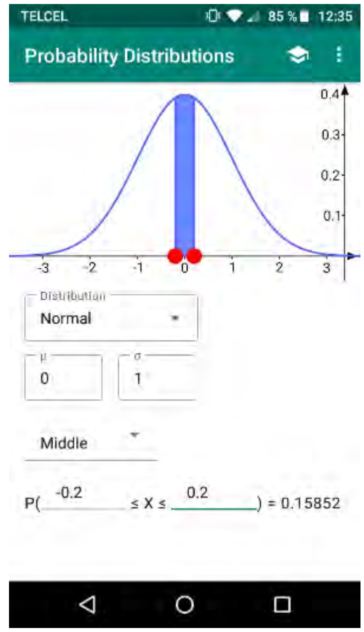
$$p\left(-0.90 \leq Z \leq 0\right) = 0.31594.$$

e. Para determinar $p(0.30 \le Z \le 1.56)$, en la APP observamos



entonces $p(0.30 \le Z \le 1.56) = 0.32271.$

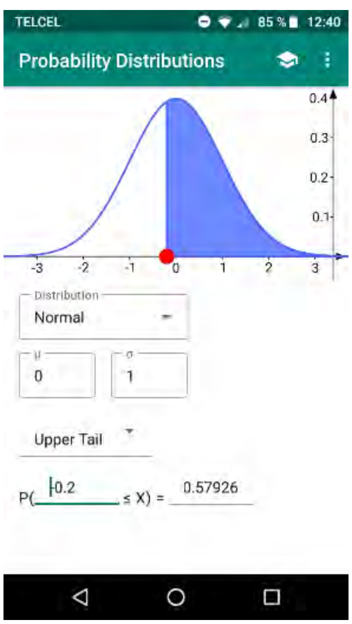
f. Para calcular $p(-0.20 \le Z \le 0.20)$, en la APP observamos



por tanto,

$$p(-0.20 \le Z \le 0.20) = 0.15852.$$

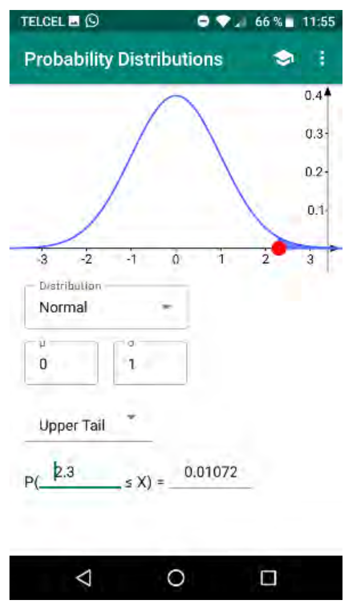
g. En el cálculo de $p(Z \ge -0.20)$, escribimos en la APP



Por tanto,

$$p(\ 0 \le Z \le 1.20\ ) = 0.57926.$$

h. Para calcular $p(Z \ge 2.30)$, en la APP escribimos



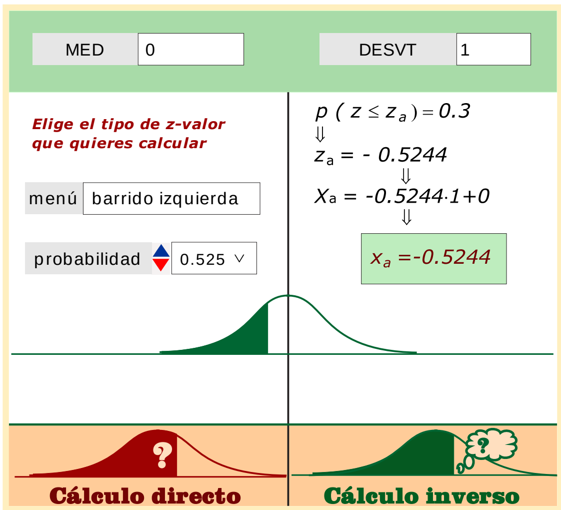
observamos

$$p(Z \ge 2.30) = 0.01072.$$

CÁLCULO DE CUANTILES NORMALES CON LA APLICACIÓN “*CALCULADORA DE LA DISTRIBUCIÓN NORMAL*”

EJEMPLO 13 BIS (CÁLCULO DE CUANTILES AL 100% DE LA NORMAL UTILIZANDO APP)

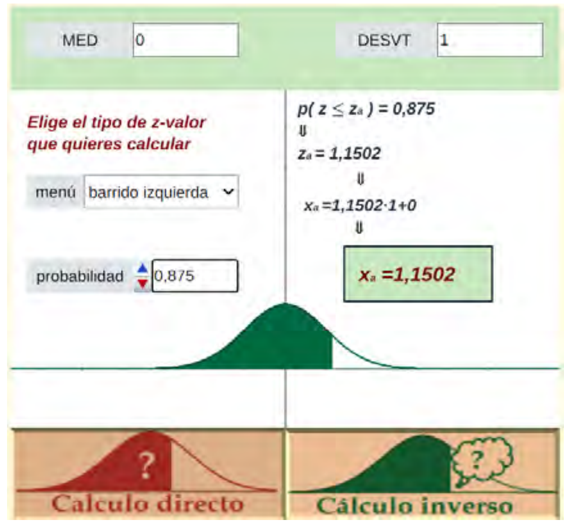
a. Si $p\left(Z \le z_0\right) = 0.30$,



entonces

$$z_{30} = -0.5244.$$

b. Si $p\left(Z \le z_0\right) = 0.875$,

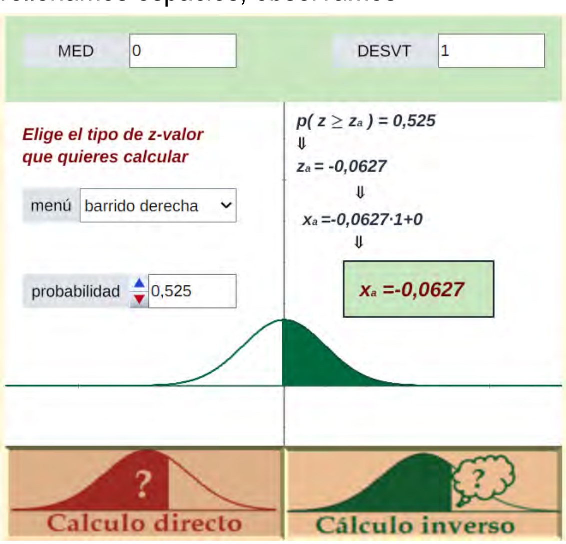


entonces

$$z_{87.5} = 1.1503.$$

EJEMPLO 14 BIS (CÁLCULO DE CUANTILES z_0)

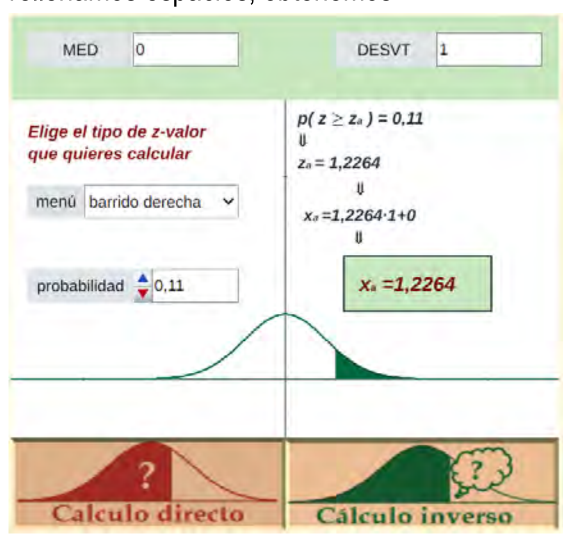
a. En el cálculo del cuantil $p\left(Z \ge z_0\right) = 0.525$, rellenamos espacios, observamos



por consiguiente

$$z_0 = -0.063.$$

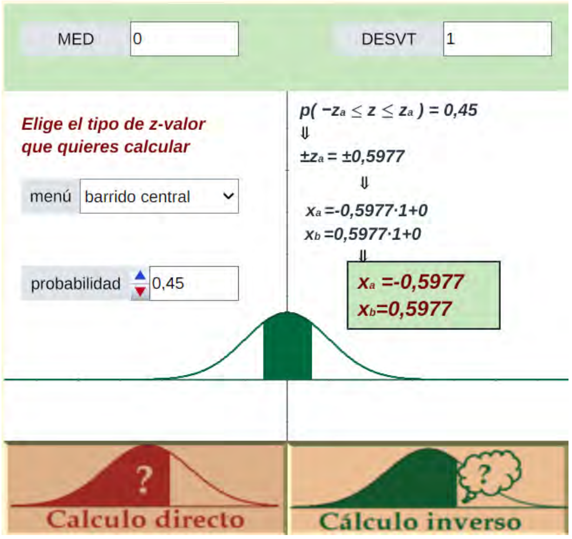
b. En el cálculo del cuantil $p\left(Z \ge z_0\right) = 0.11$, rellenamos espacios, obtenemos



por consiguiente

$$z_0 = -1.227.$$

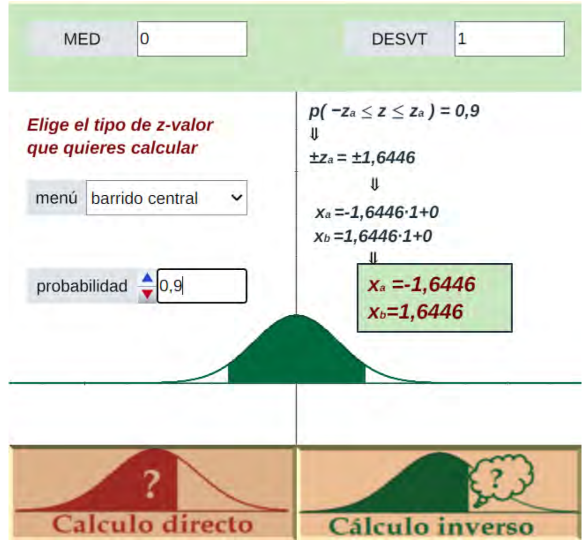
c. Para calcular el cuantil que corresponde a $p\left(-z_0 \le Z \le z_0\right) = 0.45$, rellenamos espacios y observamos



por tanto,

$$z_0 = \pm 0.598.$$

d. En el cálculo del cuantil que corresponde a $p\left(-z_0 \le Z \le z_0\right) = 0.90$, completamos espacios y se despliega la pantalla



en consecuencia

$$z_0 = \pm 1.645.$$

AUTOEVALUACIÓN

COMPLETA LOS ESPACIOS

SELECCIONA LAS PALABRAS FALTANTES DEL BLOQUE INFERIOR

1. Una ______________________ es una característica de un problema (u objeto) que asume un conjunto de valores.

2. Las __________________________________ se caracterizan porque los valores que asumen dependen del azar.

3. Una variable aleatoria discreta tiene como recorrido _________________________________.

4. La expresión $X(A)=x$ indica que la variable aleatoria X ____.

5. La probabilidad de que la variable aleatoria X asuma el valor x_i se representa por ______________________.

6. Las funciones que caracterizan el comportamiento de una variable aleatoria son: ____.

7. Las dos características básicas de una fdp son: _________________________________ y que su suma es uno.

8. La FDA asociada a una VAD X, se construye ______________ las probabilidades proporcionadas por la función de probabilidades $f_X(x)$ hasta un valor específico $X=x_0$.

9. Los ____________________________ de la VAD X proporciona información concisa e inmediata sobre ella.

10. Los____________________________________ de la VAD X se calculan a partir de la fdp.

11. El valor esperado de una variable aleatoria es el _________________________ a largo plazo.

12. El valor esperado de una variable aleatoria corresponde al _________________de la distribución de probabilidades.

13. La varianza es el parámetro que mide la ________________________ de una variable aleatoria X.

14. La variable aleatoria discreta: $X=$"____ independientes", se denomina variable aleatoria binomial.

15. Una ____tiene como recorrido un intervalo de números reales.

16. Las variables aleatorias continuas asumen probabilidad______________________ para un valor específico dado.

17. La ____________________________de una VAC con fdp $f_X(x)$, se calcula a partir de una "suma de áreas".

18. Los ________________________ de la función de probabilidad normal, son su valor esperado y su varianza.

19. El valor esperado de una variable aleatoria normal representa, en el plano cartesiano, _____________________ de la distribución de probabilidades.

20. La varianza de una variable aleatoria normal representa el grado de _____________________ de la curva Gaussiana.

21. Una distribución normal varianza menor a otra presenta mayor __________________________________.

agudez. promedio. variables aleatorias. altura. asigna al evento A ***el número real*** x***. cero. La función de distribución de probabilidades y la función de distribución acumulada. "número de éxitos en*** n ***ensayos independientes". sumando. parámetros. valor que asumirá. conjunto finito de números. dispersión. variable aleatoria continua. ser no negativa. función de distribución acumulada. centro.*** $f_X(x_i)$***. parámetros. variable. parámetros.***

CIERTO O FALSO

(Selecciona la opción que consideres correcta)

C F **1.** El tiempo que tarda una persona en hablar por teléfono es una VAD.

C F **2.** El número de cachorros que tendrá una perra en su próximo parto es VAD

C F **3.** El recorrido de una variable aleatoria discreta es una parte de números enteros.

C F **4.** En una distribución de probabilidad la suma de ellas es uno.

C F **5.** En un histograma de probabilidades la suma de las áreas de los rectángulos es uno.

C F **6.** La curva asociada a una FDA es decreciente.

C F **7.** El valor esperado de una variable aleatoria puede ser negativo.

C F **8.** El valor esperado de una variable aleatoria es una probabilidad.

C F **9.** El valor esperado de una variable aleatoria también se denomina media aritmética.

C F **10.** Todas las variables aleatorias tienen varianza.

C F **11.** La varianza de una variable aleatoria es positiva o cero.

C F **12.** La varianza de una variable aleatoria es una medida de su "dispersión".

C F **13.** La desviación estándar de una variable aleatoria es un parámetro de una fdp.

C F **14.** La desviación estándar de una variable aleatoria es positiva o cero.

C F **15.** El recorrido de una variable aleatoria binomial es un número entero.

C F **16.** La variable aleatoria "tiempo transcurrido entre dos éxitos" no es binomial.

C F **17.** El valor esperado de una variable aleatoria binomial indica el número de éxitos que se espera obtener una vez que el experimento se ha efectuado un sin fin de veces.

C F **18.** En una variable aleatoria binomial $p = 1 + q$.

C F **19.** En una distribución continua el área bajo la curva asociada a la función de probabilidad y la probabilidad son equivalentes.

C F **20.** La distribución normal corresponde a una VAC.

C F **21.** En la distribución normal la esperanza es positiva.

C F **22.** La gráfica de la fdp normal es simétrica respecto al eje de las ordenadas.

C F **23.** La desviación estándar en una distribución normal es una medida de la agudeza de su curva gaussiana.

C F **24.** La distribución normal estándar tiene valor esperado cero.

C F **25.** El área de la región limitada por la curva asociada a una distribución normal estándar, el eje de las abscisas y el eje de las ordenadas es 0.5.

C F **26.** La probabilidad de un valor puntual de una variable aleatoria normal es cero.

C F **27.** La variable aleatoria normal estándar se caracteriza por tener valor esperado cero y varianza uno.

C F **28.** El recorrido de una variable aleatoria normal es un conjunto de números positivos.

C F **29.** La varianza de una variable aleatoria normal representa una medida de su posición respecto al origen.

C F **30.** La varianza de la VAC normal define la altura de una curva gaussiana.

PROBLEMAS PROPUESTOS

1. S la VAD X sigue la distribución:

x	-3	-1	1	3
$f_X(x)$	0.25	0.25	0.25	0.25

Determina:

a. La fdp y dibuje su gráfica.

b. La FDA y dibuje su gráfica.

c. La esperanza matemática.

d. La varianza y la desviación estándar.

e. $p(-2 \le X \le 1)$.

f. $p(-2 < X \le 1)$.

g. $p(-2 \le X < 1)$.

h. $p(X < 1)$.

i. $p(X \ge 1)$.

j. $p(X \le 1)$.

k. $p(X = 1)$.

2. Sea la FDA asociada a la VAD X:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & X < -5 \\ 0.2 & -5 \le X < -2 \\ 0.6 & -2 \le X < 2 \\ 1 & X > 2 \end{cases}.$$

Determina:

a. La distribución de probabilidades.

b. La fdp.

c. La esperanza matemática.

d. La varianza y la desviación estándar.

e. $p(-2 \le X \le 3)$.

f. $p(-2 < X \le 2)$.

g. $p(-2 \le X < 3)$.

h. $p(X < 2)$.

i. $p(X \ge 2)$.

j. $p(X \le 2)$.

k. $p(X = 2)$.

3. Sea $X \sim b(x, 6, 0.40)$, determina:

a. El recorrido.

b. La fdp y su gráfico.

c. La FDA y su gráfico.

d. La esperanza matemática.

e. La varianza y la desviación estándar.

f. La probabilidad de que ocurran menos de 5 éxitos.

g. La probabilidad de que ocurran al menos de 5 éxitos.

h. La probabilidad de que ocurran exactamente 5 éxitos.

i. La probabilidad de que ocurran entre 3 y 5 éxitos (incluya ambos extremos).

j. La probabilidad de que ocurran más de 5 éxitos.

k. La probabilidad de que ocurran por lo menos 3 éxitos.

4. Si $X \sim N(100, 25^2)$, determine:

a. $p(115 < X < 135)$.

b. $p(95 < X < 130)$.

c. $p(X > 180)$.

d. $p(X < 105)$.

5. Si $X \sim N(100, 25^2)$, determine x_0 :

a. $p(X < x_0) = 0.9893$.

b. $p(X > x_0) = 0.0359$.

c. $p(-x_0 \le X \le x_0) = 0.4971$.

6. Si $X \sim N(\mu, 3^2)$, determine μ.

a. $p(X < 5) = 0.2946$.

b. $p(X > 10) = 0.1379$.

7. Si $X \sim N(4, \sigma^2)$, determine σ.

a. $p(X < 6.3) = 0.1977$.

b. $p(X > 3.2) = 0.9573$.

2. ESTIMADORES E INTRODUCCIÓN A LA INFERENCIA ESTADÍSTICA

PROPÓSITO

Al finalizar la unidad el alumno:
Analizará el comportamiento de los estimadores media y proporción, a través del modelo Normal, para construir un vínculo entre la probabilidad y la inferencia estadística

CONTENIDO

2.1 POBLACIÓN y MUESTRA
2.2 PARÁMETRO y ESTADÍSTICO

2.1 POBLACIÓN Y MUESTRA

¿Qué debe aprender?

1. Establece hipótesis o conjeturas del comportamiento de una variable en una población a partir de los datos de una muestra, de manera informal, en el contexto de una investigación o un problema.
2. Valora la importancia del azar en los procesos de muestreo.
3. Valora a los estimadores como variables aleatorias y como indicadores del posibles puntual de sus correspondientes parámetros.

¿Por qué debe aprenderlo?

Para tener claro el proceso de construcción de una distribución muestral es necesario haber comprendido los conceptos de: población, muestra en el contexto de la inferencia estadística.
Las distribuciones muestrales son los mecanismos con los que se efectúan inferencias estadísticas sobre los parámetros de interés. Las poblaciones se caracterizan por los valores de sus parámetros, que se estiman o infieren utilizando estadísticas adecuadas.

Temática

Población y muestra: Muestreo aleatorio simple con y sin reemplazo.
Parámetros y estadísticos: Variabilidad muestral.

¿CÓMO SE CLASIFICA LA ESTADÍSTICA?

El primer curso de estadística (estadística descriptiva) destaca como propósito la descripción numérica y gráfica de grupos de datos sin tener en cuenta la forma en que se obtuvieron y, por tanto, las conclusiones y afirmaciones que se obtengan de ellos sólo serán válidas para tal grupo de datos. A diferencia de la estadística descriptiva, en la estadística inferencial (inferencia estadística) a partir de un grupo "muy considerable" de datos la forma de selección de una parte de ellos se hace minuciosamente y respetando ciertos principios previamente establecidos, es decir, es muy importante el proceso de selección (que se denomina muestreo). La vinculación de la parte descriptiva de la estadística con la PROBABILIDAD (bajo ciertos lineamientos que construiremos más adelante) da origen a la estadística inferencial, misma que es objeto de estudio de la presente obra.

EJEMPLO 1 (VINCULACIÓN DE RAMAS DE LA ESTADÍSTICA**)**
Los tiempos de recorrido del circuito "Tacubaya – Tepalcates – Tacubaya" utilizados por 60 operadores del "Metrobús" dieron origen a la distribución de frecuencias mostrada en la *Tabla 1.*

Límites reales L_{ri} L_{rs}	**Frecuencia** f_i
174.5 179.5	8
179.5 184.5	10
184.5 189.5	13
189.5 194.5	10
194.5 199.5	9
199.5 204.5	6
204.5 209.5	4

TABLA 1

Con base en la distribución de frecuencias mostrada en la *tabla 1* podemos afirmar:

1. El promedio de recorrido del circuito "Tacubaya – Tepalcates – Tacubaya" es

190 minutos.

2. La desviación estándar en el recorrido del circuito "Tacubaya – Tepalcates – Tacubaya" es

8.765 minutos.

3. Incluso, sobre el histograma de probabilidades podemos trazar una curva suave que contenga los puntos medios de las bases superiores y suponer que los tiempos se distribuyen en forma aproximadamente normal.

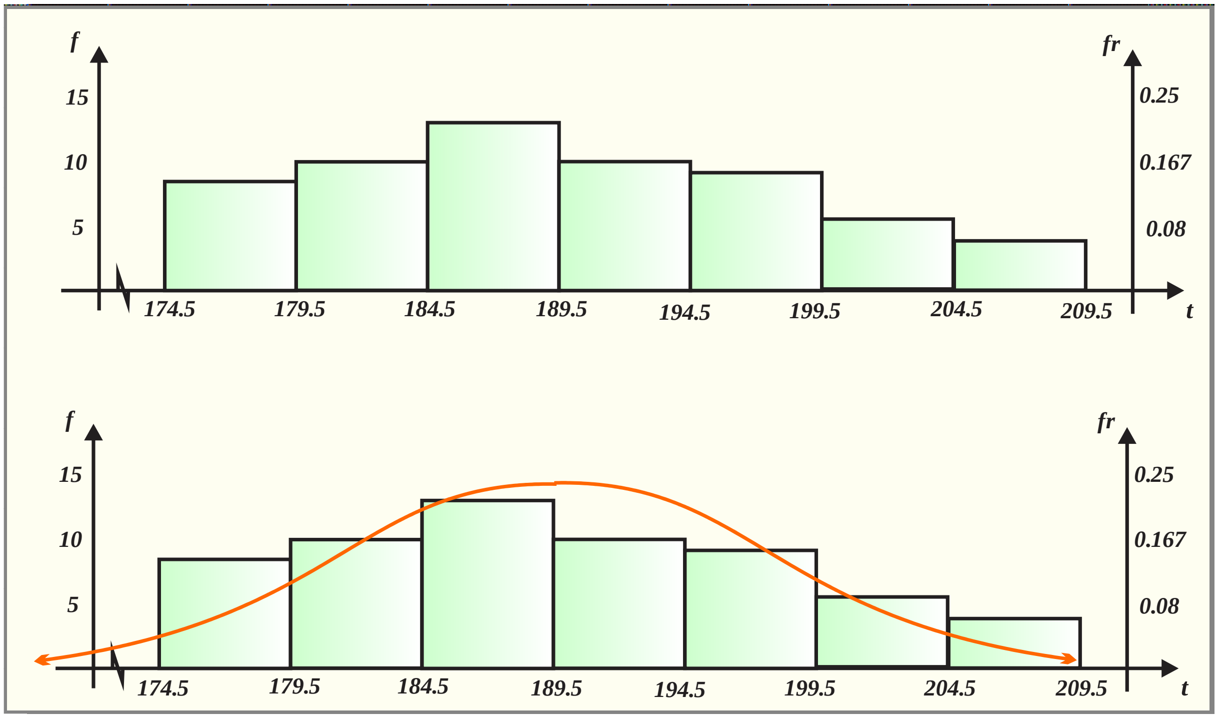
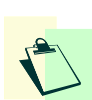


FIGURA 1

4. Sin embargo, las conjeturas anteriores, y que hicimos en forma categórica solo son "inferencias informales" sobre el comportamiento de los tiempos de recorrido del circuito "Tacubaya – Tepalcates – Tacubaya", y de ninguna manera son válidas (solo son creencias) en el conjunto de todos los tiempos de recorrido del circuito señalado.

5. Con toda certeza, si se selecciona (sin) otro grupo de tiempos de recorrido del circuito "Tacubaya – Tepalcates – Tacubaya", las conjeturas planteadas con base en ellos seguramente serían "muy diferentes" considerando que la variable (tiempo de recorrido del…) está gobernada por una combinación de circunstancias o de causas imprevisibles, complejas, sin plan previo y sin propósito, que provocan que acontezca se obtenga una determinada medida que no está condicionada por la relación de causa y efecto, ni por la intervención humana, es decir, parte de del tiempo medido se debe a la casualidad, a lo fortuito o accidental, a lo involuntario, o sin una intención o un motivo determinado o prefijado, a lo que no puede medirse u ocurre aleatoriamente.



La generación de conclusiones basadas en un grupo de datos tomados, sin cuidado alguno, de otro grupo mayor sin duda alguna tendrá como resultados graves errores.

La "inferencia estadística" tiene como propósito analizar el comportamiento de características (previamente seleccionadas) de conjuntos de objetos (muestras) para posteriormente (con fundamento en la información contenida en ellas) inferir (o determinar) los rasgos fundamentales del total de datos (población de estudio), por tanto, para comprender correctamente los procesos de la estadística inferencial es necesario tener presentes y claros los conceptos de población, muestra y muestreo.

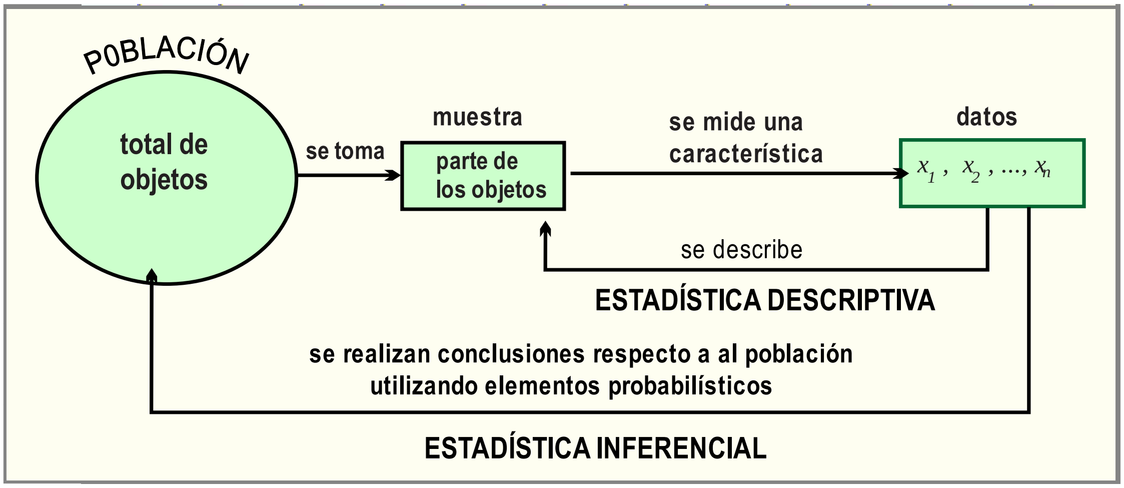


FIGURA 2

DEFINICIÓN 1 (CARACTERISTICA O PROPIEDAD)
Una característica (o carácter) de un objeto (elemento o individuo) es una propiedad a partir de la que es posible clasificarlo y estudiarlo.

Las características (propiedades) de los objetos se clasifican en:
i. Cualitativas, **descriptivas o no medibles**, cuando no admite ser medido o se distingue o compara con otros a partir de uno o más atributos.
ii. Cuantitativas o medibles, si se pueden cuantificar asociándoles un número.
Los datos cualitativos son atributos, características o propiedades categóricas que identifican o describen un aspecto de un objeto en lugar de medirlo y se relacionan con impresiones, opiniones y perspectivas; describen diferencias de tipo o clase indicando la presencia o ausencia de cierta característica. Los datos cuantitativos se relacionan con mediciones y se generan asignando un número a una característica de un objeto, también pueden compararse entre ellos a partir de su magnitud (longitud, peso, volumen, temperatura, etcétera.).

EJEMPLO 2 (CARACTERÍSTICAS)
Dada una población de ciudadanos:
a. Características cuantitativas (medibles) son: la estatura, el peso, la presión sanguínea, el coeficiente intelectual, la envergadura, entre otras.
b. Características cualitativas (no medibles) son: el color de piel, el tono de voz, la belleza, entre otros.

Formalización:

DEFINICIÓN 2 (VARIABLE, POBLACIÓN Y MUESTRA)
Sea ϖ un objeto (elemento o individuo) de una población, entonces

a. $X(\omega)$ representa la "característica de interés" del objeto ϖ se denomina variable.

b. Si $X(\omega)=x$, entonces x es la medida de la característica del objeto ϖ.

c. Una población es el conjunto de todos los objetos (elementos o individuos) de los que se desea estudiar una o más de sus características.

d. Una *muestra* es cualquier parte (o subconjunto) de la población.

e. Al número de objetos (elementos o individuos) se le llama tamaño de la muestra.

EJEMPLO 3 (POBLACIÓN ESTADÍSTICA Y MUESTRA ESTADÍSTICA)

a. El jefe de control de calidad de "*La Continental*" desea estudiar la proporción de neumáticos con rodada defectuosa en su producción anual, entonces la *población estadística* está compuesta por todos los neumáticos producidos por "*La Continental*" en el año, y son muestras:

i. Los neumáticos producidos por una máquina en los primeros 15 días de cierto mes.

ii. Si se fabrican los neumáticos uno tras otro, la muestra conformada por aquellos que tienen asignados los números múltiplos de 100.

iii. El grupo de los neumáticos producidas los martes antes de las $9:00$ horas.

b. En el entorno de una institución educativa, digamos la UNAM que puede considerarse como *población* al conjunto de todos los alumnos matriculados en ella, son muestras:

i. Los alumnos que miden más de 160 centímetros.

ii. Las alumnas que no adeudan materias.

iii. Los alumnos cuyo primer apellido comienza con la letra R.

En el proceso de estudio de una población, primero establece la característica de interés, misma que se ve reflejada en todos los objetos de la población (y en consecuencia en todos los objetos de todas las muestras) si la variable en estudio está gobernada por el azar evidentemente, el azar estará presente en la toma de medidas de la característica de interés en cada objeto de la población y de la muestra.

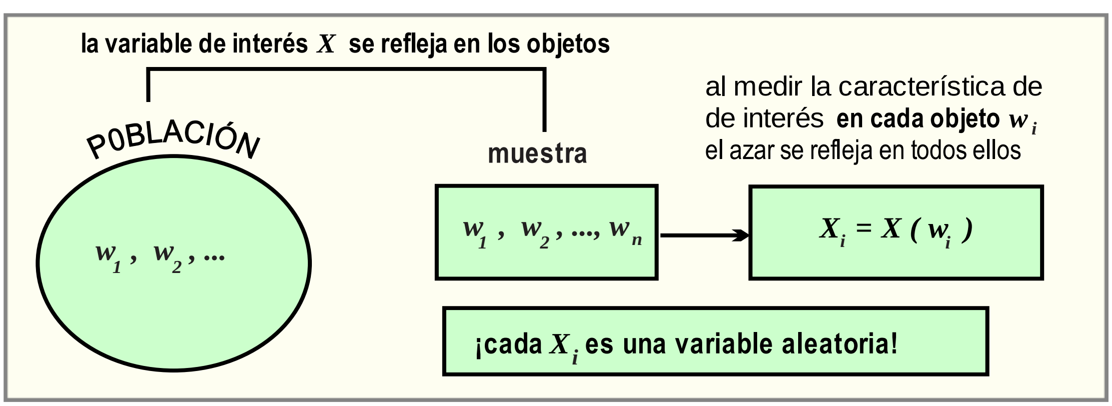


FIGURA 3

¿QUÉ ES UNA MUESTRA ALEATORIA SIMPLE?

Una muestra aleatoria simple, es un conjunto de variables aleatorias, independientes e idénticamente distribuidas, que reflejan el comportamiento de la característica de la población en los objetos seleccionados. Los conceptos señalados en el párrafo anterior definen una muestra aleatoria simple. Una comprensión adecuadamente “muestra aleatoria simple” requiere de una revisión exhaustiva de sus partes.

i. Se obtiene a partir de una variable aleatoria de interés presente en la población origen (característica que es el objeto de estudio del investigador).

ii. Las medidas y los objetos que constituyen la constituye se han obtenido aleatoriamente y esto se refleja en cada objeto.

iii. Aunado a lo anterior incluye el concepto de independencia entre los objetos de la muestra aleatoria simple y, por tanto, no guardan relación entre ellos, es decir, el haber seleccionado a una de los objetos no depende de los otros objetos seleccionados.

4. Por último, idénticamente distribuidas se refiere a que todas las variables aleatorias de la muestra tienen la misma distribución de probabilidad.

Es común dar el mismo significado a muestra aleatoria simple y a muestra seleccionada aleatoriamente, lo que es incorrecto.

DEFINICIÓN 3 (MUESTRA ALEATORIA SIMPLE (MAS))

Las variables aleatorias $X_1,\ X_2, \ldots,\ X_n$, extraídas de la misma población estadística, componen una *muestra aleatoria simple* de tamaño n si:

a. Son independientes entre sí.

b. Están idénticamente distribuidas, es decir, siguen una misma función de probabilidad.

En diversos textos de estadística las variables aleatorias $X_1,\ X_2, \ldots,\ X_n$ que constituyen una muestra aleatoria simple se llama en forma simplificada idd, cuyo significado es variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas. El lector debe tener presente la diferencia entre el grupo de datos (números) $x_1,\ x_2, \ldots,\ x_n$ ¡ya están determinados!, de uso común en *estadística descriptiva* puesto que sólo corresponden a una “asignación numérica” a las variables aleatorias $X_1,\ X_2, \ldots,\ X_n$, y por tanto, nos referiremos a ellos como “realización” de la muestra aleatoria simple.

DEFINICIÓN 4 (REALIZACIÓN DE UNA MUESTRA ALEATORIA SIMPLE (MAS))

Sea $X_1,\ X_2, \ldots,\ X_n$ una MAS extraída de la misma población estadística, se llama realización de la MAS (*muestra aleatoria simple)* a los números $x_1,\ x_2, \ldots,\ x_n$, siempre que $X_1 = x_1$, $X_1 = x_2$, etc.

La *figura 4* ilustra el concepto de realización de una MAS.

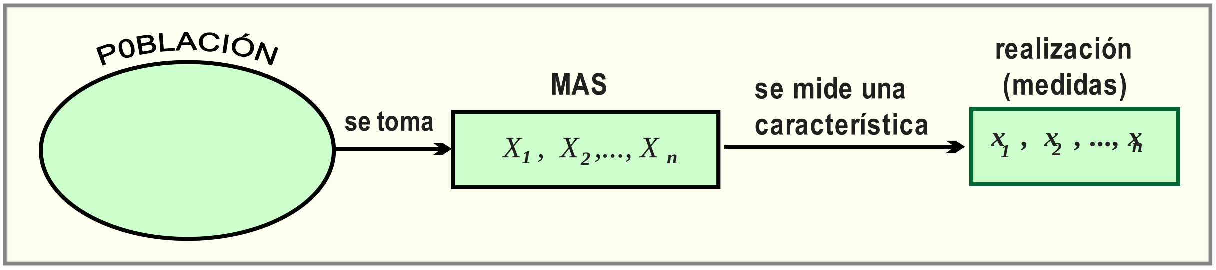


FIGURA 4

EJEMPLO 4 (REALIZACIÓNDE UNA MAS)
Si de un gran grupo de dados ordinarios (con sus caras numeradas del uno al seis) se extraen tres de ellos, entonces:

a. La muestra aleatoria es X_1, X_2, X_3.

b. Las ternas

$$(1, 4, 2), (6, 2, 2), (1, 5, 3), (3, 1, 5),$$

entre otras, son realizaciones de la MAS.

EJEMPLO 5 (REALIZACIÓN DE UNA MAS)
Si de un gran grupo de personas son seleccionados cinco de ellos y la característica de interés es su estatura, entonces:

a. La muestra aleatoria simple es X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 .

b. Los arreglos:

$$(1.661, 1.648, 1.646, 1.662, 1.650), (1.73, 1.742, 1.736, 1.738, 1.73),$$
$$(1.845, 1.857, 1.855, 1.84, 1.86), (1.690, 1.68, 1.685, 1.692, 1.690) \text{ y}$$
$$(1.630, 1.628, 1.626, 1.692, 1.635),$$

son realizaciones de la MAS.

EJEMPLO 6 (REALIZACIÓN DE UNA MAS)
Si de un gran grupo de monedas ordinarias (sus caras marcadas, una de ellas con águila y la otra con sol) son seleccionadas dos, posteriormente se lanzan y el carácter de interés es tomar nota de la cara que se observa, entonces:

a. La muestra aleatoria simple es X_1, X_2.

b. Los pares ordenados $(a, a), (a, s), (s, a), (s, s)$, son realizaciones de la MAS.

Otro de los propósitos de la estadística inferencial es obtener información sobre los valores reales o parámetros que tiene asociada una población, entre ellos se encuentran "los promedios", las "medidas de dispersión", las proporciones, los totales, los porcentajes, etcétera.

¿QUÉ ES EL MUESTREO CON REEMPLAZAMIENTO?

En una población (estadística) los objetos que la componen tienen una (o más) característica en común que es de interés para el investigador y en consecuencia desea conocer su valor real, por ejemplo, si los objetos de la población son personas y la propiedad de interés es la estatura, esta puede ser descrita a partir de sus medidas descriptivas, tales como la media real, la proporción real, el total, la varianza poblacional, etcétera. Para su cálculo se requiere la obtención y el posterior análisis de ellas, es decir, el nivel o grado bondad con que reflejan los valores reales. Imagine el gasto en recursos al tener que medir una característica (estatura, peso, coeficiente intelectual, eficiencia, etc.) a todas las personas de una ciudad o de un país, definitivamente esto resulta complicado y requiere de una gran inversión en recursos (tiempo dinero, equipo, etcétera), por tanto, la elección de una muestra representativa que refleje con la mayor precisión posible a un grupo más grande resulta muy adecuada para el estudio de la característica de interés de la población. No se obtienen buenos resultados si, por ejemplo, se toma la información de una muestra sin tomar en cuenta como fue obtenida y la bondad de su representatividad, luego, es necesario conocer los elementos que contribuyen en una selección de una muestra representativa.

DEFINICIÓN 5 (MUESTREO)
Proceso de selección y medición de la información en una parte de la población estadística.

Considerando que una muestra representativa es útil cuando no es posible medir la característica de interés en todos los elementos de la población es adecuado señalar que existen dos métodos básicos de selección de muestras de una población:

i. No aleatoria o de juicio, es práctica común seleccionar una muestra en forma intencional, de acuerdo con opiniones o criterios personales, fundamentalmente con el objeto de obtener información sin mucho costo. Este muestreo se conoce como muestreo no probabilístico, no aleatorio o de juicio y no involucra aspectos aleatorios en el procedimiento de selección, es adecuado cuando solo se necesitan estimaciones gruesas que no van a ser utilizadas para tomar decisiones importantes.

ii. Aleatoriamente, si en el proceso de selección de la muestra todos los objetos de la población tienen la misma probabilidad de ser electos. Si de una población con N objetos se obtienen muestras aleatorias de n de ellos, entonces cada objeto en cada muestra tiene la misma probabilidad de resultar electo.

DEFINICIÓN 6 (MUESTREO CON REEMPLAZO Y MUESTREO SIN REEMPLAZO)
a. Si los objetos pertenecientes a una muestra (previamente extraída de una población) se observa y se mide la característica de interés y posteriormente se regresan a la población de origen, para su posible reelección, entonces el muestreo se efectúa con reemplazo.
b. Si al seleccionar de una muestra, los objetos que se extraen de la población se observan, se mide el carácter de interés y no se regresan a ella, entonces el muestreo se efectuó sin reemplazo.

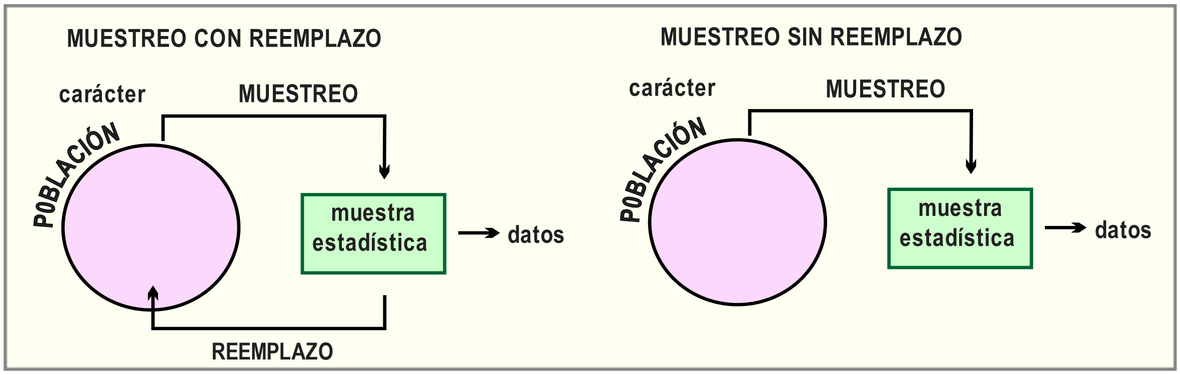


FIGURA 5

EJEMPLO 7 (MUESTREO CON REEMPLAZO Y MUESTREO SIN REEMPLAZO)
Suponga que una población está compuesta por los objetos $a,\ b,\ c$ y d, entonces todas las muestras de dos objetos que pueden obtenerse son:

	a	b	c	d
a	aa	ab	ac	ad
b	ba	bb	bc	bd
c	ca	ca	cc	cd
d	da	db	dc	dd

FIGURA 6

a. Si el muestreo importa el orden, se realiza con reemplazo y con repetición (los objetos pueden repetirse), entonces todas las muestras de tamaño $n=2$ son

$$aa,\ ab,\ ac,\ ad,\ ba,\ bb,\ bc,\ bd,\ ca,\ cb,\ cc,\ cd,\ da,\ db,\ dc,\ dd$$

b. Si el muestreo importa el orden, se realiza con reemplazo y sin repetición (los objetos no pueden repetirse), entonces todas las muestras de tamaño $n=2$ son

$$ab,\ ac,\ ad,\ ba,\ bc,\ bd,\ ca,\ cb,\ cd,\ da,\ db,\ dc$$

c. Si en el muestreo no importa el orden, se realiza sin reemplazo y sin repetición, entonces todas las muestras de tamaño $n=2$ son

$$ab,\ ac,\ ad,\ bc,\ bd,\ cd\,.$$

Antes señalamos que una vez conocido el valor real de una característica de interés de una población el estudio referente a ella ha concluido. Los valores reales de una población se llaman parámetros.

¿QUÉ SON LOS NÚMEROS ALEATORIOS?

Para fines prácticos en la obtención de realizaciones de muestras aleatorias, existen diversos métodos para seleccionarlas. En cualquier buscador (Google, Mozilla, entre otros) basta con teclear “generador de números aleatorios” y se desplegará una lista con un número basto de generadores de números aleatorios. También existen tablas de números aleatorios como la mostrada en el $apéndice\ A.3$, y de la que mostramos una de sus secciones.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	700561	429895	217104	218677	567334	003001	692333	623286	511897	560710	947700	581272	892269	194856	899909
2	953253	116896	256672	987367	391141	613091	385515	359883	628354	281127	164162	453877	738176	840473	505576
3	146597	948656	969995	536114	482259	483693	568088	406930	677122	232632	895770	571568	587830	293007	837035
4	393757	305931	764895	254489	740470	367769	078251	716074	777945	412522	590942	860850	620390	068922	100612
5	556681	380806	114612	822628	327827	800591	821450	672152	418506	366484	458203	223602	207323	330671	735324
6	242094	820952	790724	917318	836032	887349	869979	278548	834419	042696	532080	775858	919687	464217	296160
7	193683	373992	195850	662549	805229	367985	196077	884256	494809	734921	879705	800133	327204	685752	989692
8	105184	232459	197360	490865	982324	617182	556061	295526	573497	530911	292036	302428	365701	768207	773472
9	005704	237486	567025	968434	487453	490858	935283	630944	720707	283474	213827	211969	965455	953211	699539
10	201752	621609	042032	011775	393467	453945	409456	483555	210939	848324	601616	687443	591060	021307	471107

FIGURA 7

El ejemplo 8 muestra uso de números aleatorios en la selección de realizaciones de una muestra aleatoria.

EJEMPLO 8 (SELECCIÓN DE UNA MUESTRA UTILIZANDO NÚMEROS ALEATORIOS)

a. Si de un grupo que contiene $N = 1000$ objetos se desea seleccionar una realización aleatoria de tamaño $n = 8$:

i. Se etiquetan los objetos.

ii. Se selecciona al azar (digamos con los ojos cerrados) un número del “cuerpo” de la tabla de números aleatorios, supongamos que hemos seleccionado el dígito que se encuentra en la fila 9 y la columna 3, entonces la primera observación de la muestra puede ser la etiquetada como 567.

iii. Para seleccionar los otros siete objetos debemos seleccionar otros 7 números de tres cifras, éstos pueden ser los que se encuentran sobre esa línea, es decir, 025, 968, 434, 487, 453, 490 y 858.

Los datos pudieron escogerse de las columnas de la derecha, o de la izquierda o hacia arriba del punto de inicio, entre otras formas. Si un número se repite simplemente no se considera y se toma el siguiente.

b. Si de un grupo de 50 cartas etiquetadas de 1 a 50 se desea quiere seleccionar una realización de muestra aleatoria de tamaño $n = 5$.

i. Primero etiquetamos las cartas, digamos c_1, c_2, ..., c_{50}.

ii. Seleccionamos aleatoriamente un dígito de la tabla de *números aleatorios*, si el número aleatorio inicial seleccionado es el que se encuentra en la columna 2 y la fila 10, es decir el seis.

iii. Por tanto, no se puede incluir la carta c_{62} en la muestra, si continuamos en la fila 10 observamos que debemos incluir las cartas c_{16}, c_{09}, c_{04}, c_{20} y c_{32}. Si en la selección de la muestra hubiese aparecido otro número mayor que 50 simplemente se omite y se selecciona otro.

¿CÓMO SE CARACTERIZA UNA POBLACIÓN ESTADÍSTICA?

Los números que sintetizan los aspectos más relevantes de una población (grupo de datos) pueden obtenerse analizando toda la población o inferirse a partir de una parte representativa de ella y reciben el nombre de parámetros.

DEFINICIÓN 5 (VALORES REALES O PARÁMETROS)
Son números que dependen de los valores de la población y que sintetizan sus aspectos más relevantes.

Ejemplos de parámetros son: la media poblacional (real), la proporción poblacional (real), la varianza poblacional (real), el total de una población (real), entre otros. En *estadística inferencial*, las realizaciones de la MAS (cuyas variables aleatorias están definidas sobre la población) son representativas de la población) lo que significa que reflejan las características y los valores reales de la población de origen. Las variables aleatorias de una MAS se pueden combinar para dar origen a relaciones o fórmulas que dependen de ellas; por ejemplo, si se toman como patrones las medidas descriptivas muestrales, se obtienen variables aleatorias similares a estas medidas descriptivas.

DEFINICIÓN 6 (ESTADÍSTICA)
Se denomina estadística a cualquier función (o fórmula) obtenida a partir de la combinación de las variables aleatorias de una MAS y que no contiene parámetros.

Si sumamos dos o más variables aleatorias obtenemos como resultado otra variable aleatoria, si multiplicamos por un número (distinto de cero) a una variable aleatoria el resultado es una variable aleatoria, si multiplicamos dos variables aleatorias obtendremos otra variable aleatoria.

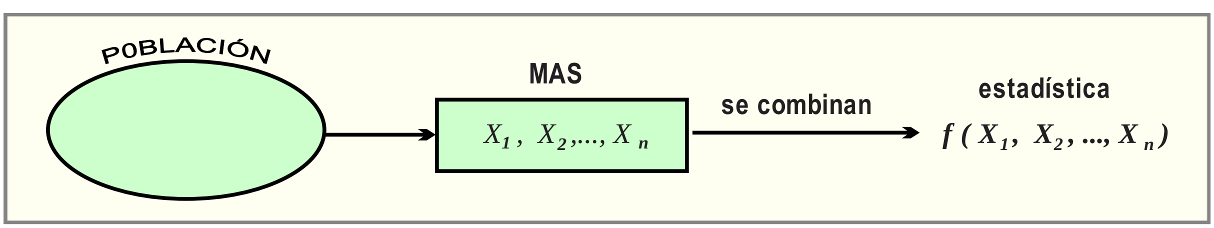


FIGURA 8

En el desarrollo de la presente obra sólo trataremos las estadísticas: "media" y "proporción", sin embargo, debemos señalar que existen otras.

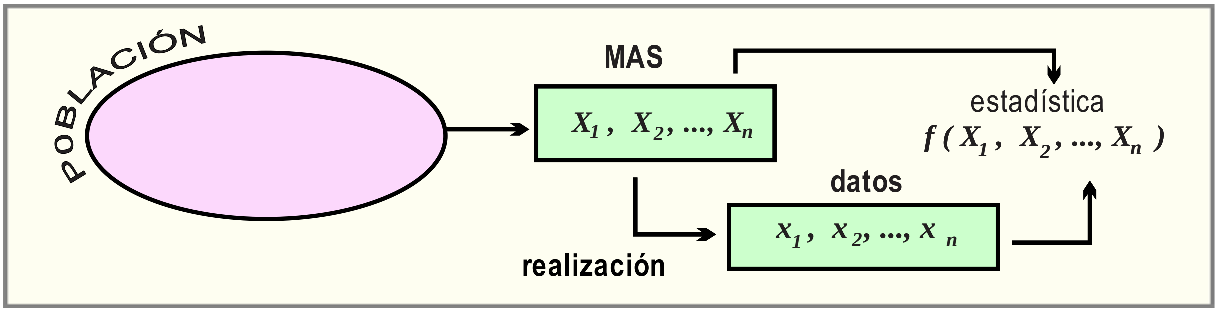


FIGURA 9

Formalmente:

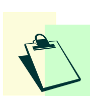
DEFINICIÓN 7 (MEDIA Y PROPORCIÓN)

Si $X_1, X_2, \ldots, X_n$ es una muestra aleatoria simple, entonces

a. La variable aleatoria $\bar{X} = \dfrac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n} = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ se denomina media.

b. Si todas las variables aleatorias $X_1, X_2, \ldots, X_n$ asumen (su recorrido es) uno de los números del conjunto $\{\ 0\ ,\ 1\ \}$, entonces la variable aleatoria $P = \dfrac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n}$ se denomina proporción.

NOTA



i. Tenga en cuenta la diferencia entre las variables aleatorias $X_1, X_2, \ldots, X_n$ que constituyen la muestra aleatoria simple y su realización o conjunto de valores que asumen

$x_1, x_2, \ldots, x_n$.

ii. La estadística $\bar{X}$ asume el valor $\bar{x}$ bajo la realización $x_1, x_2, \ldots, x_n$ de la MAS

$X_1, X_2, \ldots, X_n$.

iii. La estadística P adquiere el valor $\hat{p}$ cuando un número específico de las variables aleatorias $X_1, X_2, \ldots, X_n$ asumen el valor 1.

iv. En la práctica, al valor que asume una estadística también tiene el nombre de la estadística.

EJEMPLO 9 (ESTADÍSTICAS)

a. Sea la muestra aleatoria simple X_1, X_2, X_3, X_4, correspondiente a cierto experimento.

La estadística

$$\bar{X} = \frac{X_1 + X_2 + X_3 + X_4}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{4} X_i$$

varía de acuerdo con la realización de la muestra aleatoria simple X_1, X_2, X_3, X_4, por ejemplo:

i. Si 4, 5, 3 y 4 es una de sus realizaciones, entonces

$$\bar{x}_1 = \frac{4+5+3+4}{4} = 4\,.$$

ii. Si 4, 3, 3 y 4, es otra de sus realizaciones, entonces $\bar{x}_1 = \dfrac{4+3+3+4}{4} = 3.5$

b. En una consulta efectuada por cierto medio de comunicación se utilizó la MAS X_1, $X_2, \ldots, X_{2000}$.

i. Si en una primera realización de X_1, $X_2, \ldots, X_{2000}$ se observó que 800 de ellos prefirieron la marca A de cierto producto, entonces la estadística

$$P = \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_{2000}}{n} \quad (X = 0 \text{ o } 1)$$

asumió el valor

$$\hat{p} = \frac{800}{2000} = 0.40\,.$$

ii. Si en una segunda realización de X_1, $X_2, \ldots, X_{2000}$ se observó que 728 de ellos tienen preferencia por la marca A del producto, entonces

$$\hat{p} = \frac{728}{2000} = 0.364\,.$$

PROBLEMAS PROPUESTOS 2.1

1. La muestra 3.8, 4.5, 3.2, 7.1, 2.1, 4.2, 5.3, 1.1, 4.1 y 5.8 fue extraída de cierta proporción. “Estima informalmente”:

a. La media y desviación estándar poblacionales.

b. La proporción real de datos menores a 5.

2. La siguiente tabla de frecuencias representa una muestra extraída cierta ciudad.

Estatura (centímetros)	Frecuencia
162	6
164	14
166	20
170	18
174	2

“Estima informalmente”:

a. La media y desviación estándar.

b. La proporción de estaturas superiores a los 166 centímetros.

3. Una muestra de 20 estudiantes del primer semestre de bachillerato proporcionó la siguiente información, respecto a la marca del celular que portaban (*M* = *MOTOROLA*, *H* = *HWAWEI*, *A* = *APPLE*): *M, M, H, H, H, A, A, M, M, H, H, H, H, H, M, A, A, H, H, H.*

Estima:

a. La verdadera proporción de todos los estudiantes que portan celular Motorola.

b. Si tres de los celulares *APPLE* eran i - 33 estime la proporción real de todos los estudiantes que portaban un celular i - 33.

4. Obtén todas las muestras de tamaño 2 del conjunto $S = \{2, 4, 6, 8, 10\}$.

5. Supón que cada una de las variables aleatoria X_1, X_2 de la MAS sólo pueden asumir los valores 0 y 2.

a. Construye todas las realizaciones posibles.

b. Calcula la media aritmética de cada una de las realizaciones.

c. Calcula la media aritmética del conjunto formado por todas las medias aritméticas de las realizaciones.

6. En cada caso utilice números aleatorios y obtén una realización de tamaño n.

a. $N = 100$ y $n = 5$.

b. $N = 1000$ y $n = 12$.

c. $N = 10000$ y $n = 15$.

2.2 PARÁMETROS Y ESTADÍSTICOS

¿Qué debe aprender?

4. Inspecciona el comportamiento de la media y de la proporción muestrales como variables aleatorias, obtenidas por medio de la simulación física y/o computacional, dentro del contexto de un problema o investigación y en términos de tendencia, distribución y dispersión.
5. Infiere que los estimadores media y proporción se distribuyen de manera aproximadamente normal, al trabajar con muestras grandes.
6. Construye las distribuciones muestrales para la media y la proporción, bajo las condiciones del Teorema del Límite Central y a partir de la expresión para estandarizar la distribución normal.
7. Formula juicios acerca de la representatividad de una muestra, a partir de la probabilidad para un valor de la media o de la proporción muestrales, obtenidas por medio de la computadora o calculadora, dentro del contexto de un problema o una investigación.
8. Establece hipótesis o conjeturas acerca del comportamiento de una variable de una población. a partir de los datos de una muestra, de manera formal en el contexto de una investigación o un problema.

¿Por qué debe aprenderlo?

Las distribuciones muestrales son los mecanismos a partir de los cuales se efectúan inferencias estadísticas sobre los parámetros de interés. Las poblaciones se caracterizan por los valores de sus parámetros, mismos que suelen estimarse o inferirse utilizando estadísticas adecuadas.

Temática

Distribución muestral de medias. Distribución muestral de proporciones. Teorema del Límite Central.

¿QUÉ ES UNA DISTRIBUCIÓN MUESTRAL?

La estimación e inferencia de los parámetros que describen a una población se efectúa a través de la combinación de los datos de diversas realizaciones de una muestra aleatoria simple tomada de ella. En particular, cuando el parámetro objetivo (el que se quiere determinar) es un promedio, la forma de combinar las variables de la MAS (muestra aleatoria simple) es

$$\overline{X} = \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \ ,$$

siendo la realización de $X_1,\ X_2,\ \ldots,\ X_n$ el conjunto de números $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n$, y el estimador puntual el resultado de la operación

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} \ .$$

Dado $X_1,\ X_2,\ \ldots,\ X_n$ es una variable aleatoria, la combinación

$$\overline{X} = \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n}$$

también lo es, y por tal razón tiene asociada una función de probabilidad, misma que se conoce como distribución muestral.

DEFINICIÓN 1 (DISTRIBUCIÓN MUESTRAL)
La distribución de probabilidad de una estadística recibe el nombre de *distribución muestral de la estadística.*

EJEMPLO 1 (DISTRIBUCIONES MUESTRALES)

a. La distribución de probabilidad de la estadística (variable aleatoria)

$$\overline{X} = \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

se denomina “distribución muestral de la media”.

b. La distribución de probabilidad de la estadística

$$P = \frac{X}{n}$$

se llama “distribución muestral de la proporción”.

c. La distribución de probabilidad de la estadística

$$T = X_1 + X_2 + \ldots + X_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$$

se denomina “distribución muestral del total”.

d. La distribución de probabilidad de la estadística

$$S^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \bar{X} \right)^2$$

se conoce como “distribución muestral de la varianza”.

En particular, en este curso son de especial interés la “distribución muestral de la media” y la “distribución muestral de la proporción”.

NOTA a. Los parámetros de la distribución muestral de la estadística $\overline{X}$ (distribución muestral de la media) los representaremos como sigue:

i. Su valor esperado, representado por $\mu_{\overline{X}}$, se lee “media de la distribución muestral de la media”.

Su varianza, representada por $\sigma^2_{\overline{X}}$, se lee “varianza de la distribución muestral de la media”.

b. La distribución muestral de la estadística P (distribución muestral de la proporción) tiene como parámetros:

i. Su valor esperado, representado por μ_P, se lee “media de la distribución muestral de la proporción”.

ii. Su varianza, representada por σ^2_P, se lee “varianza de la distribución muestral de la proporción”.

¿QUÉ PROPIEDADES TIENEN LAS DISTRIBUCIONES MUESTRALES?

Veamos algunas de ellas.

EJEMPLO 2 (DISTRIBUCIÓN MUESTRAL DE LA MEDIA)

Sea la población

$$S = \{\ 2,\ 4,\ 6\ \}.$$

i. Tiene valor esperado

$$E[\ X\ ] = \frac{2+4+6}{3} = 4\ .$$

ii. Tiene varianza

$$V[\ X\ ] = \frac{(2-4)^2 + (4-4)^2 + (6-4)^2}{3} = \frac{8}{3}.$$

iii. Sea la MAS

$$X_1,\ X_2\ .$$

a. Las realizaciones de la muestra aleatoria simple

$$X_1,\ X_2$$

(tamaño dos), y sus medias respectivas (tabla de la izquierda), la fdp (función de distribución, tabla de la derecha) y su grafico se muestran a continuación

MUESTRA	ASIGNACIONES $\overline{x_i}$
$\{2, 2\}$	$\bar{x}(2,2)=\frac{2+2}{2}=2$
$\{2, 4\}$	$\bar{x}(2,4)=\frac{2+4}{2}=3$
$\{2, 6\}$	$\bar{x}(2,6)=\frac{2+6}{2}=4$
$\{4, 2\}$	$\bar{x}(4,2)=\frac{4+2}{2}=3$
$\{4, 4\}$	$\bar{x}(4,4)=\frac{4+4}{2}=4$
$\{4, 6\}$	$\bar{x}(6,4)=\frac{6+4}{2}=5$
$\{6, 2\}$	$\bar{x}(6,2)=\frac{6+2}{2}=4$
$\{6, 4\}$	$\bar{x}(6,4)=\frac{6+4}{2}=5$
$\{6, 6\}$	$\bar{x}(6,6)=\frac{6+6}{2}=6$

x	$f_{\overline{X}}(x)$
2	$\frac{1}{9}$
3	$\frac{2}{9}$
4	$\frac{3}{9}$
5	$\frac{2}{9}$
6	$\frac{1}{9}$

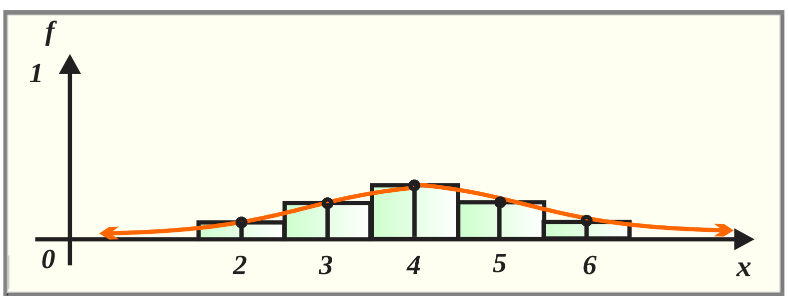


FIGURA 1

b. Con valor esperado

$$\mu_{\overline{X}}=2\left(\frac{1}{9}\right)+3\left(\frac{2}{9}\right)+4\left(\frac{3}{9}\right)+5\left(\frac{2}{9}\right)+6\left(\frac{1}{9}\right)=\frac{36}{9}=4.$$

Con varianza

$$\sigma_{\overline{X}}^2=(2-4)^2\left(\frac{1}{9}\right)+(3-4)^2\left(\frac{2}{9}\right)+(4-4)^2\left(\frac{3}{9}\right)+(5-4)^2\left(\frac{2}{9}\right)+(6-4)^2\left(\frac{1}{9}\right).$$

Así

$$\sigma^2_{\overline{X}} = \frac{4}{3}.$$

c. Puesto que $V[X] = \frac{8}{3}$, el tamaño de la muestra es $n = 2$ y $\sigma^2{}_{\overline{X}} = \frac{4}{3}$, entonces $\sigma^2_{\overline{X}} = \frac{V[X]}{2}$, por lo que es justificable establecer las conjeturas

$$E[X] = \mu_{\overline{X}} \text{ y } \sigma^2_{\overline{X}} = \frac{V[X]}{n},$$

es decir,

"La media de la distribución muestral de *la* ***media es igual a la media real (poblacional)" y "la*** *varianza de la distribución muestral de la media es igual la varianza de la población dividida por* ***el tamaño de muestra".***

EJEMPLO 3 (DISTRIBUCIÓN MUESTRAL DE LA PROPORCIÓN)

Una población está compuesta por 1 carta roja y 2 cartas blancas, es decir, $\{ r_1 , b_2 , b_3 \}$.

a. Si se extrae aleatoriamente una carta y se define como éxito que sea roja, entonces la variable aleatoria

$X =$ "número de cartas rojas en una extracción".

está distribuida binomialmente con $p = \frac{1}{3}$ y $n = 1$, por tanto,

$$E[X] = p = \frac{1}{3}, \text{ asimismo}$$

$$V[X] = (1)\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{2}{9} \text{ y desviación estándar } \sqrt{V[X]} = \frac{\sqrt{2}}{3}.$$

b. Por otra parte, todas las muestras de tamaño 2 del conjunto $\{ r_1 , b_2 , b_3 \}$ con su respectiva proporción P de cartas rojas son:

Muestra número	Muestra	P
1	$\{ r_1 , r_1 \}$	$P_1 = 1$
2	$\{ r_1 , b_2 \}$	$P_2 = \frac{1}{2}$
3	$\{ r_1 , b_3 \}$	$P_3 = \frac{1}{2}$
4	$\{ b_2 , r_1 \}$	$P_4 = \frac{1}{2}$
5	$\{ b_2 , b_2 \}$	$P_5 = 0$

Muestra número	Muestra	P
6	$\{ b_2 , b_3 \}$	$P_6 = 0$
7	$\{ b_3 , r_1 \}$	$P_7 = \frac{1}{2}$
8	$\{ b_3 , b_2 \}$	$P_8 = 0$
9	$\{ b_3 , b_3 \}$	$P_9 = 0$

c. La distribución muestral de la proporción de canicas rojas en la muestra es:

P	0	$\frac{1}{2}$	1
$f_P(x)$	$\frac{4}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{1}{9}$

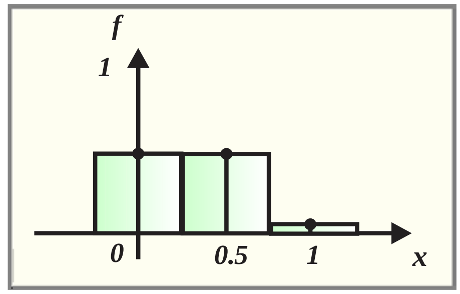


FIGURA 2

d. Con:
valor esperado

$$\mu_P = E[P] = (0)\left(\frac{4}{9}\right) + \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{4}{9}\right) + (1)\left(\frac{1}{9}\right) = \frac{1}{3}$$

y varianza

$$\sigma_P^2 = \left(0 - \frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{4}{9}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{4}{9}\right) + \left(1 - \frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{1}{9}\right) = \frac{1}{9}.$$

e.
i. La proporción de canicas rojas de la población está relacionada con la media de la distribución

$$E[X] = p = \frac{1}{3} = \mu_P .$$

Es decir, “la proporción de canicas rojas de la población es igual a la media de la distribución muestral de proporciones”.
ii. También es posible relacionar la varianza de la población con la varianza de la distribución muestral de la proporción, note que

$$V[X] = \frac{2}{9} = \left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)}{1} = \sigma_P^2$$

iii. En este problema $p = \frac{1}{3}$, $q = \frac{2}{3}$ y $n = 1$, por tanto, podemos establecer las conjeturas

$\mu_P = p$ y también $\sigma_P^2 = \frac{p \cdot q}{n}$, es decir,

*La media de la distribución muestral de la proporción es igual a la proporción real (poblacional)” y la varianza de la distribución muestral de la proporción es igual la varianza de la población **dividida por el tamaño de muestra”.***

A continuación, damos formalidad a las conjeturas hechas sobre las distribuciones muestrales señaladas en los dos ejemplos anteriores.

La estadística $\overline{X} = \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ es una variable aleatoria que se genera combinando la muestra aleatoria simple $X_1, X_2, \ldots, X_n$, por tanto, tiene asociada una media y una varianza, entonces

$$\mu_{\overline{X}} = E\left[\,\overline{X}\,\right] = E\left[\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n}\right],$$

$$= \frac{1}{n}E\left[\,X_1 + X_2 + \ldots + X_n\,\right] = \frac{1}{n}\left\{E\left[\,X_1\,\right] + E\left[\,X_1\,\right] + \cdots + E\left[\,X_n\,\right]\right\},$$

considerando que las variables aleatorias $X_1,\ X_2,\ldots,\ X_n$ están idénticamente distribuidas (idd) y que tienen el mismo valor esperado μ, obtenemos

$$\mu_{\overline{X}} = \frac{1}{n}\left\{\underbrace{\mu + \mu + \cdots + \mu}_{n\ veces}\right\} = \frac{1}{n}\left(\,n\mu\,\right) = \mu\,.$$

La varianza de la estadística $\overline{X}$ (que se representa por $\sigma^2_{\overline{X}}$) es

$$\sigma^2_{\overline{X}} = V\left[\,\overline{X}\,\right] = V\left[\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n}\right]$$

$$= \frac{1}{n^2}V\left[\,X_1 + X_2 + \ldots + X_n\,\right]$$

$$= \frac{1}{n^2}\left\{V\left[\,X_1\,\right] + V\left[\,X_1\,\right] + \cdots + V\left[\,X_n\,\right]\right\}.$$

Las variables aleatorias $X_1,\ X_2,\ldots,\ X_n$ están idénticamente distribuidas (idd) y cada una de ellas tiene varianza σ^2, entonces

$$\sigma^2_{\overline{X}} = \frac{1}{n^2}\left\{\underbrace{\sigma^2 + \sigma^2 + \cdots + \sigma^2}_{n\ veces}\right\} = \frac{1}{n^2}\left(\,n\sigma^2\,\right) = \frac{\sigma^2}{n}\,.$$

La formalización de las observaciones previas es la *propiedad 1*.

PROPIEDAD 1 (PROPIEDADES DE LA DISTRIBUCIÓN MUESTRAL DE LA MEDIA)

Sea la estadística $\overline{X} = \dfrac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n}$ constituida a partir de la MAS $X_1,\ldots,\ X_n$ extraída de una población con valor medio $E\left[\,X\,\right] = \mu$ y varianza $V\left[\,X\,\right] = \sigma^2$, entonces

i. $\mu_{\overline{X}} = \mu$.

ii. $\sigma^2_{\overline{X}} = \dfrac{\sigma^2}{n}$.

La distribución muestral de la proporción P se puede tratar como un caso particular de la distribución muestral de la media, sea $X_1,\ X_2,\ldots,\ X_n$ una muestra aleatoria simple, si X representa el total de las variables aleatorias que asumen el valor de 1 en una de sus realizaciones, entonces las restantes $n - X$ asumen el valor de cero. Luego la variable aleatoria $P = \dfrac{X}{n}$ se distribuye binomialmente, así mismo

$$\mu_{\overline{P}} = E[\, P \,] = E\left[\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n} \right] = \frac{1}{n} E[\, X \,] == \frac{1}{n}\{\, np \,\} = p \,,$$

y también

$$\sigma_P^2 = V[\, P \,] = V\left[\frac{X}{n} \right] = \frac{1}{n^2} V[\, X \,] = \frac{1}{n^2} npq = \frac{pq}{n} \,.$$

Los cálculos y observaciones previas los formaliza la *propiedad 2*.

PROPIEDAD 2 (PROPIEDADES DE LA DISTRIBUCIÓN MUESTRAL DE LA PROPORCIÓN)

Si en la estadística $P = \frac{X}{n}$, X representa el número de éxitos en la MAS $X_1, \ldots, X_n$ extraída de una población con valor medio $E[\, X \,] = np$ y varianza $V[\, X \,] = npq$, entonces

i. $\mu_P = p$.

ii. $\sigma_P^2 = \frac{pq}{n}$.

EJEMPLO 4 (PARÁMETROS DE LA DISTRIBUCIÓN MUESTRAL DE MEDIAS)

a. Suponga que "*Productos Lácteos S.A*." distribuye queso en empaques con la leyenda peso $\mu = 100$ gramos y $\sigma = 10$ gramos, entonces una muestra aleatoria de tamaño $n = 25$ de quesos tiene media, varianza y desviación estándar

$$\mu_{\overline{X}} = \mu = 100 \,,\ \sigma_{\overline{X}}^2 = \frac{\sigma^2}{n} = \frac{10^2}{25} = 4 \ \text{ y } \ \sigma_{\overline{X}} = \frac{\sigma}{n} = \frac{10}{\sqrt{25}} = 2 \ \text{ respectivamente.}$$

b. Si el regimiento, comandado por el *teniente Benito Camelo* se caracteriza porque sus integrantes tienen un peso medio de $\mu = 68$ con una desviación estándar $\sigma = 3$ kilogramos de peso. Al seleccionar una muestra aleatoria simple de tamaño $n = 25$, tendremos

$$\mu_{\overline{X}} = \mu = 68 \,,\ \sigma_{\overline{X}}^2 = \frac{\sigma^2}{n} = \frac{3^2}{25} = \frac{9}{25} \ \text{ y } \ \sigma_{\overline{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{3}{\sqrt{25}} = 0.6 \,.$$

c. La fábrica de golosinas del Sr. Aquiles Baeza distribuye caramelos en bolsas con la leyenda: peso neto $\mu = 100$ gramos y desviación estándar $\sigma = 10$ gramos. Al ser seleccionada una muestra aleatoria de $n = 25$ bolsas, entonces la media, la varianza y la desviación estándar de la distribución muestral de la media son $\mu_{\overline{X}} = \mu = 100$, $\sigma_{\overline{X}}^2 = \frac{\sigma^2}{n} = \frac{10^2}{25} = 4$ y $\sigma_{\overline{X}} = \frac{10}{\sqrt{25}} = 2$ respectivamente.

EJEMPLO 5 (PARÁMETROS EN LA DISTRIBUCIÓN MUESTRAL DE PROPORCIONES)

a. Suponga que la proporción real de roedores que sobreviven más de 15 minutos al tragar una primera dosis de veneno es $p = 0.10$. Si se analiza una muestra aleatoria simple de $n = 25$ roedores que han ingerido el veneno, entonces: la media, la varianza y la desviación estándar de la distribución muestral de la proporción son

$$\mu_P = p = 0.10\ ,\ \sigma_P^2 = \frac{(0.10)(0.90)}{25} = 0.0036 \text{ y } \sigma_P = \sqrt{\frac{(0.10)(0.90)}{25}} = 0.06 \text{ respectivamente.}$$

b. Suponga que sólo el 40% de estudiantes de cierta institución educativa visitan la biblioteca, si se utiliza una muestra aleatoria de 100 integrantes de la institución educativa, entonces la media, la varianza y la desviación estándar de la distribución muestral de la proporción son:

$$\mu_P = p = 0.40\ ,\ \sigma_P^2 = \frac{(0.40)(0.60)}{100} = 0.0024 \text{ y } \sigma_P = \sqrt{\frac{(0.40)(0.60)}{100}} = 0.048989 \text{ respectivamente.}$$

c. Una investigación demostró que el 64% de los electores inscritos el padrón electoral de cierta población recibió una despensa para votar por cierto partido. Si se toma una muestra aleatoria simple de $n = 25$ electores, entonces: la media, la varianza y la desviación estándar de la distribución muestral de la proporción son:

$$\mu_P = p = 0.64\ ,\ \sigma_P^2 = \frac{(0.64)(0.36)}{25} = 0.009216 \text{ y } \sigma_P = \sqrt{\frac{(0.64)(0.36)}{25}} = 0.0959\ .$$

¿CÓMO SE DISTRIBUYEN LAS DISTRIBUCIONES MUESTRALES?

Tanto la distribución muestral de la media como la distribución muestral de proporciones tienen asignadas una función de probabilidad, por tanto, surgen las preguntas

¿cuál es su forma específica?, ¿cómo se distribuyen?

Las respuestas a las preguntas anteriores se relacionan con el origen de la muestra aleatoria y con su tamaño, es decir:

i. La distribución de probabilidad de la población de donde fue extraída la muestra aleatoria simple (lo que significa conocer los valores de sus parámetros).

ii. El tamaño de la muestra aleatoria simple.

Se puede justificar que, si la población origen de la muestra aleatoria simple está distribuida normalmente, ambas distribuciones muestrales (de la media y de la proporción) se distribuirán normalmente, o en su caso, si el tamaño de la muestra aleatoria simple es mayor o igual que 30, el TEOREMA DEL LÍMITE CENTRAL (O TEOREMA CENTRAL DEL LÍMITE) asegura que ambas distribuciones muestrales tienen una función de probabilidades normal. Por tanto,

i. Si la MAS se obtuvo de una población con distribución normal, la distribución muestral asociada a

$$\overline{X} = \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\ ,$$

Sigue una distribución normal.

ii. Si la MAS se obtuvo de una población con distribución no normal, pero su tamaño es mayor o igual a 30 (el tamaño de muestra es “grande”), la distribución de probabilidad de la distribución muestral de la variable aleatoria

$$\overline{X} = \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

es aproximadamente normal.

El TEOREMA DEL LÍMITE CENTRAL *(o Teorema Central del Límite*), es el resultado de mayor utilidad e importancia en el cálculo de probabilidades y es la justificación analítica de la aproximación de las diversas distribuciones de probabilidades a distribución la normal, su enunciado fue obra del Matemático Aleksandr Liapunov en el Siglo XX, quien además lo demostró.

PROPIEDAD 3 (TEOREMA DEL LÍMITE CENTRAL)
Sea $X_1, \ldots, X_n$ una sucesión de variables aleatorias independientes, idénticamente distribuidas y de tamaño n (suficientemente grande o que aumenta indefinidamente) extraída de una población con valor medio
$E[\ X\ ] = \mu$ y varianza $V[\ X\ ] = \sigma^2$ (ambas finitas), entonces la variable aleatoria

$$Z_n = \frac{\left(\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=i}^{n} X_i\right) - \mu}{\sqrt{\dfrac{\sigma^2}{n}}}$$

converge en distribución a la variable aleatoria normal estándar.

NOTA

a. En el contexto de la distribución muestral de la media $\bar{X}$, el Teorema del Límite Central afirma:
“la variable aleatoria

$$Z_n = \frac{\left(\dfrac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n}\right) - \mu}{\sqrt{\dfrac{\sigma^2}{n}}}$$

converge en distribución a la distribución de la variable aleatoria normal estándar Z”.

b. En el contexto de la distribución muestral de la proporción P, la variable aleatoria

$$Z_n = \frac{\left(\dfrac{X}{n}\right) - p}{\sqrt{\dfrac{pq}{n}}}$$

converge en distribución (se aproxima a la distribución) de la variable aleatoria normal estándar Z.

c. En la práctica, la condición “tamaño de la muestra es suficientemente grande” se considera satisfecha cuando n es mayor o igual que 30.

La *figura 3* ilustra un caso particular del Teorema del Límite Central.

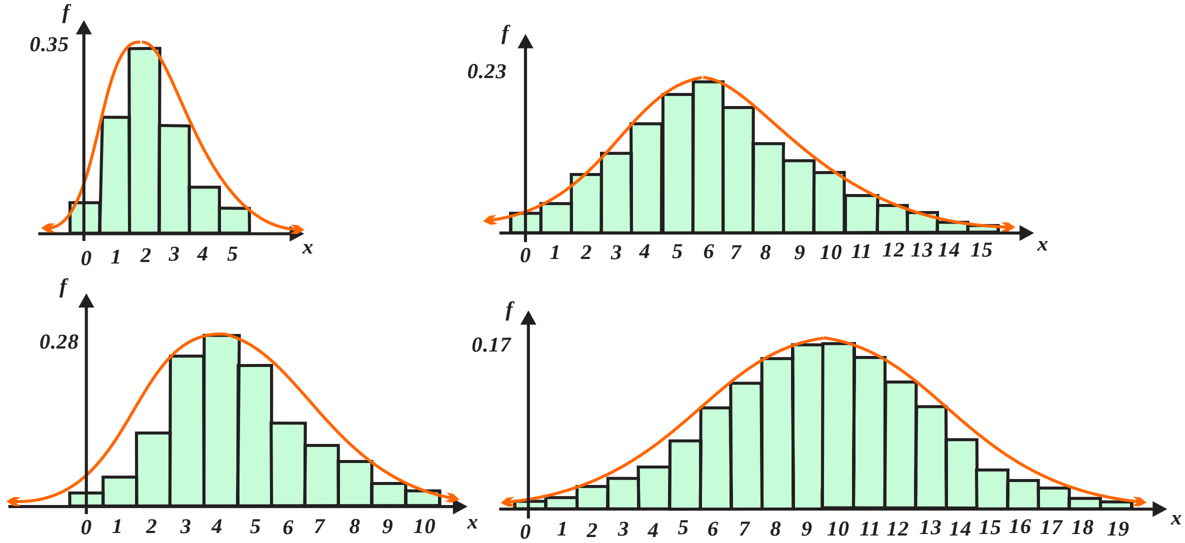


FIGURA 3

¿CÓMO SE CALCULAN PROBABILIDADES DE DISTRIBUCIONES MUESTRALES?

EJEMPLO 6 (INGRESOS)
El monto promedio de ingresos (por tres horas de trabajo) de los "limpiaparabrisas" que operan en los principales cruces de avenidas de la Ciudad de México es $\$125$ con desviación estándar de $\$24$.

a. Si se seleccionan todas las muestras posibles de tamaño $n=36$, entonces la estadística $\overline{X}$ se distribuyen normalmente con $\mu_{\overline{X}} = 125$ y $\sigma_{\overline{X}} = \frac{24}{\sqrt{36}} = 4$. El tamaño de muestra garantiza el que el comportamiento normal del promedio es normal, por tanto, la probabilidad de que el ingreso promedio (por tres horas) sea menor a $\$115$ es

$$p\left(\overline{X} \leq 115\right) = p\left(Z \leq \frac{115-125}{4}\right) = p\left(Z \leq -2.5\right) = \Phi\left(-2.5\right) = 0.0062\,.$$

b. Si se selecciona una muestra aleatoria simple de 64 "limpiaparabrisas" (que operan en la Ciudad de México), su tamaño garantiza que el comportamiento normal del ingreso medio (por tres horas) sea menor o igual a $\$115$, por tanto, la variable aleatoria $\overline{X}$ se distribuye en forma normal con parámetros

$$\mu_{\overline{X}} = 125 \text{ y } \sigma_{\overline{X}} = \frac{24}{\sqrt{64}} = 3,$$

por tanto,

$$p\left(\overline{X} \leq 115\right) = p\left(Z \leq \frac{115-125}{3}\right) = p\left(Z \leq -3.33\right) = \Phi\left(-3.33\right) = 0.0004\,.$$

EJEMPLO 7 (DIÁMETROS)

El distribuidor de las tapaderas de las botellas de la compañía Coca Cola S. A., afirma que éstas se distribuyen normalmente, tienen un diámetro promedio de $\mu = 1.001$ centímetros y desviación estándar $\sigma = 0.003$ centímetros, por tanto:

a. La probabilidad de que una muestra aleatoria de $n = 9$ tapaderas tenga un diámetro promedio comprendido entre 1.009 y 1.012 (inclusive) centímetros se calcula como sigue:

Puesto que $n = 9$, entonces $\mu_{\overline{X}} = 1.001$ y $\sigma_{\overline{X}} = \dfrac{0.003}{\sqrt{9}} = 0.001$, luego

$$p\left(1.009 \le \overline{X} \le 1.012 \right) = p\left(\frac{1.009 - 1.001}{0.001} \le Z \le \frac{1.012 - 1.001}{0.001} \right) = p\left(8 \le Z \le 11 \right) = 0 .$$

b. La probabilidad de que una muestra aleatoria de $n = 9$ tapaderas tenga un diámetro promedio mayor que 1.00102 centímetros se calcula como sigue

$$p\left(\overline{X} > 1.00102 \right) = p\left(Z \ge \frac{1.00102 - 1.001}{0.001} \right) = p\left(Z \ge 0.02 \right) = \Phi\left(-0.02 \right) = 0.4920 .$$

c. Para responder la pregunta ¿sobre qué longitud de diámetro promedio se encuentra el 90% de las tapaderas producidas por el taller?, sea $\bar{x}_0$ el diámetro promedio mínimo de las tapaderas, entonces

$$p\left(\overline{X} \ge \bar{x}_0 \right) = 0.90, \text{ es decir, } p\left(Z \ge \frac{\bar{x}_0 - 1.001}{0.001} \right) = 0.90$$

de las tablas de la distribución normal obtenemos $z_{90} = 1.2816$, de donde,

$$\frac{\bar{x}_0 - 1.001}{0.001} = 1.2816 \text{ , o bien } \bar{x}_0 = \left(1.2816 \right)\left(0.001 \right) + 1.001 = 1.0022816 \text{ centímetros.}$$

EJEMPLO 8 (TIEMPO DE TRANSPORTE)

El tiempo de espera de los pasajeros de los autobuses, “Anaranjados de la RTP”, se distribuye normalmente con parámetros $\mu = 8.2$ minutos y $\sigma = 1.5$ minutos. Se observa una muestra aleatoria de 49 personas que utilizan ese medio de transporte para ir a su hogar. De la información anterior concluimos que la distribución muestral de $\overline{X}$ se distribuye en forma normal con parámetros

$$\mu_{\overline{X}} = \mu = 8.2 \text{ y } \sigma_{\overline{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{1.5}{\sqrt{49}} = 0.214 .$$

Entonces:

a. $p\left(\overline{X} < 8 \right) = p\left(Z < \dfrac{8 - 8.2}{0.214} \right) = p\left(Z < -0.935 \right) = \Phi\left(-0.935 \right) = 0.1740 .$

b. $p\left(7.5 \le \overline{X} \le 8.5 \right) = p\left(\dfrac{7.5 - 8.2}{0.214} \le Z \le \dfrac{8.5 - 8.2}{0.214} \right) = p\left(-3.27 \le Z \le 1.40 \right)$

$$= \Phi\left(1.40 \right) - \Phi\left(-3.27 \right) = 0.9192 - 0.0005 = 0.9187.$$

c. $p\left(\overline{X} > 7.5 \right) = p\left(Z > \dfrac{7.5 - 8.2}{0.214} \right) = p\left(Z > -3.27 \right) = \Phi\left(3.27 \right) = 0.9995 .$

d. Sea $\bar{t}_0$ el tiempo promedio máximo desconocido (los otros valores de la estadística son menores o iguales), entonces $p\left(\overline{X} \leq \bar{t}_0\right) = 0.95$, luego

$$p\left(Z < \frac{\bar{t}_0 - 8.2}{0.214}\right) = 0.95,$$

el percentil correspondiente es

$$z_{95} = 1.6449 \text{, así } \frac{\bar{t}_0 - 8.2}{0.214} = 1.6449,$$

es decir,

$$\bar{t}_0 = (1.6449)(0.214) + 8.2 = 8.552 \text{ minutos.}$$

En la evaluación de probabilidades referentes a la estadística P es necesario tener en cuenta las correcciones por continuidad. Dado que en la vida real la exactitud no existe, se establece el concepto de "precisión" que indica que tan próximo se encuentra la medida que toma la variable del valor real, por tanto, se considera el error de precisión como la mitad de mínima graduación del aparato o instrumento de medida. Si la mínima escala del instrumento de medida es, por ejemplo,

i. 1 kilogramo, entonces la precisión es ± 0.5 kilogramos.

ii. 1 metro, entonces la precisión es ± 0.5 metros.

iii. 1 milímetro, entonces la precisión es ± 0.5 milímetros.

iv. 1 litro, entonces la precisión es ± 0.5 litros.

La cantidad ± 0.5 se denomina corrección por continuidad. La *tabla1* muestra cómo transformar una cantidad discreta a continua:

Cantidad discreta	Observación	Transformación	Forma continua
$X = 8$	Incluye al 8	Sumar y restar 0.5	$7.5 \leq X \leq 8.5$
$X < 8$	No Incluye al 8	Restar 0.5	$X < 7.5$
$X > 8$	No Incluye al 8	Sumar 0.5	$X > 8.5$
$X \leq 8$	Incluye al 8	Sumar 0.5	$X \leq 8.5$
$X \geq 8$	Incluye al 8	Restar 0.5	$X \geq 7.5$

TABLA 1

En proporciones, la corrección por continuidad toma la forma

$$\pm \frac{1}{2n},$$

en donde n representa el tamaño de la muestra, la forma de operar es similar a la del cuadro anterior y se muestra en la *tabla 2*.

Forma discreta	Observación	Transformación	Forma continua
$P = 0.8$	Incluye al 0.8	Sumar y restar $\frac{1}{2n}$	$0.8 - \frac{1}{2n} \le P \le 0.8 + \frac{1}{2n}$
$P < 0.8$	No Incluye al 0.8	Restar $\frac{1}{2n}$	$P < 0.8 - \frac{1}{2n}$
$P > 0.8$	No Incluye al 0.8	Sumar $\frac{1}{2n}$	$P > 0.8 + \frac{1}{2n}$
$P \le 0.8$	Incluye al 0.8	Sumar $\frac{1}{2n}$	$P \le 0.8 + \frac{1}{2n}$
$P \ge 0.8$	Incluye al 0.8	Restar $\frac{1}{2n}$	$P \ge 0.8 - \frac{1}{2n}$

TABLA 2

EJEMPLO 9 (PROPORCIÓN DE PALETAS)

Suponga que las bolsas de paletas "Chupa Chus" contienen 1000 unidades y que tres de cada diez son de sabor "albóndiga roja", entonces:

a. La probabilidad de que la proporción muestral de paletas sabor "albóndiga roja" sea mayor o igual a 0.29 se calcula como sigue

$$p\left(P \ge 0.29\right) = p\left(Z \ge \frac{0.29 - \frac{1}{2n} - \mu_P}{\sigma_P}\right) = p\left(Z \ge \frac{0.29 - \frac{1}{2000} - 0.3}{0.0205}\right)$$

$$= p\left(Z \ge -0.537\right) = \Phi\left(0.537\right) = 0.2979 .$$

b. La probabilidad de que la proporción muestral de paletas sabor "albóndiga roja" sea menor o igual a 0.31 es

$$p\left(P \le 0.31\right) = p\left(Z \le \frac{0.31 + \frac{1}{2n} - \mu_P}{\sigma_P}\right)$$

$$= p\left(Z \le \frac{0.31 + \frac{1}{2000} - 0.3}{0.0205}\right) = p\left(Z \le 0.537\right) = \Phi\left(0.537\right) = 0.2979 .$$

EJEMPLO 10 (PROPORCIÓN DE APARATOS ELECTRÓNICOS)

Suponga que en uno de cada dos departamentos, de la unidad habitacional "Las Pocilgas", existe un aparato electrónico de la marca LG y que de la unidad habitacional se selecciona una muestra aleatoria simple de 120 departamentos. Entonces

$$\mu_P = p = 0.5 , \ \sigma_P^2 = \frac{\left(0.5\right)\left(0.5\right)}{120} = 0.0021 \ \text{ y } \ \sigma_P = 0.0456 .$$

a. La probabilidad de que la proporción de aparatos electrónicos LG se encuentre entre él 40% y el 60% inclusive (considere ambos extremos) es

$$p\left(0.40 \le P \le 0.60\right) = p\left(\frac{0.40 - \frac{1}{240} - 0.5}{0.0456} \le Z \le \frac{0.60 + \frac{1}{240} - 0.5}{0.0456}\right)$$

$$= p\left(-2.28 \le Z \le 2.28\right) = D\left(2.28\right) = 0.9774 .$$

b. La probabilidad de que la proporción de aparatos electrónicos de la marca *LG* sea de 75% o más es

$$p\left(P \ge 0.75\right) = p\left(Z \ge \frac{0.75 - \frac{1}{240} - 0.5}{0.0456}\right) = p\left(Z \ge 5.391\right) = \Phi\left(-5.391\right) \approx 0 .$$

c. La proporción correspondiente a 30 departamentos con aparatos de esa marca es $\frac{30}{120} = 0.25$, entonces la probabilidad de que haya 30 o más departamentos con aparatos electrónicos de la marca *LG* es

$$p\left(P \ge 0.25\right) = p\left(Z \ge \frac{0.25 - \frac{1}{240} - 0.5}{0.0456}\right) = p\left(Z \ge -5.5738\right) = \Phi\left(5.5738\right) \approx 1.$$

d. La proporción correspondiente a 60 departamentos con aparatos electrónicos de la marca *LG* es $\frac{30}{60} = 0.50$, por tanto, la probabilidad de que la mitad o menos de los departamentos incluyan aparatos electrónicos de la marca señalada es

$$p\left(P \le 0.50\right) = p\left(Z \le \frac{0.5 + \frac{1}{240} - 0.5}{0.0456}\right) = p\left(Z \le 0.091\right) = \Phi\left(0.091\right) \approx 0.535 .$$

EJEMPLO 11 (PROPORCIÓN DE CONSUMIDORES)

Miguel Ángel Rodríguez afirma que el 5% de los estudiantes con domicilio en Milpa Alta consume algún tipo de enervante, entonces

$$\mu_P = p = 0.05 \text{ , } \sigma_P^2 = \frac{\left(0.05\right)\left(0.95\right)}{60} = 0.000792 \text{ y } \sigma_P = 0.02814 .$$

a. La probabilidad de que en un grupo de 60 estudiantes con domicilio en Milpa Alta, el 11% o más consuman algún tipo de enervante es

$$p\left(P \ge 0.11\right) = p\left(Z \ge \frac{0.11 - \frac{1}{120} - 0.05}{0.02814}\right) = p\left(Z \ge 1.83\right) = \Phi\left(-1.83\right) = 0.0336 .$$

b. La probabilidad de que en un grupo de 60 estudiantes con domicilio en Milpa Alta menos del 3% consuman algún tipo de enervante es

$$p\left(P < 0.03\right) = p\left(Z < \frac{0.03 - \frac{1}{120} - 0.05}{0.02814}\right) = p\left(Z < -1.007\right) = \Phi\left(-1.007\right) \approx 0.1562 .$$

c. La probabilidad de que en un grupo de 60 estudiantes con domicilio en Milpa Alta más de la cuarta parte consuman algún tipo de enervante, se calcula considerando que más de la cuarta parte corresponde a 16 o más, en proporción a $\frac{16}{60} = 0.27$ o más, por tanto,

$$p\left(P > 0.27\right) = p\left(Z \geq \frac{0.27 - \frac{1}{120} - 0.05}{0.02814}\right) = p\left(Z > 7.52\right) = \Phi\left(-7.52\right) \approx 0\,.$$

2.2 PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Se seleccionaron muestras de tamaño n de poblaciones con la media y varianza indicadas; determina la media y la desviación estándar de la distribución muestral de medias. Supón muestreo con reemplazo.
a. $n = 25$, $\mu = 10$ y $\sigma^2 = 9$.
b. $n = 49$, $\mu = 150$ y $\sigma^2 = 4$.
c. $n = 36$, $\mu = 6$ y $\sigma^2 = 1$.

2. Se seleccionaron muestras de tamaño n de poblaciones con la media y varianza señaladas, determina la media y la desviación estándar de la distribución muestral de medias. Supón muestreo con reemplazo.
a. $n = 25$, $\mu = 1$ y $\sigma^2 = 16$.
b. $n = 64$, $\mu = 16$ y $\sigma^2 = 25$.
c. $n = 16$, $\mu = 6$ y $\sigma^2 = 100$.

3. Se seleccionaron muestras de tamaño n de poblaciones con proporción real p, determina la media y la desviación estándar de la distribución muestral de proporciones.
a. $n = 100$ y $p = 0.4$.
b. $n = 400$ y $p = 0.01$.
c. $n = 490$ y $p = 0.6$.
d. $n = 9$ y $p = 0.25$.

4. Se seleccionaron muestras de tamaño n de poblaciones con proporción real p, determina la media y la desviación estándar de la distribución muestral de proporciones si
a. $n = 64$ y $p = 0.25$.
b. $n = 400$ y $p = 0.90$.
c. $n = 625$ y $p = 0.75$.
d. $n = 4$ y $p = 0.1$.

5. El diámetro de los buñuelos "*medianos*" que expende *"Mambo S.A."*, es una variable aleatoria normal con $\mu = 12$ centímetros y una desviación estándar de $\sigma = 0.04$ centímetros.
a. Si $\overline{X}$ es el diámetro promedio de una muestra aleatoria de 16 buñuelos *"medianos"* de *"Mambo S.A."*, ¿cuál es el valor medio de la distribución muestral de medias y cuál es su varianza?
b. Responde las preguntas del inciso anterior para una muestra de 64 buñuelos *"medianos"*.
c. Evalúe $p\left(11.99 \le \overline{X} \le 12.01\right)$ para $n = 16$ buñuelos "*medianos*".

6. La cantidad de minerales contenida en los garrafones de agua de la compañía *"Acuafont S.A."* es una variable aleatoria con media $\mu = 4.0$ gramos y una desviación estándar $\sigma = 1.5$ gramos.
Un camión de *"Acuafont S.A."* transporta 100 garrafones.
a. ¿Cuál es la probabilidad de que la cantidad media de minerales en los garrafones de

"Acuafont S.A." esté entre 3.5 y 3.8 gramos?
b. ¿Cuál es la probabilidad de que la cantidad media de minerales en los garrafones de *"Acuafont S.A."* sea superior a los 4.2 gramos?
c. ¿Cuál es la probabilidad de que la cantidad media de minerales en los garrafones de *"Acuafont S.A."* sea inferior a los 3.9 gramos?
d. ¿Qué contenido medio máximo de minerales tiene el 99% de los garrafones de *"Acuafont S.A."*?

7. La compañía "Oasis" talará 400 árboles de la Ciudad de México. La distribución de los diámetros de los árboles es normal con $\mu = 44$ centímetros y $\sigma = 4$ centímetros.
a. Determina la probabilidad de que el diámetro medio de los árboles talados por *"ciudad de vanguardia"* se encuentre entre 43 y 44.5 centímetros.
b. Determina la probabilidad de que el diámetro medio de los árboles talados por "Oasis" se encuentre entre 0 y 46 centímetros.

8. Los años de estudio de las personas adultas de la Alcaldía de Tláhuac, tiene una media $\mu = 11$ años y varianza de $\sigma^2 = 9$. Considera una encuesta aleatoria efectuada a 100 adultos.
a. ¿Cuál es la probabilidad de obtener un nivel medio de años de estudios entre 10 y 12 años.
b. ¿Cuál es la probabilidad de obtener un nivel medio de años de estudios sea mayor a 13 años?

9. El contenido de potasio de un *"plátano macho"* una distribución normal con $\mu = 0.8$ miligramos y $\sigma = 0.1$ miligramos. Considere un racimo con 25 *"plátanos machos"*.
a. ¿Cuál es la probabilidad de que la cantidad media de potasio en los 25 *"plátanos machos"* sea superior a los 0.82 miligramos?
b. ¿Cuál es la probabilidad de que la cantidad media de potasio en los 25 *"plátanos machos"* sea menor a los 0.86 miligramos?
c. ¿Qué contenido promedio máximo de potasio existe en el 99% de los 25 *"plátanos machos"*?
d. ¿Qué contenido promedio mínimo de potasio existe en el 5% de los 25 *"plátanos machos"*?

10. Considera un lote de 100 bultos con la leyenda *"Harina la Estrella"* seleccionados al azar. Si el peso especificado en cada saco es $\mu = 50$ kilogramos y la desviación estándar es $\sigma = 10$ kilogramos, calcula:
a. $p\left(49.75 \le \overline{X} \le 50.25 \right)$.
b. Si $\mu = 49.8$ calcule

$$p\left(49.75 \le \overline{X} \le 50.25 \right).$$

11. El tiempo utilizado en llenar una solicitud de trabajo se distribuye normalmente con $\mu = 10$ y $\sigma = 2$ minutos. Si 49 individuos llenan la solicitud de trabajo por día.
a. ¿Cuál es la probabilidad de que el tiempo sea a lo más de 13 minutos?
b. ¿Cuál es la probabilidad de que el tiempo medio sea mayor a 11 minutos?
c. ¿Cuál es la probabilidad de que el tiempo medio esté entre los 7 y los 11 minutos?
d. ¿Qué tiempo medio mínimo por día se ocupará en llenar el 10% de las solicitudes?

12. El tiempo medio que tarda una rata en devorar un trozo de pan es una variable aleatoria normal con media $\mu = 1.5$ minutos y desviación estándar $\sigma = 0.35$ minutos. A cinco ratas se les proporciona un trozo de pan.
a. ¿Cuál es la probabilidad de que el tiempo medio que tarda la rata en devorarlo esté entre 1.7 y 1.8 minutos?
b. ¿Cuál es la probabilidad de que el tiempo medio que tarda la rata en devorarlo sea menor de 2 minutos?
c. ¿Cuál es la probabilidad de que el tiempo medio que tarda la rata en devorarlo sea mayor a los 1.48 minutos?
d. ¿Cuál es la probabilidad de que el tiempo medio que tarda la rata en devorarlo sea a lo más de 1.7 minutos?

13. La dureza de los cristales, fabricados por *"Crisa"*, se distribuye normalmente con $\mu = 50$ y $\sigma = 4.5$ kilogramos.
a. ¿Cuál es la probabilidad de que la dureza media de una muestra aleatoria de 9 cristales producidos por *"Crisa"* sea por lo menos de 52 kilogramos?
b. ¿Cuál es la probabilidad de que la dureza media de una muestra aleatoria de 36 cristales sea por lo menos de 52 kilogramos?

14. Un profesor sólo resuelve correctamente el 20% de los problemas que presenta en clase. Si en un curso propone 64 problemas:
a. ¿Cuál es la probabilidad de que la proporción de problemas que resuelve correctamente sea del 25% o más?
b. ¿Cuál es la probabilidad de que la proporción de problemas que resuelva correctamente sea a lo más del 32%?

15. Se ha encontrado que el 2% de los habitantes de *San Iván* se levantan antes de las $5:30$. Sea una muestra de 400 habitantes de *San Iván*. Determina:
a. La probabilidad de que la proporción de los que se levantan antes de las $5:30$ sea de 3% o más.
b. La probabilidad de que la proporción de los que se levantan antes de las $5:30$ sea de 2% o menos.
c. La probabilidad de que la proporción real esté entre 13% y 27% (incluya ambos extremos).
d. La probabilidad de que la proporción real esté entre Esté entre 4% y el 8% (no incluya los extremos).

16. Un estudio demostró que el 46% de los últimos nacimientos en el hospital *"CEE"* fueron hombres. Calcula la probabilidad de que en los próximos:
a. 200 nacimientos sea una mayoría de hombres.
b. 1000 nacimientos sea una mayoría de hombres.
c. 200 nacimientos sean más de 105 mujeres.

17. La proporción de "*huevos pintos*" que ponen las gallinas de la granja *"San Cristóbal"* es 0.5. Determine la probabilidad de que la proporción de "*huevos pintos*" seleccionados por uno de los trabajadores, en las próximas 200 recolecciones sea de:
a. Menor al 40%.
b. Entre 43% y 57%, inclusive.
c. En las próximas 200 selecciones haya más de 108 "*huevos pintos*".

18. El jefe de control de calidad de la fábrica de golosinas *"El Cerezo"*, afirma que el 5% de los bombones que elaboran pesan más de 5 gramos. Cada bolsa contiene 100 bombones. Si hace una entrega de 1000 bolsas a cierto almacén.
a. ¿Cuántas bolsas tienen menos de 20 bombones con peso mayor a 5 gramos?
b. ¿Cuántas bolsas tienen 48 o más bombones con peso mayor a 5 gramos?
c. ¿Cuántas bolsas tienen menos de 90 bombones con peso menor a 5 gramos?
d. ¿Cuántas bolsas tienen 98 o más bombones con peso menor a 5 gramos?

19. En un estudio de mercado se determinó que el 78% de los habitantes de la región consumen el refresco *"ArciCola"*. Considere una muestra de 50 personas de la región. Determina la probabilidad de que la proporción de personas que consume el refresco *"ArciCola"*:
a. Sea superior al 80%.
b. Sea superior al 20%.
c. Menos de 30 afirmen consumir *"ArciCola"*.
d. Menos de 36 afirmen no consumir el refresco *"ArciCola"*.

20. Suponga que las *"aspirinas"* son efectivas el 74% de las veces en que se utilizan en el tratamiento del dolor de cabeza.
a. A 16 personas con dolor de cabeza se les administran aspirinas. ¿Cuál es la probabilidad de que más de 4 se recuperen del dolor de cabeza?
b. A 140 personas que padecen dolor de cabeza se les administran aspirinas, ¿cuál es la probabilidad de que más de 4 se recuperen del dolor de cabeza?

21. Una encuesta reveló que el 70% de los taxistas que ingresaron frecuentemente a la zona de "Peralvillo" habían sido asaltados por lo menos una vez en los últimos cinco años. Si se selecciona una muestra de 200 taxistas que ingresan frecuentemente a la zona de "Peralvillo".
a. ¿Cuál es la probabilidad de que la proporción de taxistas asaltados por lo menos una vez en los últimos cinco años esté entre 60% y él 80%?
b. ¿Cuál es la probabilidad de que la proporción de taxistas asaltados por lo menos una vez en los últimos cinco años sea mayor al 66%?
c. ¿Cuál es la probabilidad de que la proporción de taxistas asaltados por lo menos una vez en los últimos cinco años sea menor al 74%?

2.3 RESUMEN Y AUTOEVALUACIÓN

ACTIVIDADES

SECCIÓN 2.1

ACTIVIDAD 1

Considera una población infinita con parámetros $\mu = 8$ y $\sigma^2 = 9$ suponga que se extrae una muestra aleatoria de tamaño n de esa población.

a. Completa la tabla:

n	5	10	50	100	1000
$\mu_{\overline{X}}$					
$\sigma^2_{\overline{X}}$					
$\sigma_{\overline{X}}$					

b. ¿Qué sucede conforme n se incrementa?, ¿qué puede concluir?

ACTIVIDAD 2

Considera una población de tamaño N y una muestra de tamaño $n = 10$.

a. Complete la siguiente tabla:

N	50	100	500	1000	10000
$\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}$					

b. ¿Qué sucede conforme N se incrementa? ¿Qué puede concluir?

ACTIVIDAD 3

Considere una población infinita con proporción real $p = 0.8$ y suponga que se extrae una muestra aleatoria de tamaño n.

a. Complete la tabla.

b. ¿Qué ocurre conforme n se incrementa?, ¿qué puede concluir?

n	50	100	500	1000	10000
$\sqrt{\frac{N-n}{N-1}pq}$					

ACTIVIDAD 4

Consigue una bolsa de golosinas M&M, agítala y extrae aleatoriamente un número específico de ellas. Cuente el número de golosinas verdes y calcule la proporción muestral.

Repite el proceso anterior (reemplazando las golosinas) varias veces y calcula la media las proporciones muestrales obtenidas. Construye un intervalo centrado en la media obtenida, tan pequeño como le sea posible, pero trate de que contenga a la proporción de golosinas verdes en la bolsa.

Compare la proporción poblacional y la media de las proporciones.

SECCIÓN 2.2

ACTIVIDAD 1

Calcula la proporción de mujeres en el curso de Estadística.

a. Construya la distribución de probabilidades para X.

b. Calcule el valor esperado y la desviación estándar, interprételas.

ACTIVIDAD 2

Establece la regla empírica para la distribución normal.

ACTIVIDAD 3

Verifica el teorema de Chebyshev para $K = 2$, $K = 3$ y $K = 4$.

RESUMEN

Sección 2.1

Característica	Una característica (o carácter) de un objeto (elemento o individuo) es una propiedad a partir de la que es posible clasificar y estudiar.
Población Estadística	Conjunto de todos objetos que es posible seleccionar para ser objeto de estudio.
Muestra	Cualquier parte de una población o subconjunto de la población.
Tamaño de muestra	El número de objetos (elementos o individuos) de la muestra.
Muestra aleatoria simple	$X_1, X_2, \ldots, X_n$ variables aleatorias independientes con idénticamente distribuidas.
Realización de una Muestra aleatoria simple	Cuando las variables aleatorias $X_1, X_2, \ldots, X_n$ de la MAS asumen los valores $x_1, x_2, \ldots, x_n$ respectivamente
Muestreo	Proceso de selección y medición de la información en una parte de la población estadística.
Muestreo con reemplazo	Los objetos que se extraen de la población se observan y se regresan a la misma para su posible reselección.
Muestreo sin reemplazo	Los objetos que se extraen de la población se observan y no se regresan a la misma para su posible reselección.
Números aleatorios	Conjunto de números.
Valores reales o parámetros	Característica de interés de una población.
Estadística	Regla o fórmula que asocia a las observaciones aleatorias que contiene un número determinado.
Media	La variable aleatoria $\overline{X} = \dfrac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n} = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ se denomina media.
Proporción	Si todas las variables aleatorias $X_1, X_2, \ldots, X_n$ asumen (su recorrido es) uno de los números del conjunto $\{0, 1\}$, entonces la variable aleatoria $P = \dfrac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n}$ se denomina proporción.

Sección 2.2

Distribución muestral

Distribución de probabilidad de una estadística.

Distribución muestral de la media

Función de probabilidades de la variable aleatoria

$$\overline{X} = \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n}.$$

Distribución muestral de la proporción

Función de probabilidades de la variable aleatoria

$$P = \frac{X}{n}.$$

Propiedades de la distribución muestral de la media

Sea la estadística $\overline{X} = \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n}$ asociada a la MAS $X_1, \ldots, X_n$, que se extrajo de una población con valor medio $E[\ X\ ] = \mu$ y varianza $V[\ X\ ] = \sigma^2$, entonces

i. $\mu_{\overline{X}} = \mu$.

ii. $\sigma^2_{\overline{X}} = \frac{\sigma^2}{n}$.

Propiedades de la distribución muestral de la proporción

En la estadística $P = \frac{X}{n}$, X representa el número de éxitos en la MAS $X_1, \ldots, X_n$, misma que se extrajo de una población con valor medio $E[\ X\ ] = np$ y varianza $V[\ X\ ] = npq$, entonces

i. $\mu_P = p$.

ii. $\sigma^2_P = \frac{pq}{n}$.

Teorema del Límite Central (o Teorema Central del Límite)

Sea $X_1, \ldots, X_n$ una sucesión de variables aleatorias independientes, idénticamente distribuidas y de tamaño n (suficientemente grande o que aumenta indefinidamente) extraída de una población con valor medio $E[\ X\ ] = \mu$ y varianza $V[\ X\ ] = \sigma^2$ (ambas finitas), entonces la variable aleatoria $Z_n = \frac{\left(\frac{1}{n} \sum_{i=i}^{n} X_i \right) - \mu}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}}$ converge en distribución a la distribución de la variable aleatoria normal estándar.

USO DE LAS TECNOLOGÍAS

Sección 2.1

Sugerimos utilizar las aplicaciones mencionadas en la unidad 1.

Sección 2.2

Sugerimos utilizar las aplicaciones mencionadas en la unidad 1.

AUTOEVALUACIÓN

COMPLETA LOS ESPACIOS

SELECCIONA LAS PALABRAS FALTANTES DEL BLOQUE INFERIOR

1. De una población estadística se pueden extraer distintos tipos de muestras y también pueden seleccionarse de diferentes maneras; las ______________________ respecto a un parámetro de una población estadística dependen de la forma en que se efectúa la extracción de las muestras.

2. En un muestreo, conviene que las muestras seleccionadas sean ______________________ de la población, esto quiere decir que reflejen sus características.

3. Si al seleccionar uno de los elementos que conforman la muestra, digamos x_i, éste no puede repetirse en otra muestra, entonces el muestreo se efectuó ______________________.

4. La ___________________________________ es el proceso estadístico mediante el cual la información obtenida a partir de una muestra se utiliza para obtener y construir conclusiones sobre la población de la que se extrajo.

5. La descripción de una muestra se efectúa por medio de la evaluación de sus medidas descriptivas, que también se denominan ______________________.

6. Se considera que una población estadística está completamente determinada cuando: se conocen los valores de sus ______________________.

7. Uno de los objetivos de la *inferencia estadística* es el relacionado con la estimación de sus ______________________.

8. En una muestra aleatoria simple las variables son ______________________.

9. Una realización estadística es un conjunto de números asignados a un conjunto de variables aleatorias de una ____________________________________.

10. Una tabla de __________________________se utiliza con el fin de asignar una realización a una muestra aleatoria simple.

11. Una distribución muestral es la función de ______________________ de una estadística.

12. La distribución muestral de la ______________________es igual a la media real de la población.

13. La distribución muestral de la ______________________ se construye asignado los valores cero y uno a la media aritmética.

14. El teorema del ______________________ se refiere a la distribución de probabilidad de la variable aleatoria media aritmética.

15. El teorema del ______________________se refiere a la ______________________ en distribución de la variable aleatoria media aritmética.

aleatorias. representativas. números aleatorios. media aritmética. inferencia estadística. estadísticas. límite central. muestra aleatoria simple. límite central. probabilidad. parámetros. proporción. convergencia. inferencias. sin reemplazo. parámetros.

CIERTO O FALSO

(Selecciona la opción que consideres correcta)

C **F** **1.** Una variable aleatoria genera una población estadística.

C **F** **2.** Una muestra también puede considerarse como una población.

C **F** **3.** En un muestreo sin reemplazamiento las muestras son aleatorias simples.

C **F** **4.** Una población estadística está compuesta por objetos que pueden tratarse como variables aleatorias.

C **F** **5.** Una muestra aleatoria simple es un conjunto de números.

C **F** **6.** Con una tabla de números aleatorios es posible construir una MAS

C **F** **7.** Una realización de una muestra aleatoria simple es una variable aleatoria.

C **F** **8.** En el muestreo con reemplazo las muestras son aleatorias simples.

C **F** **9.** Una muestra contiene parámetros.

C **F** **10.** Los símbolos μ y σ representan parámetros.

C **F** **11.** El cálculo de una probabilidad asociada a la media requiere de una estandarización previa.

C **F** **12.** El cálculo de una probabilidad de la variable aleatoria “proporción” requiere corregirse por continuidad.

C **F** **13.** Un parámetro específico tiene uno o más estimadores.

C **F** **14.** La distribución muestral de la proporción se distribuye normalmente y no depende del tamaño de la MAS.

C **F** **15.** La distribución muestral de la media siempre se distribuye normalmente.

C **F** **16.** La construcción de distribución muestral de la proporción se basa en la distribución muestral de la media.

C **F** **17.** Una distribución muestral se construye tomando como base un parámetro.

C **F** **18.** La distribución muestral de la media es una función de probabilidades acumuladas.

C **F** **19.** La distribución de probabilidad de un parámetro se denomina distribución muestral.

C **F** **20.** La distribución muestral de μ se denomina distribución muestral de la media.

C **F** **21.** La distribución muestral de p se denomina distribución muestral de la proporción.

PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Se seleccionaron muestras de tamaño n de ciertas poblaciones con la media y varianza indicadas, determine la media y la desviación estándar de la distribución muestral de medias. Suponga muestreo con reemplazo.

a. $n=100$, $\mu=80$ y $\sigma^2=16$.

b. $n=200$, $\mu=150$ y $\sigma^2=25$.

c. $n=625$, $\mu=203$ y $\sigma^2=81$.

2. Se seleccionaron muestras de tamaño n de poblaciones con proporción real p, determina la media y la desviación estándar de la distribución muestral de proporciones si

a. $n=81$ y $p=0.45$.

b. $n=100$ y $p=0.50$.

c. $n=364$ y $p=0.65$.

d. $n=625$ y $p=0.85$.

3. Si $\mu=3.0$, $\sigma=1$ y $n=81$.

a. ¿Cuál es la probabilidad de que $\overline{X}$ esté entre 3.1 y 3.3?

b. ¿Cuál es la probabilidad de $\overline{X}>3.2$?

c. ¿Cuál es la probabilidad de $\overline{X}<2.9$?

d. Si $p\left(\overline{X}\geq\overline{x}_0\right)=0.99$, calcula $\overline{x}_0$,.

e. Calcula $\overline{x}_0$, para $p\left(\overline{X}<\overline{x}_0\right)=0.95$.

f. Si $p\left(\overline{X}<\overline{x}_0\right)=0.02$ calcula $\overline{x}_0$.

4. Si $p=0.05$ y $n=60$ determina:

a. $p(0.15\leq P\leq 0.20)$.

b. $p(P>0.10)$.

c. $p(P<0.30)$.

d. $p(P\geq 0.08)$.

e. $p(P\leq 0.02)$.

3. INFERENCIA ESTADÍSTICA

PROPÓSITO

Al finalizar la unidad el alumno:
Realizará inferencias formalessobre los valores de los parámetros, a partir del análisis de los estimadores, para fundamentar la toma de de decisiones en una investigación estadística, consolidando la formación de su pensamiento estadístico.

CONTENIDO

3.1 ESTIMACIÓN

3.2 PRUEBA DE HIPÓTESIS PARA LA MEDIA Y LA PROPORCIÓN POBLACIONAL

3.1 ESTIMACIÓN

¿Qué debe aprender?

1. Construye el concepto de estimación por intervalo a partir de un problema.
2. Deduce las expresiones para el cálculo de intervalos de confianza para la media o para la proporción, bajo las condiciones del Teorema del Límite Central.
3. Estima la media y la proporción poblacionales por medio del intervalo de confianza correspondiente, que haya generado en el contexto de una investigación o un problema, comunicando su interpretación.

¿Por qué debe aprenderlo?

Uno de los propósitos de la inferencia estadística es la estimación tanto puntual como por intervalos de los valores reales de una población con cierta confiabilidad y posteriormente tomar una decisión.

Temática

Estimación puntual y por intervalos para la media y la proporción de la población. Elementos que componen a un intervalo de confianza. Aplicación e interpretación de resultados.

Una **población estadística** está constituida por todos los objetos (elementos o individuos) que presentan un carácter o propiedad común (medible, definido o seleccionado por el investigador) que se desea describir utilizando estadísticas. Por otra parte, el propósito de la Estadística Inferencial (inferencia estadística) es inferir y/o estimar los parámetros (caracteres o números que la describen) de una población que no es completamente observable (lo que puede deberse a su tamaño, su costo, su complejidad, etcétera) en su totalidad, por tanto, se requiere utilizar partes de ella (muestras) con el fin de conocerla (a través del análisis de las muestras y los elementos de probabilidad). Esto significa calcular números y determinar su bondad, es decir, conocer que tan próximos son a los valores reales (parámetros) de la población.

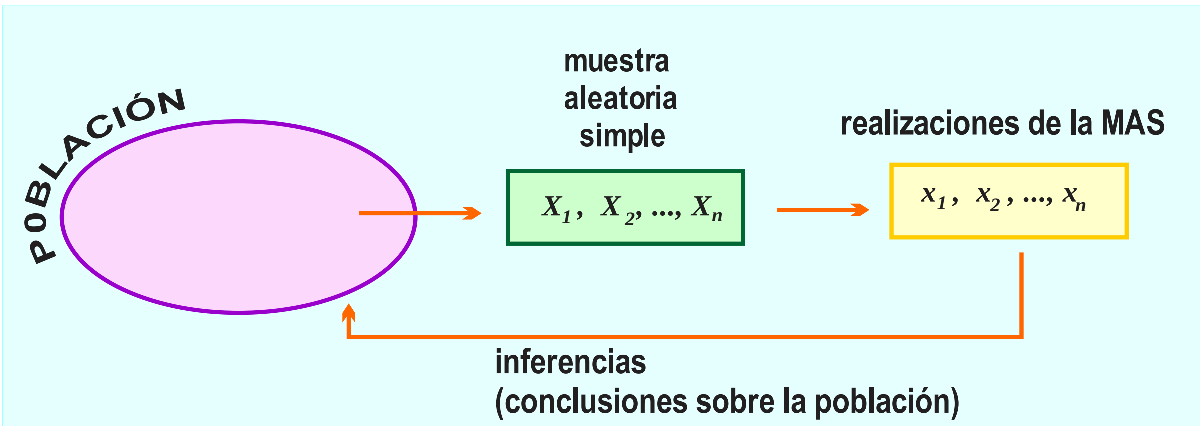


FIGURA 1

DEFINICIÓN 1 (PARÁMETROS O VALORES REALES)
Un parámetro o un valor real de una población es un número que representa el valor de un carácter de la variable (o variables) que la definen.

La *figura 2* muestra el esquema de un parámetro de una población.

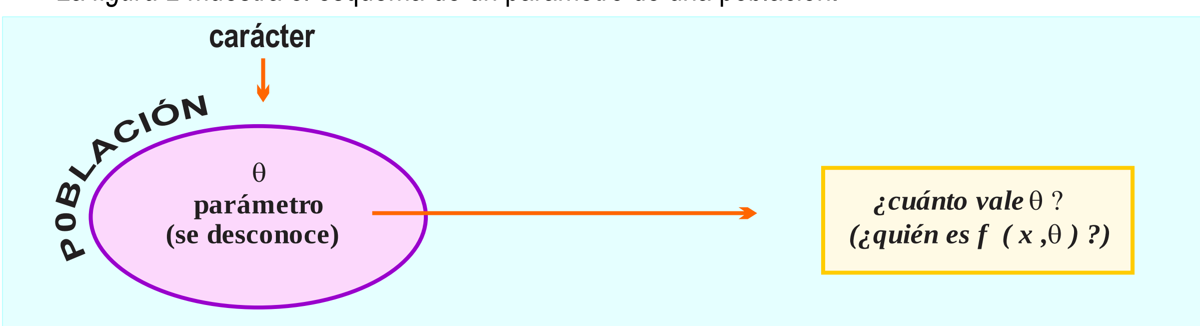


FIGURA 2

EJEMPLO 1 (PARÁMETROS FACTIBLES DE ESTIMAR)
a. En una población con una característica medible y cuyos valores se representan por la variable X y que se distribuye binomialmente el parámetro que es factible de estimar es p.

b. Consideremos la población en que los valores de la característica variable (de interés) se representan por X , y que se distribuye normalmente, entonces los parámetros factibles de estimar son μ y σ^2 (equivalentemente σ).

En el contexto de la estadística inferencial, el proceso de estimación de parámetros requiere del uso "fórmulas, las fórmulas utilizadas presentan similitudes (y pueden tener la misma estructura y ser similares) a las utilizadas en la descripción de una muestra estadística.

EJEMPLO 2 (ESTADÍSTICAS ÚTILES EN ESTIMACIÓN)

a. Si en una población el parámetro objetivo (parámetro que se desea estimar) es un promedio, entonces una estadística útil es la media aritmética.

b. Si en una población el parámetro objetivo es una proporción o un porcentaje, entonces una estadística útil es la estadística proporción.

c. Si en una población el parámetro objetivo es un total, entonces una estadística útil es el total muestral.

A diferencia de la estadística descriptiva, en que los elementos componentes de las estadísticas son números, en estadística inferencial los elementos que componen los estimadores son variables aleatorias.

DEFINICIÓN 2 (ESTIMADOR Y ESTIMADOR PUNTUAL)

Sean: θ un parámetro, $X_1,\ldots, X_n$ una muestra aleatoria y $\hat{\Theta}(X_1,\ldots, X_n)$ la estadística correspondiente a θ , entonces:

a. La expresión $\hat{\Theta}(X_1,\ldots, X_n)$ se denomina estimador del parámetro θ .

b. El valor (o número) $\hat{\theta}$ obtenido cuando en $\hat{\Theta}(X_1,\ldots, X_n)$ las variables $X_1,\ldots, X_n$ asumen los valores $x_1,\ldots, x_n$ se llama estimador puntual de θ .

La *figura 3* representa el proceso de estimación de un parámetro.

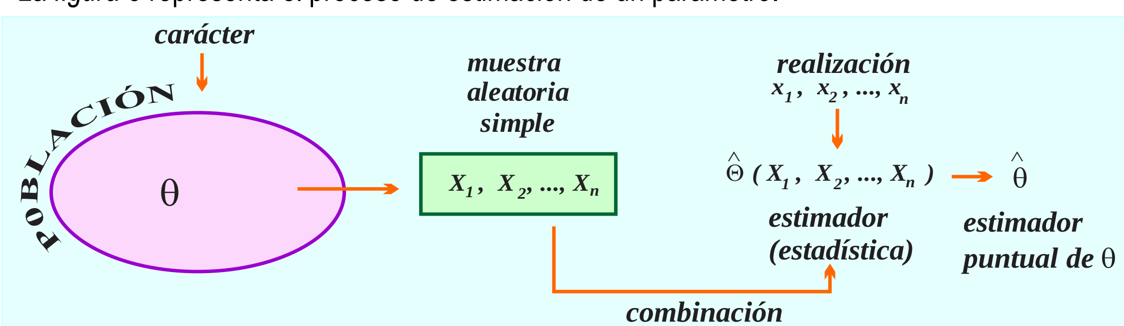


FIGURA 3

La *tabla 1* incluye: el parámetro, la estadística o estimador y el estimador puntual del parámetro.

POBLACIÓN	PARÁMETRO OBJETIVO θ	ESTIMADOR $\hat{\Theta}$	ESTIMADOR PUNTUAL
BINOMIAL	p	$\hat{P} = \frac{\overline{T}}{n}$	$\hat{p} = \frac{\overline{T}}{n}$
NORMAL	μ	$\overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}$	$\hat{\mu} = \overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$
NORMAL	σ^2	$\hat{S}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2}{n-1}$	$\hat{s}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}{n-1}$

TABLA 1

EJEMPLO 3 (ESTIMADORES PUNTUALES)

a. Se desea efectuar una inferencia con relación a la estatura media μ de todos los alumnos de un plantel del CCH con la suposición de que ésta (estatura media) se distribuye normalmente. Con este fin se analiza una realización de la muestra aleatoria

$$X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6, X_7, X_8, X_9, X_{10}$$

de diez de ellos, obteniéndose los datos

$$166, 168, 170, 172, 168, 164, 174, 170, 172, 166.$$

A partir de ellos y utilizando la estadística

$$\overline{X} = \frac{X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5 + X_6 + X_7 + X_8 + X_9 + X_{10}}{10}$$

obtenemos un estimador puntual del parámetro μ y obtenemos $\hat{\mu}$

$$\hat{\mu} = \overline{x} = \frac{166+168+170+172+168+164+174+170+172+166}{10} = 169.$$

b. Se desea efectuar una inferencia con relación a la proporción real p de alumnos "regulares" matriculados en la UNAM, suponiendo que tal característica se distribuye binomialmente. Con este fin se revisó una realización de una muestra aleatoria de diez alumnos, misma que condujo al resultado

$$R, I, I, R, R, R, R, R, I, I.$$

Con los datos anteriores calculamos un valor para la estadística

$$\overline{T} = X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5 + X_6 + X_7 + X_8 + X_9 + X_{10},$$

en donde $X_i = 1$ si el alumno es regular y $X_i = 0$ si el alumno es irregular,

entonces

$$\overline{T} = 1+0+0+1+1+1+1+1+0+0 = 6 \text{ y } \hat{p} = \frac{6}{10} = 0.6.$$

Con base en el valor calculado a partir de la estadística P se puede efectuar una inferencia sobre el parámetro p. En este caso el parámetro p se ha estimado puntualmente utilizando el estimador puntual $\hat{p} = 0.6$.

Si deseamos caracterizar la variable X (lo que significa que debemos conocen sus parámetros y como consecuencia su fdp) que se refiere al comportamiento de una característica de una población, y que sabemos tiene asociada una distribución de probabilidades que depende del parámetro θ (desconocido), entonces los problemas de inferencia que pueden darse son:

i. De estimación, en los que se busca un valor (estimación puntual) para el parámetro θ.

ii. Un conjunto de valores posibles para el mismo (estimación por intervalos de confianza).

iii. De contraste, cuyo objetivo es comprobar si es cierta o falsa cierta suposición sobre el parámetro θ.

EJEMPLO 4 (VALORES DE LOS ESTIMADORES)

a. Sea: una población con distribución normal y parámetros μ y σ^2,

$$X_1,\ X_2,\ X_3,\ X_4,\ X_5,\ X_6$$

una muestra aleatoria y

$$1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 6,\ 8$$

una de sus realizaciones.

i. Para estimar el parámetro μ utilizaremos la estadística

$$\overline{X} = \frac{X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5 + X_6}{n}$$

y el estimador puntual del parámetro μ es el número

$$\overline{x} = \frac{1+3+5+7+6+8}{6} = 5.$$

ii. Para estimar el parámetro σ^2 utilizaremos la estadística

$$\hat{S}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X} \right)^2}{n-1}$$

y el estimador puntual de σ^2 es el número

$$\hat{s}^2 = \frac{(1-5)^2 + (3-5)^2 + (5-5)^2 + (7-5)^2 + (6-5)^2 + (8-5)^2}{6-1} = 6.8.$$

b. Sea una población con distribución binomial de parámetro p,

si $X_1,\ X_2,\ X_3,\ X_4,\ X_5$

es una muestra aleatoria y

$$1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 1$$

es una de sus realizaciones, entonces para estimar el parámetro p utilizaremos la estadística

$$\overline{T} = X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5.$$

por tanto,

$\overline{T} = 1+0+0+0+1 = 2$, entonces

$$\hat{p} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \text{ es el estimador puntual de } p.$$

El uso de un estimador (puntual) inadecuado en la estimación del parámetro θ, vea la *figura 4*, en puede proporcionar estimadores puntuales que varían grandemente para las distintas realizaciones de la muestra aleatoria; en este caso resulta de mayor utilidad utilizar un intervalo numérico como estimador del parámetro, vea la *figura 5*.

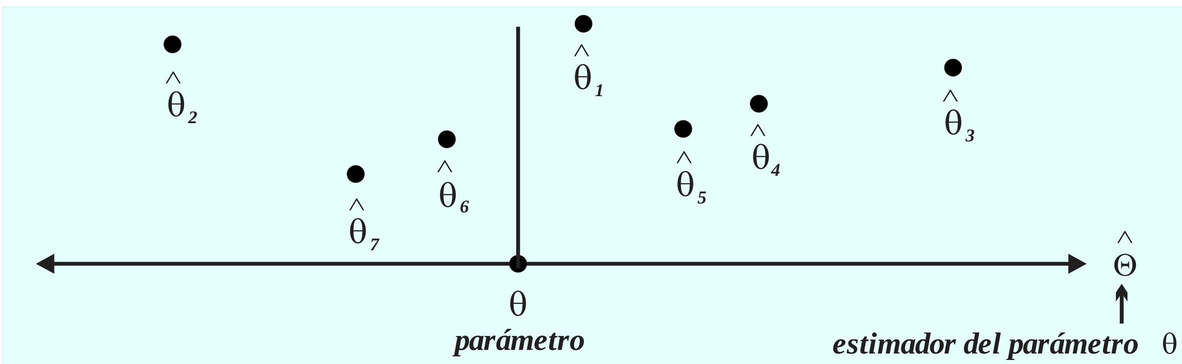


FIGURA 4

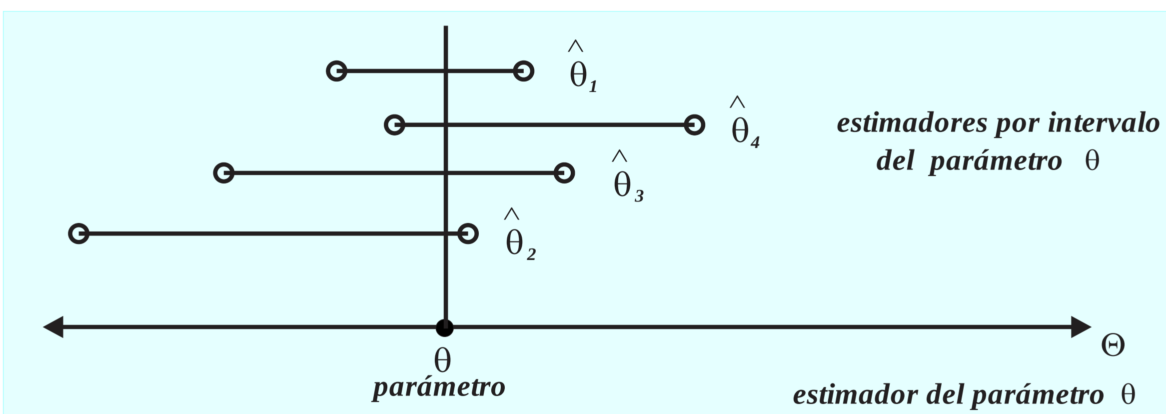


FIGURA 5

EJEMPLO 5 (ESTIMADORES)

i. Si deseamos estimar el tiempo promedio de duración de 100 llamadas telefónicas, proporcionar un “número” como estimador puntual no es tan significativo como el proporcionar un intervalo en el que se espera se encuentre el tiempo promedio de las llamadas.

ii. Si afirmamos que en un estudio hecho por un profesor, el estimó que la calificación media (promedio) en las asignaturas de matemáticas oscila entre los 64 y los 76 puntos, y que la investigación se hizo con un nivel de confianza de 90%, entendemos que la verdadera calificación promedio será un valor comprendido entre los dos números anteriores y que la probabilidad de que el intervalo $[\ 64\ ,\ 76\ ]$ (o en su caso el intervalo $(\ 64\ ,\ 76\ )$) incluya la calificación media real es 0.90; en el sentido de: si efectuamos la estimación un número específico de veces, digamos 50, las realizaciones de la muestra aleatoria proporcionarán alrededor de 45 intervalos de confianza que incluirán el promedio real de la calificación.

Un estimador (aleatorio) por intervalo $\hat{\Theta}$ del parámetro θ, es una estadística de la forma

$$\left(\ \hat{\Theta}_i(\ X_1,\ldots,\ X_n\ )\ ,\ \ \hat{\Theta}_s(\ X_1,\ldots,\ X_n\ )\ \right)$$

en donde los extremos dependen de la realización $x_1,\ldots,\ x_n$ de la MAS $X_1,\ldots,\ X_n$ e n el cálculo de los estimadores puntuales $\hat{\theta}_I$ y $\hat{\theta}_S$ conocidos como extremo inferior y superior, del intervalo, por tanto, son valores específicos de los estimadores $\hat{\Theta}_i(\ X_1,\ldots,\ X_n\ )$ y $\hat{\Theta}_s(\ X_1,\ldots,\ X_n\ )$ respectivamente, vea la *figura 6.*

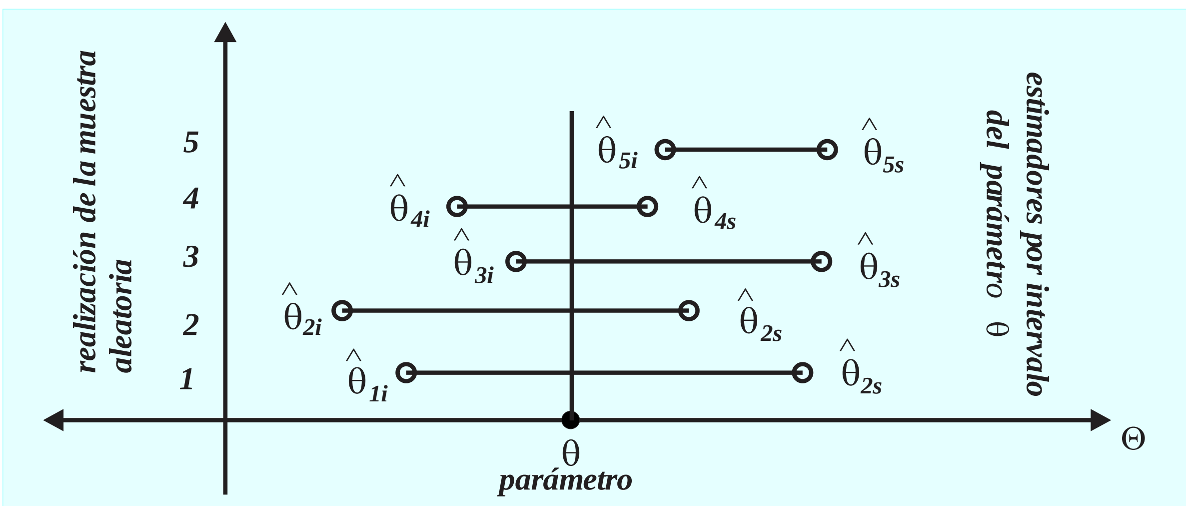


FIGURA 6

En un estimador por intervalos la probabilidad de que el parámetro θ esté contenido en un intervalo específico se representa por $1-\alpha$ y se llama nivel de confianza. Así, para la realización $x_1,\ldots,\ x_n$ de $X_1,\ldots,\ X_n$ con los estimadores $\hat{\Theta}_I$ y $\hat{\Theta}_S$ en

$$p\left(\ \hat{\Theta}_I \le \theta \le \hat{\Theta}_S\ \right) = 1-\alpha$$

se obtiene el estimador

$$\hat{\theta}_I \le \theta \le \hat{\theta}_S$$

llamado "intervalo de confianza de $(1-\alpha)100\%$ para el parámetro θ" o "estimador por intervalo del parámetro θ". La formalización de los conceptos anteriores se encuentra en la *definición 3*.

DEFINICIÓN 3 (INTERVALO DE CONFIANZA O ESTIMADOR POR INTERVALO)

Sean: θ un parámetro, $X_1, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria, $\hat{\Theta}_I$ y $\hat{\Theta}_S$ estadísticas correspondientes al parámetro θ, entonces:

a. $p\left(\hat{\Theta}_I \leq \theta \leq \hat{\Theta}_S\right) = 1-\alpha$ es el intervalo aleatorio de confianza para θ.

b. Si $x_1, \ldots, x_n$, es una realización de la MAS $X_1, \ldots, X_n$, entonces $\hat{\theta}_I \leq \theta \leq \hat{\theta}_S$ es un intervalo de confianza para el parámetro θ con el nivel de confianza $1-\alpha$.

c. $\hat{\theta}_I$ es el límite inferior de confianza y $\hat{\theta}_S$ es el límite superior de confianza.

d. $L = \hat{\theta}_S - \hat{\theta}_I$ es la amplitud del intervalo de confianza.

La *figura 7* ilustra los elementos que involucra un intervalo de confianza.

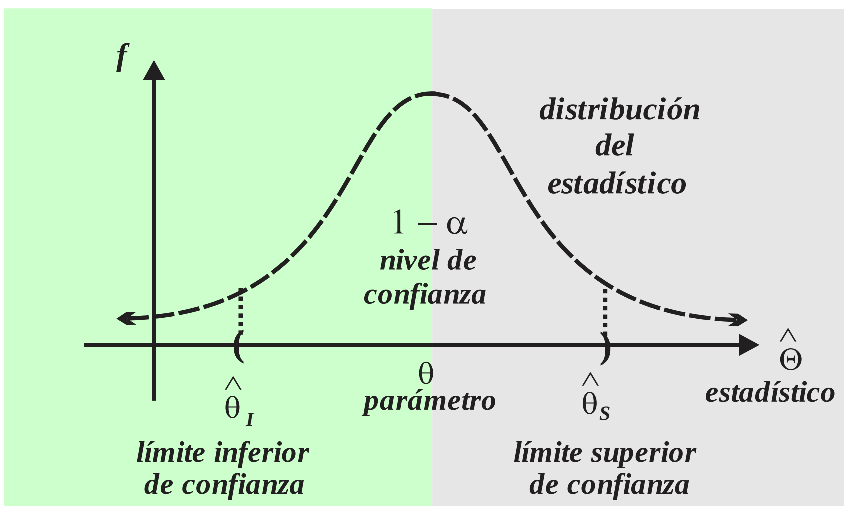


FIGURA 7

El nivel de confianza $1-\alpha$ indica la fiabilidad del estimador por intervalo, esto es, la probabilidad de que contenga al parámetro de interés, habitualmente se toman niveles de confianza como 90%, 95% o 99% (correspondientes a las probabilidades α de 0.10, 0.5 y 0.01 respectivamente, de que el valor del parámetro objetivo no esté contenido en el estimador por intervalo o intervalo de confianza). El lector debe tener en cuenta que el uso de un alto nivel de confianza en la construcción de un intervalo de confianza implica una amplitud relativamente grande de él(a mayor nivel de confianza seleccionado, mayor amplitud del intervalo de confianza), por tanto, se pierde precisión en la estimación real del parámetro objetivo. En la construcción del intervalo de confianza del $(1-\alpha)100\%$ para un parámetro específico θ, se utiliza una estadística (variable aleatoria) que lo incluya y la distribución de probabilidad correspondiente. Dado que la distribución de probabilidad normal modela el comportamiento de poblaciones que incluyen parámetros μ y σ^2, el desarrollo metodológico que realizaremos se referirá a poblaciones normales (o aproximadamente normales).

En la construcción del intervalo de confianza para μ supondremos que la varianza real (o poblacional) σ^2 de la población es conocida (o si es el caso que el tamaño de la muestra es mayor o igual que 30), por tanto, bajo estas hipótesis la distribución muestral de la estadística $\overline{X}$ (de acuerdo con el teorema del límite central) se comporta normalmente y tiene parámetros:

$$\mu_{\overline{X}} = E\left[\ \overline{X}\ \right] = \mu\,,\ \sigma^2_{\overline{X}} = V\left[\ \overline{X}\ \right] = \frac{\sigma^2}{n}\,.$$

Sean: $100\left(1-\alpha\right)\%$ el nivel de confianza y $z_{\alpha/2}$ el cuantil que deja área (o probabilidad) $\alpha/2$ a su derecha (equivalentemente un área o probabilidad de $1-z_{\alpha/2}$ a su izquierda) vea la *figura 8*. El intervalo aleatorio de confianza es

$$p\left(-z_{\alpha/2} < Z < z_{\alpha/2}\right) = 1-\alpha\,,$$

pero

$$Z = \frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\,,$$

entonces

$$p\left(-z_{\alpha/2} < \frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} < z_{\alpha/2}\right) = 1-\alpha\,.$$

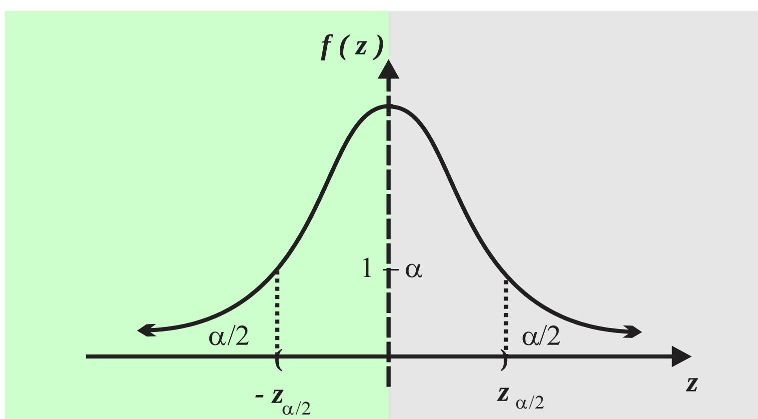


FIGURA 8

Multiplicando por

$$\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

todos los miembros de la inecuación anterior obtenemos

$$p\left(-z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \overline{X}-\mu < z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 1-\alpha\,,$$

o bien $p\left(-\overline{X} - z_{\alpha/2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < -\overline{X} + z_{\alpha/2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} \right) = 1-\alpha$.

Multiplicando por -1 los miembros de las desigualdades y reacomodándolos obtenemos el intervalo aleatorio de confianza

$$p\left(\overline{X} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \overline{X} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right) = 1-\alpha$$

Para obtener el estimador por intervalo del parámetro μ se realiza la muestra aleatoria $X_1, \ldots, X_n$ (extraída de una población con varianza conocida σ^2) y se estiman, tanto s^2 como $\overline{X} = \overline{x}$, luego

$$\overline{x} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \overline{x} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \text{ o bien } \overline{x} - z_{\alpha/2}\frac{s}{\sqrt{n}} < \mu < \overline{x} + z_{\alpha/2}\frac{s}{\sqrt{n}}.$$

PROPOSICIÓN 1 (INTERVALO DE CONFIANZA O ESTIMADOR POR INTERVALO PARA μ)

Sea $x_1, \ldots, x_n$ una realización de la MAS $X_1, \ldots, X_n$ extraída de una población normal con parámetro μ.

a. Si σ_0 es conocida, entonces un intervalo de confianza de $(1-\alpha)100\%$ para μ es

$$\overline{x} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}} < \mu < \overline{x} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}.$$

b. Si σ_0 es desconocida pero $n \geq 30$, entonces un intervalo de confianza de $(1-\alpha)100\%$ para μ es

$$\overline{x} - z_{\alpha/2}\frac{s_{n-1}}{\sqrt{n}} < \mu < \overline{x} + z_{\alpha/2}\frac{s_{n-1}}{\sqrt{n}}.$$

En ambos casos $z_{\alpha/2}$ es el valor de la distribución normal estándar Z que deja un área (o probabilidad) de $\alpha/2$ a su derecha.

Un proceso similar al anterior conduce a un intervalo de confianza para la proporción real p.

PROPOSICIÓN 2 (INTERVALO DE CONFIANZA O ESTIMADOR POR INTERVALO PARA p)

Sea $\hat{p}$ la proporción de éxitos en la ejecución de las variables aleatorias $X_1, \ldots, X_n$ de tamaño $n \geq 30$, el intervalo de confianza de $(1-\alpha)100\%$ para el parámetro binomial p es

$$\hat{p} - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}} < p < \hat{p} + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}},$$

donde $z_{\alpha/2}$ es el valor de la distribución normal estándar Z que deja un área (o probabilidad) de $\alpha/2$ a su derecha, $\hat{p} = \dfrac{x}{n}$ el valor de la proporción y x la cantidad de éxitos.

EJEMPLO 6 (INTERVALO DE CONFIANZA PARA μ)

Se midió la concentración de azúcar en el contenido de una muestra de 49 refrescos Pascual cuyo envase indica "contenido 355 mililitros". Se encontró una media aritmética de 36 gramos; si suponemos que la desviación estándar del contenido de azúcar en la población es $\sigma = 4$, entonces un intervalo de confianza del 95% para la concentración media de azúcar se construye de la siguiente forma.

La confianza del 95% implica $(1-\alpha)100\% = 95\%$, es decir, $\alpha = 0.05$ y $\alpha/2 = 0.025$, el valor del percentil correspondiente es

$$z_{0.025} = 1.96,$$

por tanto,

$$36 - 1.96\frac{4}{\sqrt{49}} < \mu < 36 + 1.96\frac{4}{\sqrt{49}},$$

o bien

$$34.88 < \mu < 37.12.$$

Se tiene una confianza de 95%, de que el verdadero valor de μ se encuentra entre los números 34.88 y 37.12: También el 95% de las realizaciones de la muestra aleatoria tienen un contenido medio de azúcar entre 34.88 y 37.12 gramos.

EJEMPLO 7 (INTERVALO DE CONFIANZA PARA μ)

Cierta institución bancaria financió a las personas que deseaban cambiar su automóvil. Al revisar 200 solicitudes encontró una solicitud de préstamo promedio de 120000 pesos. Si se supone que $\sigma = 20000$ y una distribución normal en el monto de préstamos, un intervalo de confianza de 90% para el préstamo medio se construye como sigue:

$$\text{si } (1-\alpha)100\% = 90\%,$$

entonces

$$\alpha = 0.10 \text{ y } \alpha/2 = 0.05.$$

En las tablas de percentiles normales observamos

$$z_{0.05} = 1.645,$$

por tanto,

$$120000 - 1.9645\frac{20000}{\sqrt{200}} < \mu < 120000 + 1.9645\frac{20000}{\sqrt{200}},$$

o bien

$$11767362 < \mu < 12232638.$$

Se tiene una confianza del 90% de que el valor medio de los préstamos se encuentra en el intervalo

$$11767362 < \mu < 12232638$$

(el 90% de las realizaciones de la muestra aleatoria tiene un valor medio comprendido entre 11767362 y 12232638 pesos).

EJEMPLO 8 (INTERVALO DE CONFIANZA PARA p)

Un estudio sobre los gustos musicales realizado a $n = 500$ estudiantes universitarios (seleccionados al azar) mostró que $x = 340$ de ellos escuchan la estación radiofónica "La Zeta". Construyamos un intervalo de confianza del 98% para la proporción real de universitarios que escuchan "La Zeta".

i. De $(1-\alpha)100\% = 98\%$ obtenemos $\alpha = 0.02$ o bien $\alpha/2 = 0.01$.

En las tablas de los percentiles normales observamos $z_{0.025} = 2.326$.

ii. El estimador puntual de la proporción real p es

$$\hat{p} = 340/500 = 0.68.$$

iii. El intervalo de confianza es:

$$0.68 - 2.326\sqrt{\frac{(0.68)(0.32)}{500}} < p < 0.68 + 2.326\sqrt{\frac{(0.68)(0.32)}{500}},$$

o bien

$$0.631 < p < 0.729.$$

iv. Se tiene una confianza del 95% de que la proporción real de estudiantes que escucha "La Zeta" se encuentra en el intervalo

$$(0.631\ ,\ 0.729).$$

EJEMPLO 9 (INTERVALO DE CONFIANZA PARA p)

Un vendedores timó la proporción real de estudiantes que desayunan "una torta" algún día de la semana. Seleccionó una muestra aleatoria de $n = 100$ estudiantes y observó que $x = 64$ lo hacen. En la construcción de un intervalo de confianza de 99% para la verdadera proporción de estudiantes que desayunan "una torta" algún día de la semana:

i. De $(1-\alpha)100\% = 99\%$ obtenemos $\alpha = 0.01$, en consecuencia $\alpha/2 = 0.005$.

En las tablas de los cuantiles normales observamos $z_{0.005} = 2.576$.

El estimador puntual de la proporción real p es

$$\hat{p} = 64/100 = 0.64.$$

ii. Por tanto,

$$0.64 - 2.575\sqrt{\frac{(0.64)(0.36)}{100}} < p < 0.64 + 2.575\sqrt{\frac{(0.64)(0.36)}{100}},$$

o bien

$$0.516 < p < 0.764.$$

iii. Se tiene una confianza del 99% de que la verdadera proporción p de los estudiantes que desayunan "una torta" algún día de la semana se encuentra en el intervalo

$$0.5164 < p < 0.7636.$$

En un intervalo de confianza, un aumento en el nivel de confianza implica un aumento en su amplitud; así mismo, un aumento en la variabilidad (error e) del estimador puntual respecto al valor real del parámetro, vea la *figura 9.*

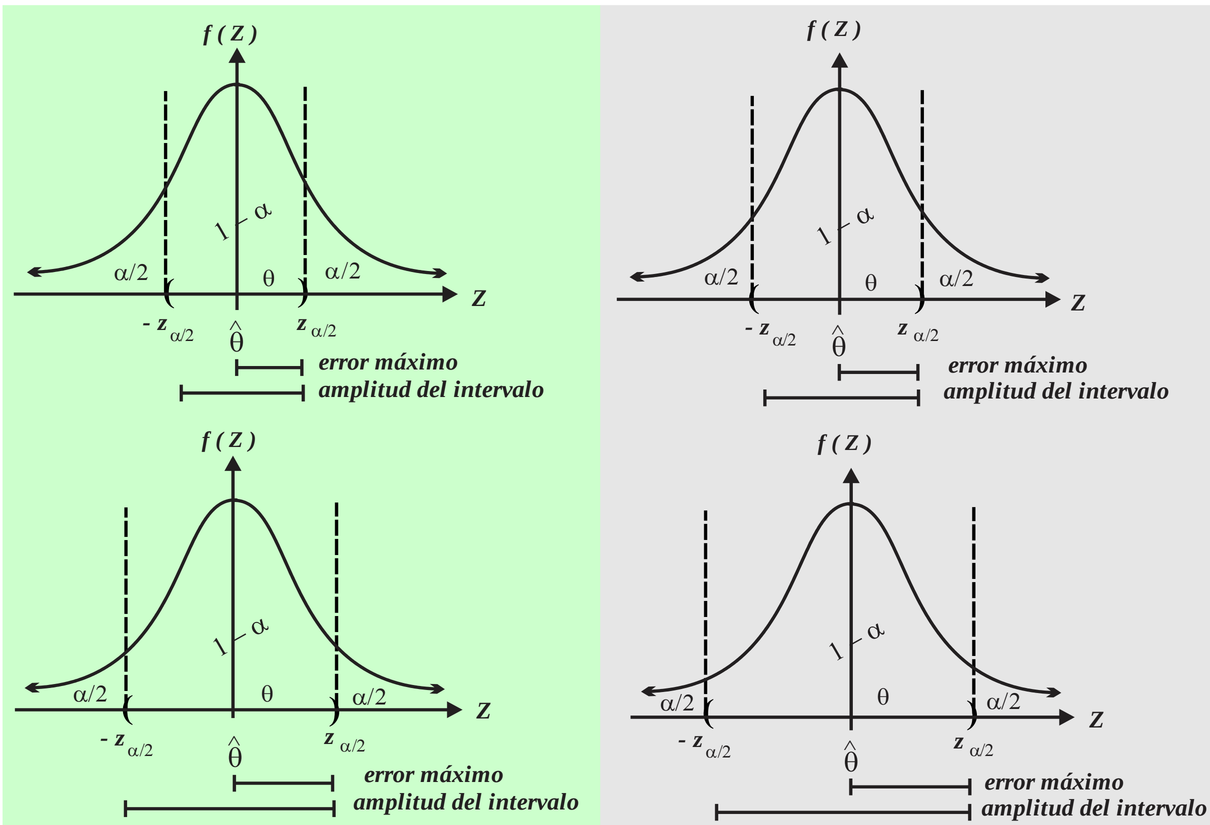


FIGURA 9

La *proposición 3* (dos partes) formaliza las observaciones anteriores y proporciona un método para calcular el tamaño de muestra n cuando se conocen ciertas características del estimador por intervalos.

PROPOSICIÓN 3.a. (ERROR MÁXIMO RELATIVO, TAMAÑO DE MUESTRA)

Sean: un intervalo de confianza del $(1-\alpha)100\%$ para μ, y $\bar{x}$ un estimador puntual del parámetro μ, entonces:

i. El error máximo que se cometerá será menor a

$$e = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}.$$

ii. El error será menor que e si el tamaño de muestra es

$$n = \left(\frac{z_{\alpha/2}\sigma}{e}\right)^2.$$

PROPOSICIÓN 3.b. (ERROR MÁXIMO RELATIVO, TAMAÑO DE MUESTRA)

Sean: un intervalo de confianza del $(1-\alpha)100\%$ para p y $\hat{p}$ el estimador puntual de p, entonces:

i. El error máximo que se cometerá será menor a $e = z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}$.

ii. Si el error cometido es menor que e, entonces el tamaño de muestra será $n = \left(\frac{z_{\alpha/2}}{e}\right)^2 \hat{p}\hat{q}$.

iii. El error cometido no excede e cuando el tamaño de muestra es $n = \frac{z^2{}_{\alpha/2}}{4e^2}$.

EJEMPLO 10 (ERROR MÁXIMO Y TAMAÑO DE MUESTRA EN UNA MEDIA)

El estimador por intervalo del valor real de la media de las estaturas de los niños menores a 10 años matriculados en cierta escuela primaria arrojó como resultado

$$98 < \mu < 106, \text{ si } \bar{x} = 102,\ \sigma = 10$$

y se utilizó un nivel de confianza es 99%.

a. Para determinar el error máximo que se comete (e) al utiliza $\bar{x}$ como estimador puntual del parámetro μ, utilizando

$$\hat{\theta}_S = \bar{x} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

obtenemos $e = \hat{\theta}_S - \bar{x}$, por tanto,

$$e = 106 - 102 = 4.$$

b. El tamaño de la muestra utilizada si el error cometido es menor que e es

$$n = \left(\frac{z_{\alpha/2}\sigma}{e}\right)^2 = \left(\frac{(2.58)(10)}{4}\right)^2 \approx 42.$$

EJEMPLO 11 (ERROR MÁXIMO Y TAMAÑO DE MUESTRA)

La organización médica "*Santísima*" obtuvo

$$4.45 < \mu < 5.15$$

como estimador por intervalo, en referencia al número promedio de días de hospitalización requeridos por los pacientes sometidos a cierta cirugía. La realización de una muestra aleatoria proporcionó una estancia promedio de 4.8 días con una desviación estándar de 2.6 días y se utilizó el nivel de confianza del 90%.

a. El error máximo cometido (e) al utilizar $\bar{x}$ como estimador puntual del parámetro μ, es

$$\hat{\theta}_S = \bar{x} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

o bien

$$e = \hat{\theta}_S - \bar{x}.$$

De $\bar{x} = 4.8$ y $\hat{\theta}_S = 5.15$, obtenemos $e = 5.15 - 4.8 = 0.35$.

b. Para determinar el tamaño de muestra utilizado (n), de $(1-\alpha)100\% = 90\%$ obtenemos $\alpha = 0.10$ y en las tablas de percentiles normales observamos

$$z_{\alpha/2} = z_{0.05} = 1.645.$$

Si $s = 2.6$ es estimador puntual de σ, entonces

$$n = \left(\frac{(1.645)(2.6)}{0.35}\right)^2 \approx 149.$$

EJEMPLO 12 (ERROR MÁXIMO Y TAMAÑO DE MUESTRA)

Se estimó, con una confianza del

$$(1-\alpha)100\% = 95\%,$$

que los plátanos machos de la compañía *“Bananas Juanita”*, tienen una longitud media de 18.5 centímetros. Si el error es menor que 0.05 cuando se utiliza $\hat{p} = 0.12$ como estimador puntual de la proporción real p, puesto que $e = 0.05$,

$$(1-\alpha)100\% = 95\% \text{ y } z_{0.25} = 1.96,$$

entonces el tamaño de muestra es

$$n = \left(\frac{1.96}{0.05}\right)^2 (0.12)(0.88) \approx 162.$$

EJEMPLO 13 (ERROR MÁXIMO Y TAMAÑO DE MUESTRA EN UNA PROPORCIÓN)

La proporción de naranjas con peso menor a 150 gramos en las cajas de la compañía frutera “Yus S.A.” es desconocida. Para determinar el tamaño de muestra, con una confianza 95% de que el error cometido en la estimación sea menor a 0.05, dado que es desconocido el estimador puntual $\hat{p}$ de la proporción real p y que $e = 0.05$, $(1-\alpha)100\% = 95\%$ y $z_{0.25} = 1.96$, tendremos

$$n = \left(\frac{z_{\alpha/2}}{2E_{Máx}}\right)^2 = \left(\frac{1.96}{2(0.05)}\right)^2 \approx 384,$$

aproximadamente 384 naranjas.

3.1 PROBLEMAS PROPUESTOS

1. ESTIMADORES PUNTUALES

Sean: una población con distribución normal con parámetros μ y σ^2, la muestra aleatoria

$$X_1,\ X_2,\ X_3,\ X_4,\ X_5,\ X_6,\ X_7,\ X_8$$

y $2,\ 6,\ 5,\ 7,\ 5,\ 7,\ 5,\ 8$ una de sus realizaciones.

i. Determina el estimador puntual de μ utilizando la estadística $\overline{X}$.

ii. Determina el estimador puntual de σ^2 utilizando la estadística

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})^2}{n-1}.$$

b. Sea una población con distribución binomial y parámetro p, si

$$X_1,\ X_2,\ X_3,\ X_4,\ X_5,\ X_6,\ X_7,\ X_8$$

es una muestra aleatoria y la realización $1,\ 0,\ 1,\ 1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 1$ de la muestra aleatoria. Determine el estimador puntual de p utilizando $\overline{T}$ (total).

2. ESTIMADORES PUNTUALES

a. Proporciona tres ejemplos de posibles estimadores de puntuales para μ.

b. ¿Qué estimadores puntuales de σ^2 conoce?

c. ¿Cómo estimaría el número de pelos que tiene un perro?

d. ¿Cómo estimaría el número de alumnos de la escuela dónde estudia?

3. ESTIMADORES POR INTERVALO

Determina estimadores por intervalo en cada una de las siguientes situaciones:

a. Su ingreso promedio para el próximo año.

b. Proporción de votos que obtendrá el PRI en las próximas elecciones federales.

c. Su tiempo de vida.

d. El número de frijoles en una bolsa que contiene un kilogramo.

e. El número de litros de agua que utiliza en una semana.

f. La proporción de mujeres que estudian en el plantel Oriente del CCH.

g. La proporción de refrescos de cola que consumirás el próximo mes.

4. CARACTERÍSTICAS DE LOS ESTIMADORES

Determina: el parámetro objetivo, el nivel de confianza, la longitud del intervalo y los límites de confianza.

a. $p\left(\hat{\Theta}_I \le \mu \le \hat{\Theta}_S \right) = 0.98$ y

$$10.4 \le \mu \le 16.8.$$

b. $p\left(\hat{\Theta}_I \le p \le \hat{\Theta}_S \right) = 0.90$ con

$$0.72 \le p \le 0.93.$$

c. $p\left(\hat{\Theta}_I \le \sigma \le \hat{\Theta}_S \right) = 0.99$ y

$$0.4 \le \sigma \le 10.3.$$

5. Ordena los intervalos de confianza para μ respecto a su nivel de confianza.

a. $10.4 \le \mu \le 16.8$.

b. $10.8 \le \mu \le 16.2$.

c. $10.0 \le \mu \le 17.8$.

6. Ordena los siguientes intervalos de confianza para la proporción real p respecto a su nivel de confianza.

a. $0.4 \le p \le 0.82$.

b. $0.33 \le p \le 0.89$.

c. $0.45 \le p \le 0.78$.

7. ¿Son posibles los intervalos de confianza para la proporción real p? Justifica tu respuesta.

a. $1.74 \le p \le 7.12$.

b. $10.74 \le p \le 17.98$.

c. $0.53 \le p \le 0.88$.

8. Construye intervalos de confianza apropiados para estimar μ.

a. $n = 100$, $\bar{x} = 10$, $\sigma = 2$ y $\alpha = 0.05$.

b. $n = 625$, $\bar{x} = 125$, $\sigma = 9$ y $1 - \alpha = 0.99$.

c. $n = 64$, $\bar{x} = 100$, $\sigma = 12$ y $1 - \alpha = 0.95$.

9. Se analizó una muestra aleatoria de 100 edades de ciudadanos de una población con media desconocida μ y desviación estándar $\sigma = 4.5$. Si una ejecución promedió $\bar{x} = 28.3$ años construya un intervalo de confianza para μ. Determina el ancho de cada intervalo y compara los resultados.

a. 90%.

b. 95%.

c. 99%.

10. Un examen sobre las habilidades físicas aplicado a 120 aspirantes a Guardias Nacionales dio una calificación media de 77.8 y una desviación estándar de 11.1; suponiendo que la población de calificaciones se distribuye normalmente. Construye intervalos al 95% de confianza para la media real de las calificaciones de habilidades físicas de los aspirantes.

a. Del 95%.

b. Del 99%.

11. El jefe de personal de “Gorilas” S. A. tomó 33 estaturas de los aspirantes al puesto de vigilante, observó: $\bar{x} = 165$ centímetros y $s = 2.4$ centímetros.

a. Construye un intervalo al 95% de confianza para la media real de las estaturas de todos los aspirantes a vigilantes.

b. Construye un intervalo de confianza para la media real de las estaturas de los aspirantes a vigilantes.

a. Del 95%.

b. Del 90%.

12. Suponga que el tiempo de vida útil de las baterías “Energizer” alcalinas en cierto dispositivo electrónico se distribuye normalmente; se probó una muestra aleatoria de 77 baterías ellas para determinar su tiempo de vida, la muestra produjo $\bar{x} = 152$ minutos y $s = 5$ minutos. Construye un intervalo al 99% de confianza para el verdadero tiempo promedio de funcionamiento de las baterías Energizer utilizadas en ese tipo de dispositivo electrónico.

13. Construya intervalos de confianza apropiados para estimar la proporción real p si:

a. $n = 400,\ x = 100,\ \alpha = 0.05$.

b. $n = 500,\ x = 125,\ 1-\alpha = 0.90$.

c. $n = 1500,\ x = 900,\ 1-\alpha = 0.98$.

14. Un estudio efectuado a 672 solicitudes sobre devolución de impuestos emitidas por el "*SAT*", mostró que 448 dieron lugar a pagos adicionales.

a. Construya un intervalo del 95% de confianza para estimar la verdadera proporción de todas las solicitudes de devolución de impuestos, emitidas por el *SAT* que dan lugar a pagos adicionales.

b. Determine el error máximo cometido en la estimación anterior.

15. Los oxímetros de la marca "NK" utilizados por 500 marineros de la aduana de Manzanillo fallaron en 20 ocasiones.

a. Construya un intervalo del 95% de confianza para la proporción real de oxímetros que fallarán, interprete su resultado.

b. Determine el error máximo cometido en la estimación anterior.

16. Se revisó el contenido de una muestra aleatoria de 25 "cocas" con la leyenda "*contenido neto 600 mililitros*". Se observó que sólo 20 de ellas tuvieron el contenido indicado. Construya un intervalo del 95% de confianza para la verdadera proporción de "*cocas*" que no contienen la cantidad indicada en la etiqueta

17. Al fumigar con "*Bayer*" cierto terreno baldío, 38 de 60 roedores que fueron recolectadas murieron 5 minutos después.

a. Determine el error máximo cometido en la estimación anterior sí $1-\alpha = 0.99$.

b. Construya un intervalo del 99% de confianza para la verdadera proporción de roedores que mueren al ser fumigadas con "*Bayer*".

18. De 350 estudiantes encuestados acerca del tipo de cerveza preferida, 161 de ellos indicaron que prefieren la *cerveza obscura* sobre cualquier otro tipo. Construya intervalos de confianza para la proporción real de estudiantes que prefieren la *cerveza obscura*.

a. De 99%.

b. De 98% .

19. Una muestra aleatoria de 249 fumadores, mostró que 87% considera que el fumar es un placer.

a. Construya un intervalo del 92% de confianza para la verdadera proporción de fumadores que considera el fumar un placer.

b. Construya un intervalo del 90% de confianza para la verdadera proporción de fumadores que considera el fumar un placer.

20. Un tratamiento contra las "*diarreas cerebrales" en las personas*, da esperanza de disminuirlas, e incluso a producido bastantes curas. Un especialista en el tratamiento de ese mal afirma que una nueva técnica las disminuyó considerablemente en 50 de 104 personas. Construye un intervalo de confianza para la proporción real de personas en las que el tratamiento hace disminuir significativamente la *"diarrea cerebral"*.

a. De 95%.

b. De 99%.

21. En un estimador por intervalos para μ: $e = 0.0413$ y $\sigma = 0.6$ con un nivel de confianza de 95%.

a. ¿Qué tamaño de muestra utilizó?

b. Si $\bar{x} = 3.6$, ¿cuáles son los límites de confianza?

22. Para estimar la media real de los diámetros de los tornillos que produce "Rugo" *S. A.* se utilizó una muestra aleatoria de tamaño n. Si $e = 0.01$ y $s = 0.1$ milímetros. Con un nivel de confianza de 99%, determina n si se utiliza $\bar{x}$ para estimar μ, interpreta el resultado.

23. Para estimar la longitud media de las alturas de los tornillos, en milímetros, que expende Ferro S. A. se utilizó una muestra aleatoria de tamaño n de ellos. Si $e = 0.005$, $s = 0.4$ y el nivel de confianza es 98%, determina n si se utiliza $\bar{x}$ para estimar μ, interpreta el resultado.

24. Un pediatra quiere estimar el porcentaje de oxígeno en la sangre de los recién nacidos, y un estudio previo ha sugerido que este valor es del 68%.

a. Si desea no errar por más de 2% con un nivel de confianza de 90%, encuentra el tamaño de muestra requerido.

b. Si no se cuenta con una estimación previa, ¿qué tan grande debe ser la muestra?

25. Un grupo estudiantil quiere estimar el porcentaje de personas que están satisfechas con la comida que se expende en la cafetería del plantel. Determina el tamaño del grupo que debe estudiarse si se quiere tener un 92% de confianza en que la verdadera proporción de p difiere en menos de un punto porcentual de la estimación $\hat{p}$.

26. Sea una población distribuida normalmente, con varianza conocida. ¿Cuál es el nivel de confianza?

a. $\bar{x} - 2.81\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x} + 2.81\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

b. $\bar{x} - 1.73\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x} + 1.73\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

27. Una muestra aleatoria de 50 bolsas de caramelos, envasados por una máquina automática, mostró un contenido promedio de 251 gramos con $s = 10.5$ gramos, determina el nivel de confianza para $e = 0.06$.

28. Una cafetera automática se ajusta de modo que libere cierta cantidad de café en un vaso donde será mezclado con agua caliente. De una muestra aleatoria de 36 bebidas se obtiene $\bar{x} = 300$ mililitros con una desviación estándar $s = 1$ mililitros. Sí $e = 0.3$ determina el nivel de confianza sí $e = 0.3$.

3.2 PRUEBA DE HIPÓTESIS PARA LA MEDIA Y LA PROPORCIÓN POBLACIONAL

¿Qué debe aprender?

4. Analiza el concepto de prueba de hipótesis, para una media y para una proporción, bajo las condiciones del Teorema del Límite Central.
5. Construye pruebas de hipótesis para la media y la proporción, preferentemente con el uso de la calculadora o la computadora en el contexto de una investigación o un problema.
6. Mide la validez de una hipótesis estadística para la media o para la proporción, en el contexto de una investigación o problema.
7. Evalúa las características de interés en una población, de manera formal, a partir de los datos de una muestra, en el contexto de una investigación o un problema.

¿Por qué debe aprenderlo?

Frecuentemente en un problema de inferencia estadística no es el estimar un parámetro (puntualmente o por un intervalo), sino conocer cuál de dos hipótesis relativas al valor de un parámetro es la correcta. Los métodos y elementos teóricos para lograr esto pertenecen a la parte de la inferencia estadística conocida como prueba de hipótesis.

Temática

Elementos que componen una prueba de hipótesis.
Aplicación e interpretación de resultados.

Es posible inferir los valores reales (parámetros) poblacionales de distintas formas, utilizando un estimador por intervalo o a partir de un estimador puntual. En inferencia estadística una prueba de hipótesis es un proceso utilizado para decidir cuándo se puede aceptar o rechazar una afirmación hecha sobre el valor de un parámetro de una población (o de su distribución de probabilidad) en función de las evidencias que proporcionan un conjunto de datos obtenidos de ella (muestra). Así, cuando el objeto de la investigación se relaciona con la determinación de cuál de dos suposiciones, sobre un parámetro, es la correcta, los métodos y técnicas relacionadas para decidir sobre esta problemática forman parte de la inferencia estadística denominada *prueba de hipótesis*.

EJEMPLO 1 (HIPÓTESIS ESTADÍSTICAS)

a. Si $X \sim b(\ x\ , 12,\ \theta\ )$, entonces la afirmación $\theta = 0.8$ es una hipótesis estadística.

b. Si $X \sim N\left(\theta\ , 16\right)$, entonces la afirmación $\theta = 130$ es una hipótesis estadística.

Un proceso de prueba de hipótesis es esencial en la justificación de la decisión que se toma en relación a la selección de uno de dos enunciados (o hipótesis, competitivos entre sí, mutuamente excluyentes y complementarios), respecto al valor de un parámetro de la población en estudio. Los enunciados competitivos se conocen como hipótesis nula y alternativa, respectivamente. Con base en lo antes señalado es necesario señalar los atributos que deben poseer las hipótesis:

i. Deben referirse a una situación real.

ii. Las variables presentes en su planteamiento son precisas, comprensibles, concretas y estar relacionadas con técnicas disponibles para probarlas.

iii. Los términos y las relaciones planteadas son observables y medibles.

La hipótesis inicialmente favorecida como verdadera, se llama hipótesis nula y se representa por H_0, esta hipótesis se refiere al no cambio del parámetro objetivo y se plantea en términos de alguna de las frases: “es igual”, “no mejora”, “no cambia”, etc., y se formula con la intención de rechazarla; la otra hipótesis involucrada es la hipótesis alterna y es la negación de la hipótesis nula, se representa por H_a, representa la conclusión que el investigador quiere demostrar o afirmar tras su estudio, es decir, validar. La certeza de una hipótesis estadística no se conoce de manera absoluta, a menos que se estudie completamente la población (lo que generalmente es impráctico o imposible), entonces “su *aceptación” sólo significa que los datos muestrales no proporcionan la suficiente evidencia como para rechazarla*, por tanto, *“su rechazo” significa que la evidencia muestral la contrasta”*.

Formalmente:

DEFINICIÓN 1 (HIPÓTESIS ESTADÍSTICAS)

a. Una *hipótesis estadística* es una afirmación sobre el valor de un parámetro de una población.

b. La hipótesis nula es una afirmación acerca de un parámetro que inicialmente se supone válida, se representa por H_0.

c. La hipótesis alternativa es la afirmación que se contrapone a la hipótesis nula, se representa por H_a

EJEMPLO 2 (HIPÓTESIS ESTADÍSTICAS)

a. Para una población distribuida normalmente y con parámetros μ y σ^2, son ejemplos de hipótesis estadísticas:

i. $H: \mu = 20$.

ii. $H: \sigma^2 > 16$.

iii. $H: \mu \leq \mu_0$.

b. Si una población sigue una distribución Binomial con parámetro p, la proporción de éxitos, las siguientes afirmaciones son hipótesis estadísticas:

i. $H: p = 0.20$.

ii. $H: p > 0.16$.

iii. $H: p \leq p_0$.

iv. $H: p \geq 0.1$.

El proceso que conduce a tomar una decisión sobre una hipótesis estadística particular recibe el nombre de prueba de hipótesis y dependen del uso de la información contenida en la realización de una muestra aleatoria de la población de interés, incluye:

a. La hipótesis nula representada por H_0, es la hipótesis de investigación sobre el valor del (los) parámetro(s) objetivo(s),

b. La hipótesis alternativa, representada por H_a es negación o contrastación de la hipótesis nula.

c. Un procedimiento de prueba incluye una regla (basada en la información contenida en una muestra) que se utiliza para determinar si se rechaza o no se rechaza H_0. Este procedimiento de prueba incluye las partes:

i. El cálculo de un valor específico de una estadística de prueba sobre la que se basa la decisión de aceptar o rechazar H_0.

ii. La regla de decisión, incluye todos los valores de la distribución muestral para los que se rechaza la hipótesis nula H_0 y que se conoce como región de rechazo o región crítica (RR).

iii. La toma de una decisión, fundamentada en la estadística de prueba y en la región de rechazo (o región crítica). Si para la realización $x_1,\ x_2,\ x_3,\ \ldots,\ x_n$ de la MAS el valor calculado de la estadística de prueba se localiza en la región de rechazo, se rechaza la hipótesis nula H_0 y se acepta la hipótesis alternativa H_a. Si el valor calculado de la estadística de prueba no se localiza en la región de rechazo, simplemente no se rechaza H_0.

Para un parámetro objetivo θ existen tres formas de plantear la hipótesis nula H_0 correspondiente, ellas son:

$$H_0:\ \theta = \theta_0,\ \theta > \theta_0 \text{ o también } \theta < \theta_0,$$

y en todos los casos se representan por $H_0:\ \theta = \theta_0$, teniendo en cuenta su contexto inicial.

EJEMPLO 3 (PLANTEAMIENTO DE UNA HIPÓTESIS ALTERNATIVA)

a. Si $H_0: \mu = 10$, entonces la hipótesis alterna es

$$H_a: \mu \neq 10,$$

Si $H_0: \mu < 10$, entonces la correspondiente hipótesis alterna es

$$H_a: \mu \geq 10.$$

Si $H_0: \mu \geq 10$, entonces la hipótesis alterna es

$$H_a: \mu < 10.$$

b. Si $H_0: p = 0.31$, la hipótesis alterna es

$$H_a: p \neq 0.31.$$

Si $H_0: p < 0.10$, entonces

$$H_a: p \geq 0.10.$$

Si $H_0: p \geq 0.28$, a hipótesis alterna es

$$H_a: p < 0.28.$$

Un proceso de prueba de hipótesis se clasifica de acuerdo con el tipo de hipótesis alternativa planteada, vea la *definición 2*.

DEFINICIÓN 2 (TIPOS DE PRUEBAS DE HIPÓTESIS)

a. Si $H_0: \theta = \theta_0$ contra $H_a: \theta \neq \theta_0$, entonces la prueba se denomina bilateral o de dos colas.

b. Si $H_0: \theta < \theta_0$ contra $H_a: \theta \geq \theta_0$, la prueba se denomina unilateral derecha o de cola derecha.

c. Si $H_0: \theta > \theta_0$ contra $H_a: \theta \leq \theta_0$, la prueba se denomina unilateral izquierda o de cola izquierda.

EJEMPLO 4 (PLANTEAMIENTO DE UNA HIPÓTESIS ALTERNATIVA)

a. Si se afirma: “la proporción de *desempleados* de cierta ciudad es

$H_0: p = 0.34$, entonces $H_a: p \neq 0.34$

y se requiere una prueba bilateral o de dos colas.

b. Para la afirmación “la proporción de alumnos que no utilizan tenis es menor al 30%”, es decir

$H_0: p < 0.30$ (se escribe $p = 0.30$), entonces $H_a: p \geq 0.30$,

se requiere una prueba unilateral derecha o de una cola derecha.

c. Para la afirmación “la edad promedio de los estudiantes que cursan estadística es mayor a 19 años”, entonces

$H_0: \mu > 19$ y $H_a: \mu \leq 19$

y se requiere una prueba unilateral izquierda o de una cola izquierda.

d. Para la afirmación “el peso promedio de las tortas que expenden en cierto comercio es menor a 220 gramos”, la hipótesis nula es

$$H_0: \mu < 220 \text{ (se escribe } \mu = 220), \; H_a: \mu \geq 220$$

y se requiere una prueba unilateral de cola derecha o de cola derecha

e. En la afirmación "el tiempo promedio en que un estudiante termina su bachillerato es tres años",

$$H_0: \; \mu = 3 \text{, por tanto, } H_a: \; \mu \neq 3$$

y se requiere efectuar prueba bilateral o de dos colas.

En el proceso de prueba de hipótesis la región crítica o región de rechazo está constituida por los valores de la distribución del estadístico más lejanos del supuesto valor de *la hipótesis nula*, por tanto, resulta poco probable que el estadístico de prueba los asuma suponiendo que H_0 es verdadera. La *figura 1* muestra la región de rechazo (o región crítica) y de aceptación (no rechazo) de la hipótesis nula H_0 respecto a un parámetro específico.

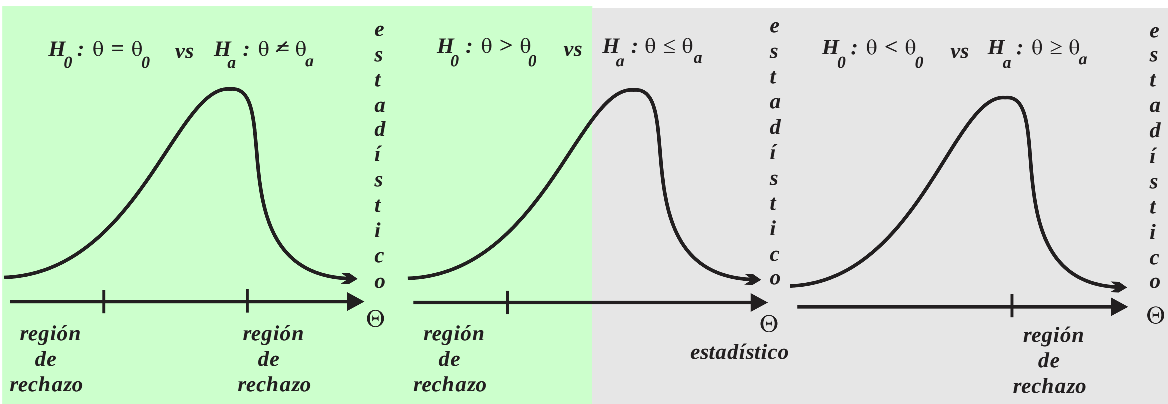


FIGURA 1

La probabilidad asociada a los valores del estadístico para los que la hipótesis nula H_0 se rechaza se conoce como nivel de significación o nivel de significancia y se representa por el símbolo α.

EJEMPLO 5 (REGIONES DE RECHAZO O REGIONES CRÍTICAS)

a. La contrastación

$$H_0: \mu = 2.5 \text{ contra } H_a: \mu > 2.5,$$

requiere de una prueba unilateral derecha.

b. La contrastación

$$H_0: p = 0.58 \text{ contra } H_a: p < 0.58,$$

requiere de una prueba unilateral izquierda.

En una de prueba de hipótesis es posible cometer errores en la toma de una decisión (lo que puede deberse a que la información que proporciona la muestra aleatoria es limitada), por ejemplo, el rechazar la hipótesis nula siendo verdadera o no rechazarla siendo falsa, en ambos casos se ha cometido un error y en cada caso el error recibe un nombre específico, vea el *cuadro 1*.

		H_0	
		no se rechaza	se rechaza
H_0	verdadera	decisión correcta	error Tipo I
	falsa	error Tipo II	decisión correcta

CUADRO 1

La *definición 3:* formaliza los errores antes señalados, les asigna una probabilidad y establece la notación y el nombre con el que nos referiremos a ellos.

DEFINICIÓN 3 (TIPOS DE ERRORES EN PRUEBAS DE HIPÓTESIS)

a. Si se rechaza la hipótesis nula $H_0 : \theta = \theta_0$ siendo verdadera se comete error $tipo\ \ I$.

b. Si se no se rechaza la hipótesis nula $H_0 : \theta = \theta_0$ siendo falsa se comete error $tipo\ \ II$.

c. La probabilidad de cometer error $tipo\ \ I$ se denomina *nivel de significación* (o significancia) y se denota por la letra griega α (alfa).

d. La probabilidad de cometer error $tipo\ \ II$ se representa por la letra griega β (beta).

El lector debe tener en cuenta:

i. Las probabilidades α y β no corresponden a eventos complementarios.

ii. Las probabilidades α y β no corresponden a eventos complementarios, es decir, los errores tipo error $tipo\ \ I$ y error $tipo\ \ II$ no son eventos complementarios.

iii. Al incrementarse α disminuye β y viceversa, al incrementarse β disminuye α.

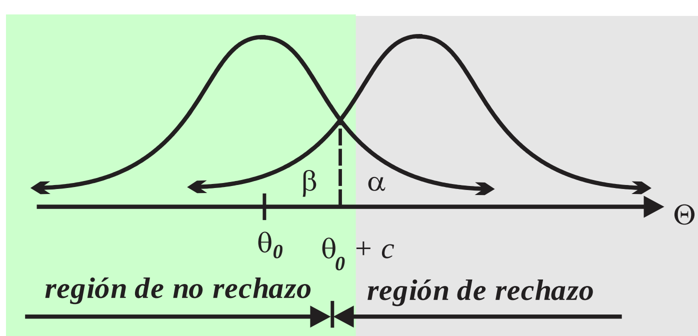


FIGURA 2

La *figura 2* muestra la relación entre los errores antes señalados, observe:

i. Un desplazamiento a la derecha de la línea punteada implica un aumento del tamaño de la región de no rechazo y, por tanto, una disminución de la probabilidad α pero también un incremento de la probabilidad β.

ii. Un desplazamiento a la izquierda de la línea punteada implica una disminución del tamaño de la región de no rechazo y, por tanto, un aumento de la probabilidad α pero también una disminución de la probabilidad β.

Para facilitar su cálculo, la probabilidad de cometer error $tipo\ I$ o $tipo\ II$ se pueden escribir en función de la región de rechazo (o región crítica) como sigue:

$$\alpha = p(\ cometer\ error\ tipo\ I\ ) = p(\ rechazar\ \theta = \theta_0\ siendo\ verdadero\ )$$

$$\alpha = p(\ el\ valor\ \theta_0\ está\ en\ la\ región\ de\ rechazo\ y\ \theta = \theta_0\ es\ verdadera\ ).$$

Similarmente

$$\beta = p(\ cometer\ error\ tipo\ II\ ) = p(\ aceptar\ \theta = \theta_0\ siendo\ falsa\ )$$

$$\beta = p(\ el\ valor\ de\ \theta_0\ está\ en\ la\ región\ de\ no\ rechazo\ y\ \theta_a\ es\ verdadera\ ).$$

EJEMPLO 6 (CÁLCULO DE ERRORES TIPO I Y TIPO II)

El director de un colegio afirma que sólo 25% de los alumnos de recién ingreso a bachillerato terminan su primer año en forma regular. Con el objeto de verificar la afirmación del directivo se selecciona una muestra aleatoria de $n = 20$ estudiantes de primer ingreso al término de su primer año escolar, y se decide rechazar la hipótesis del director si se detectan que menos de ocho ($X \le 7$) de ellos lo terminan siendo regulares. Entonces:

i. Se contrastan: $H_0: p = 0.25$ contra $H_a: p < 0.25$.

ii. Sea $X =$ Número de alumnos que termina el primer año siendo regulares.

iii. La región de rechazo la constituyen los datos:

$$X = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7.$$

La región de no rechazo la constituyen las asignaciones

$$X = 8,\ 9,\ 10,\ 11,\ 12,\ 13,\ 14,\ 15,\ 16,\ 17,\ 18,\ 19,\ 20.$$

a. Calculemos el nivel de significación α.

$$\alpha = p(\ cometer\ error\ tipo\ I\ ) = p(\ rechazar\ p = 0.25\ siendo\ verdadera\ )$$
$$= p(\ X \le 7\ cuando\ p = 0.25\ ).$$

La $VAD\ \ X$ se distribuye en forma binomial con parámetros $p = 0.25$ y $n = 20$, entonces

$$\alpha = p(\ X \le 7\ cuando\ p = 0.25\ ) = B(\ 7, 20, 0.25\ ) = 0.8992.$$

b. Calculemos β para la alternativa

$$H_a:\ p = 0.20.$$

Puesto que

$$\beta = p(\ \theta_0\ está\ en\ la\ región\ de\ no\ rechazo\ y\ \theta_a\ es\ verdadera\ )$$

$$\beta = p(\ X \ge 8,\ \ si\ \ p = 0.20\ ) = 1 - B(\ 7, 20, 0.20\ ) = 0.0321.$$

EJEMPLO 7 (CÁLCULO DE ERRORES TIPO I Y TIPO II)

Un ingeniero desarrolla un nuevo tipo de varilla para los castillos empleados en la industria de la construcción, afirma que tienen una resistencia media a la ruptura de 15 toneladas con una desviación estándar de 0.5 toneladas. Para probar la hipótesis $H_0: \mu = 15$ toneladas contra la alternativa H_a: $\mu < 15$ toneladas se utiliza una muestra aleatoria de 50 varillas. La región de rechazo se define como

$$0 < \overline{X} < 14.9\,.$$

i. Se contrastan

$$H_0: \mu = 15 \text{ contra } H_a:\ \mu < 15.$$

ii. Sea la variable aleatoria: $\overline{X} =$ resistencia media de las varillas seleccionadas.

iii. Se rechazará H_0 si $0 < \overline{X} < 14.9$ y no se rechazará cuando $\overline{X} \geq 14.9$ (específicamente $\overline{X} \geq 14.9$).

a. Para determinar el nivel de significación α:

Si H_0 verdadera y $\overline{X}$ se distribuye normalmente, entonces

$$\mu_{\overline{X}} = \mu = 15 \text{ y } \sigma_{\overline{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{0.5}{\sqrt{50}} = 0.0707,$$

luego

$$\alpha = p\left(\, cometer\ error\ tipo\ I \,\right) = p\left(\ rechazar\ \mu = 15\ siendo\ verdadera\ \right)$$

$$\alpha = p\left(\, 0 \leq \overline{X} < 14.9\ \ y\ \ \mu_{\overline{X}} = 15 \right) = p\left(\frac{0-15}{0.0707} < Z < \frac{14.9-15}{0.0707} \right)$$

$$= p\left(\, -212.16 < Z < -1.41 \,\right) = \Phi\left(\, -1.41 \,\right) - \Phi\left(\, -212.16 \,\right) = 0.0793 - 0 = 0.0793.$$

b. Para calcular β utilizando la alternativa $\mu = 14.8$:

Si H_0: $\mu = 15$ es falsa, la hipótesis alternativa $\overline{X} \geq 14.9$ es verdadera y no se rechaza, por tanto,

$$\beta = p\left(\ \theta_0\ \ está\ en\ la\ región\ de\ no\ rechazo\ \ y\ \ \theta_a\ \ es\ verdadera\ \right)$$

$$= p\left(\overline{X} \geq 14.9 \ \ \text{sí}\ \ \mu_{\overline{X}} = 14.9 \right)$$

$$= p\left(\ Z \geq \frac{14.9-14.8}{0.0707} \right) = p\left(\, Z \geq 1.41 \,\right) = \Phi\left(\, -1.41 \,\right) = 0.0793.$$

EJEMPLO 8 (CÁLCULO DE ERRORES TIPO I Y TIPO II)

Un cantinero afirma que la máquina que deposita la cerveza en los vasos lo hace de manera aproximadamente normal con media $\mu = 200$ mililitros y desviación estándar de $\sigma = 15$ mililitros. Un inspector, para verificar el contenido de cerveza en los vasos, tomó una muestra de $n = 9$ vasos y midió el volumen. Estableció la regla: un volumen medio de cerveza en el intervalo $195 \leq \overline{X} \leq 205$ mililitros, indica que la máquina opera adecuadamente; en otro caso se considera que la máquina no opera correctamente y el volumen medio de cerveza que deposita es $\mu \neq 200$ mililitros.

i. Se contrastan las hipótesis

$$H_0: \mu = 200 \text{ contra } H_a: \mu \neq 200\,.$$

ii. Sea la variable aleatoria: $\overline{X} =$ volumen medio de cerveza en los vasos.

iii. Se rechaza H_0, si $\overline{X} < 195$ o bien $\overline{X} > 205$ mililitros.

a. Determinemos el nivel de significación α considerando $\mu = 200$ verdadera.

$$\alpha = p(\text{cometer error tipo } I) = p(\text{rechazar } \mu = 200 \text{ siendo verdadera})$$

$$\alpha = p(\overline{X} < 195 \text{ si } \mu_{\overline{X}} = 200) + p(\overline{X} > 205 \text{ si } \mu_{\overline{X}} = 200).$$

Si $H_0 : \mu = 200$ es verdadera, entonces $\overline{X}$ se distribuye normalmente y

$$\mu_{\overline{X}} = \mu = 200,\ \sigma_{\overline{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{15}{\sqrt{9}} = 5.$$

$$\alpha = p\left(Z < \frac{195-200}{5} \right) + p\left(Z > \frac{205-200}{5} \right) = p(Z < -1) + p(Z > 1)$$

$$= 1 - p(-1 < Z < 1) = 1 - D(1) = 0.3173.$$

b. Para evaluar la probabilidad de cometer error $tipo\ II$, sea $H_0 :\ \mu = 200$ es falsa y en consecuencia $H_a : \mu = 210$ es verdadera.

$$\mu_{\overline{X}} = \mu = 210 \text{ y } \sigma_{\overline{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{15}{\sqrt{9}} = 5.$$

$$\beta = p(\ \theta_0 \text{ está en la región de no rechazo y } \theta_a \text{ es verdadera}\ )$$

$$= p\ (\ 195 \le \overline{X} \le 205 \ y\ \mu_{\overline{X}} = 210) = p\left(\frac{195-210}{5} \le Z \le \frac{205-210}{5} \right)$$

$$= p(-3 \le Z \le -1) = 0.1587 - 0.0013 = 0.1574.$$

Revisados los elementos que constituyen una prueba de hipótesis estudiemos los casos específicos:

a. Prueba de hipótesis para: μ con σ conocida.

b. Prueba de hipótesis para: μ con σ conocida o σ desconocida pero $n \ge 30$.

c. Prueba de hipótesis para: p con $n \ge 30$.

Para efectuar una prueba de hipótesis utilizaremos el proceso:

1. Identificar el parámetro objetivo (media o proporción).

2. Determinar el valor nulo, establecer la hipótesis nula y formular la hipótesis alternativa.

3. Efectuar el cálculo del estimador puntual de la estadística de prueba.

4. Utilizar el nivel de significación y establecer la región de rechazo.

5. Localizar el valor del estimador puntual de la estadística de prueba en el gráfico de la distribución de la estadística de prueba.

6. Determinar si H_0 debe ser o no rechazada y establecer la conclusión en el contexto del problema.

a. y **b.** Para: μ con σ conocida o $n \ge 30$.

En estos casos, la muestra aleatoria

$$X_1,\ X_2,\ X_3, \ldots,\ X_n$$

de tamaño n extraída de una población normal la estadística $\overline{X}$ se distribuye normalmente con

$$\mu_{\overline{X}} = \mu \text{ y } \sigma_{\overline{X}} = \sigma/\sqrt{n} \text{ o } \sigma_{\overline{X}} = s/\sqrt{n},$$

la estadística Z toma la forma

$$Z = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$$

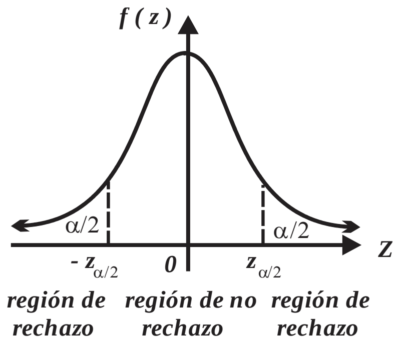
bajo la suposición de que la hipótesis $H_0 : \mu = \mu_0$ es verdadera.

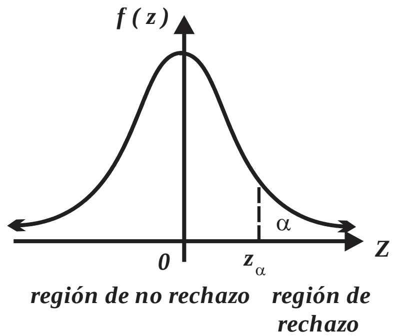
Hipótesis nula: $H_0: \quad \mu = \mu_0$

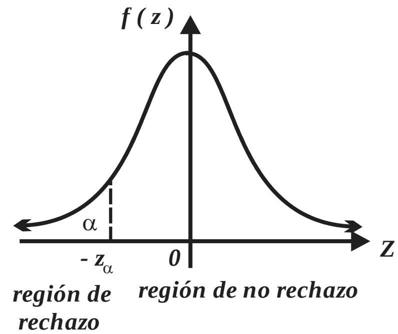
Posibles Hipótesis alternativas: $H_a: \quad \mu \neq \mu_0$, $H_a: \quad \mu > \mu_0$ o $H_a: \quad \mu < \mu_0$.

Estadística de prueba $z = \dfrac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$.

Región de rechazo para la prueba al nivel α.







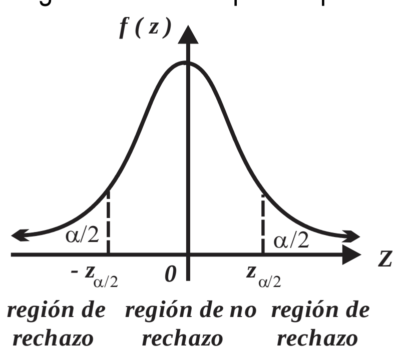
c. Para: p con $n \geq 30$.

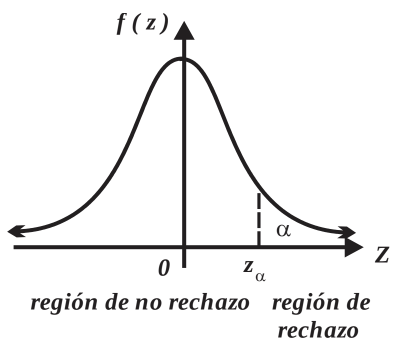
Hipótesis nula: $H_0: \quad p = p_0$

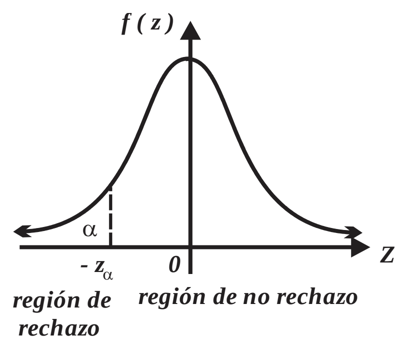
Posibles Hipótesis alternativas: $H_a: \quad p \neq p_0$, $H_a: \quad p > p_0$ y $H_a: \quad p < p_0$.

Estadística de prueba $z = \dfrac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{p_0\, q_0/n}} = \dfrac{x - np_0}{\sqrt{n\, p_0\, q_0}}$.

Región de rechazo para la prueba al nivel α.







EJEMPLO 9 (PRUEBA DEHIPÓTESIS PARA μ)

Para contrastar $H_0: \ \mu = 175$ contra $H_a: \ \mu \neq 175$, utilizando una realización de una muestra de tamaño $n = 49$, suponiendo $\bar{x} = 177$ y $s = 7.7$ unidades y utilizando un nivel de significación del 5%.

1. El parámetro objetivo es μ.

2. H_0: $\mu = 175$contra H_a: $\mu \neq 175$.

3. Estadístico de prueba $z = \dfrac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}} = \dfrac{177 - 175}{7.7/\sqrt{49}} = 1.82$,

(se utilizó la desviación estándar muestral $s = 7.7$ como estimador puntual de σ).

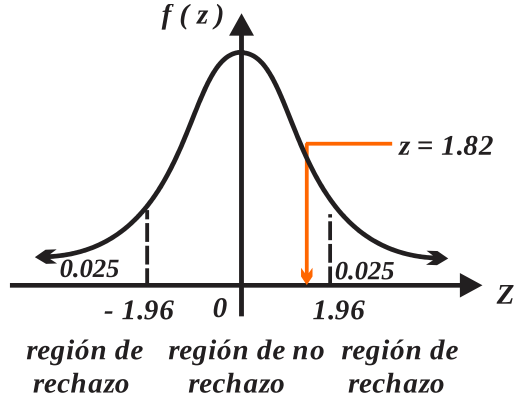
4. Región de rechazo.

Si $\alpha = 0.05$, en las tablas de los percentiles normales se observa

$$-z_{0.025} = -1.96 \text{ y } z_{0.025} = 1.96.$$

Por tanto, se rechaza H_0: $\mu = 175$ sí $z > 1.96$ o $-z < -1.96$.

5. Localización del estadístico de prueba.



6. Conclusión: Puesto que el valor de la estadística de prueba no se encuentra sobre la región de rechazo, no se rechaza la hipótesis H_0: $\mu = 175$.

EJEMPLO 10 (PRUEBA DEHIPÓTESIS PARA μ APLICACIÓN)

Una cocinera afirma: el contenido medio de queso en los "*huaraches"* que expende es superior a 50 gramos, sin embargo, un consumidor de esos "antojitos", piensa que el contenido medio de queso es menor a 50 gramos. Por otra parte, una realización de una muestra de 25 huaraches proporcionó una media muestral de 48 gramos de queso con desviación estándar 6 gramos. Suponiendo normalidad y que se conoce la varianza real, ¿debe rechazarse la hipótesis nula al nivel $\alpha = 0.10$?

1. Parámetro objetivo μ.

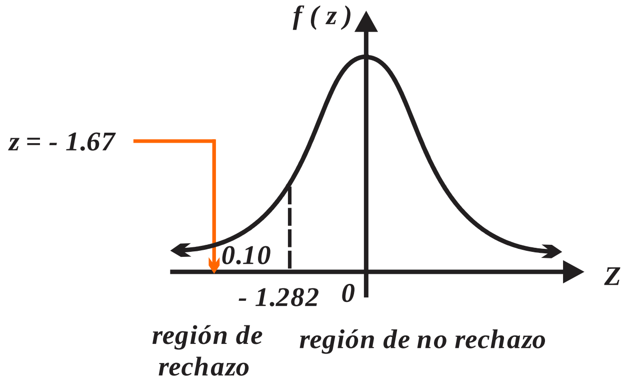
2. H_0: $\mu = 50$ vs H_a: $\mu < 50$.

3. Estadístico de prueba $z = \dfrac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}} = \dfrac{48 - 50}{6/\sqrt{25}} = -1.67$.

4. Región de rechazo.

Si $\alpha = 0.10$, entonces las tablas de la distribución normal dan $z_\alpha = z_{0.10} = -1.282$, entonces se rechaza H_0: $\mu = 50$ cuando $Z < -1.282$.

5. Ubicación del estadístico de prueba.



6. Conclusión.

Se rechaza H_0: $\mu = 50$, a favor de H_a: $\mu < 50$ al nivel de significación dado. Se concluye que el contenido de queso en los *huaraches* es menor a 50 gramos.

EJEMPLO 11 (PRUEBA DEHIPÓTESIS PARA μ APLICACIÓN)

Los diámetros de los pernos producidos por "*Ferromex*" tienen una desviación estándar real de 0.001 centímetros. Una muestra aleatoria de 10 pernos dio un diámetro medio de 0.2546 centímetros. Para contrastar la hipótesis "el diámetro medio verdadero es menor a 0.2526centímetros" utilizando el nivel $\alpha = 0.05$:

1. Parámetro objetivo μ.

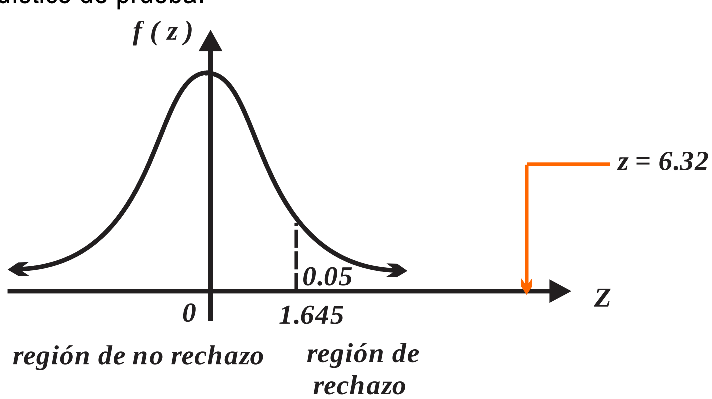
2. H_0: $\mu = 0.2526$ vs H_a: $\mu > 0.2526$.

3. Estadístico de prueba $z = \dfrac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} = \dfrac{0.2546 - 0.2526}{0.001/\sqrt{10}} = 6.32$.

4. Región de rechazo.

Si $\alpha = 0.05$, de las tablas de percentiles de la distribución normal obtenemos, $z_\alpha = z_{0.05} = 1.645$, por tanto, se rechaza H_0: $p = 0.2526$ en caso de $Z > 1.645$.

5. Ubicación del estadístico de prueba.



6. Conclusión.

Puesto que $z = 6.32$ se localiza en la región de rechazo, se rechaza la hipótesis nula $H_0: \mu = 0.2526$, a favor de H_a: $\mu > 0.2526$. En realidad, el diámetro medio de los pernos es mayor a $\mu = 0.2526$ centímetros.

EJEMPLO 12 (PRUEBA DE HIPÓTESIS PARA p, APLICACIÓN)

El 60% de los jóvenes prefiere la coca cola sobre cualquier otra bebida. En una encuesta efectuada a 100 jóvenes se encontró que 70 prefirieron coca cola.

a. Para verificar si la información obtenida es evidencia suficiente para concluir que la proporción de jóvenes que prefiere coca cola es menor al indicado por el estudio, utilizando $\alpha = 0.05$.

1. Parámetro objetivo p.

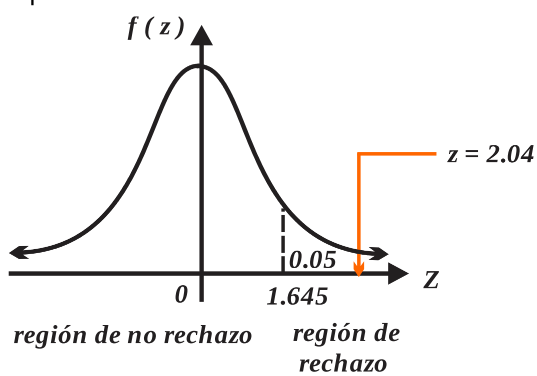
2. H_0: $p = 0.6$ vs H_a: $p > 0.6$.

3. Estadístico de prueba $z = \dfrac{x - np_0}{\sqrt{n\, p_0\, q_0}} = \dfrac{70 - 60}{\sqrt{100(0.6)(0.4)}} = 2.04$.

4. Región de rechazo.

Si $\alpha = 0.05$, de las tablas de la distribución normal obtenemos $z_\alpha = z_{0.05} = 1.645$, por tanto, se rechaza $H_0: p = 0.6$ si $Z > 1.645$.

5. Ubicación del estadístico de prueba.



6. Conclusión.

La estadística de prueba se encuentra en la región de rechazo, se rechaza H_0: $p = 0.6$ al nivel de significación indicado, por tanto, la proporción jóvenes que prefieren consumir coca cola es mayor a la de otras bebidas.

b. La probabilidad que limita el número $z = 2.04$ a su derecha es $\Phi(-2.04) = 0.0207$, por tanto, $\alpha = 0.0207$ o 2.07% es el nivel de significación mínimo a partir del cual se rechaza la hipótesis nula H_0: $p = 0.60$.

PROBLEMAS PROPUESTOS 3.2

1. Sea $\mu_0 = 123$ la hipótesis nula correspondiente a un proceso de prueba, si la hipótesis alterna es:

a. $\mu = 100$. **b.** $\mu > 123$.
c. $\mu \neq 123$. **d.** $\mu = 90$.
e. $\mu < 123$. **f.** $\mu = 105$.
g. $\mu = 125$. **h.** $\mu = 120$.

Clasifique el tipo de prueba como unilateral o bilateral.

2. Sea la afirmación "el promedio final de un alumno del *CCH Oriente* es $\mu = 7.83$". Plantee la hipótesis nula y una hipótesis alterna.
a. El promedio final del alumno no es $\mu = 7.83$.
b. El promedio final del alumno es menor a $\mu = 7.83$.
c. El promedio final del alumno es mayor a $\mu = 7.83$.

3. Para la afirmación "la proporción de estudiantes que alguna vez probó cierta droga" es 37.3%, plantee la hipótesis nula y la hipótesis alternativa.

4. ¿Cuáles de las afirmaciones no representan hipótesis estadísticas? ¿Por qué?
a. $H: p = 12$.
b. $H: \bar{x} \neq 8$.
c. $H: \bar{x} < 0.33$.
d. $H: \sigma = 2.33$.

5. ¿Cuáles pares de afirmaciones no corresponden a hipótesis estadísticas, ¿por qué?
a. H_0: $\mu = 12$ contra H_a: $\mu = 13$.
b. H_0: $\mu \neq 8$ contra H_a: $\mu = 8$.**c.** H_0: $p = 0.33$ contra H_a: $\mu > 0.40$.
d. H_0: $\sigma = 2.33$ contra H_a: $\mu < 2.33$.
Justifique su respuesta.

6. Si se pretende verificar la hipótesis nula: el viagra es eficaz. Explique:
a. En qué condiciones se comete error $tipo\ I$.
b. En qué condiciones se comete error $tipo\ II$.

7. El director de un Colegio afirma "al menos el 40% de los estudiantes del quinto semestre es irregular", explique. cómo el director podría cometer:
a. Un error $tipo\ I$.
b. Un error $tipo\ II$.

8. Un administrador quiere verificar, si un empleado es el ideal para asumir la jefatura de una sección.
a. ¿Qué tipo de error comete?, si rechaza equivocadamente la hipótesis nula "el empleado es ideal para la jefatura de la sección".
b. ¿Qué tipo de error comete?, si acepta equivocadamente la hipótesis nula "el empleado es ideal para la jefatura de la sección".

9. El director de una escuela se interesa en la eficiencia de un "curso gratuito" para lograr que más estudiantes se integren a su grupo político.
a. ¿Qué hipótesis prueba si comete un error del $tipo\ I$ al rechazar de manera errónea que el "curso gratuito" no es efectivo?
b. ¿Qué hipótesis prueba si comete un error del $tipo\ II$ al aceptar de manera errónea que el curso gratuito es efectivo?

10. El encargado de la fonda "El Hijo de Nada" considera que la proporción de tortas que requieren menos de 8 minutos en su elaboración es $p = 0.6$.

Si en una muestra aleatoria de 10 tortas se observa que tres o más requirieron 8 minutos o más minutos en su elaboración, entonces la hipótesis $p = 0.6$ debe rechazarse a favor de la alternativa $p > 0.6$.

a. ¿Cuál es el nivel de significación si la verdadera proporción es $p = 0.6$?

b. ¿Cuál es el valor de β, si el verdadero valor para la proporción es $p = 0.3$?

Utiliza la distribución Binomial.

11. Un químico afirma "el nuevo solvente aplicado a los chicles que se encuentran pegados en el piso elimina el 70% de ellos". Para verificar su afirmación, el solvente se utilizará a 12 chicles pegados en el piso (elegidos al azar). Si al menos de 11 chicles son eliminados, se acepta la hipótesis $p = 0.70$ en cualquier otro caso se concluye que $p < 0.70$.

a. Evalúe α sí $p = 0.70$.

b. Evalúe β sí $p = 0.90$.

Utiliza la distribución Binomial.

12. La Dra. Morales afirma: más del 40% de los asistentes a su clínica tienen hongos en los pies. Para probar tal afirmación se revisan siete pacientes asignados a la doctora. Si tres o más de ellos presentan hongos en los pies se acepta la hipótesis nula H_0: $p = 0.40$, de otro modo se concluye $H_a: p < 0.40$.

a. Evalúa α sí H_0: $p = 0.40$.

b. Evalúa β para la alternativa H_a: $p = 0.30$.

Utiliza la distribución Binomial.

13. En una población distribuida normalmente con $\sigma = 8.4$ centímetros, se contrastan $\mu_0 = 80$ vs $\mu_a < 80$ centímetros con base en una muestra aleatoria de tamaño 100.

a. ¿Cuál es la probabilidad de cometer un error $tipo\ I$ si se rechaza la hipótesis nula cuando $\overline{X} < 78$ centímetros, y de otra manera se acepta?

b. ¿Cuál es la probabilidad de cometer un error $tipo\ II$, si en realidad $\mu = 77.5$ centímetros?

14. Para una población normal con $\sigma = 20$ centímetros se contrastan las hipótesis $\mu_0 = 255$ contra $\mu_a \neq 255$ centímetros; con base en una muestra aleatoria de tamaño $n = 36$. Se rechaza la hipótesis nula cuando $\overline{X} \leq 245$centímetros o bien, si $\overline{X} \geq 262$ centímetros.

a. Determina la probabilidad de cometer un error $tipo\ I$;

b. Determina la probabilidad de cometer un error $tipo\ II$, sí $\mu_0 = 258$.

15. Una compañía cosmetóloga desarrolla actualmente un nuevo champú y está interesada en la altura de la espuma en milímetros que éste genera. La altura de la espuma se distribuye de forma aproximadamente normal con $\sigma = 20$ milímetros. La compañía confronta H_0: $\mu_0 = 175$ contra H_a: $\mu > 175$ milímetros, utilizando una ejecución de una muestra aleatoria con $n = 10$. Para la región crítica

$$\overline{X} > 185.$$

a. Determina α.

b. Determina β si realmente $\mu = 195$ milímetros.

16. Al encargado del departamento de control de calidad de la Tres Estrellas, le preocupa que el contenido promedio de fibra de las galletas dietéticas que produce pueda no ser de la cantidad deseada, misma que es de 24 gramos por caja. Si μ es el promedio de la población de referencia, contraste $\mu_0 = 24$ gramos por caja vs $\mu_a \neq 24$ gramos por caja. Si una ejecución de una muestra aleatoria de

280 cajas de "galletas dietéticas" proporcionó $\bar{x} = 24.08$ y $s = 1$ gramos por caja, concluye que se debe rechazar la hipótesis nula y que μ es significativamente diferente a 24 gramos por caja. Usa $\alpha = 0.05$.

17. Se desea verificar la afirmación "los *políticos corruptos* pasan en promedio 12.8 meses en prisión". Un ciudadano analiza una realización de una muestra aleatoria de 60 casos y obtiene $\bar{x} = 11$ meses y $s = 3.5$ meses.
a. Contrasta $\mu_0 = 12.8$ meses vs $\mu_a \neq 12.8$ meses en el nivel de significación de $\alpha = 0.01$.
b. Contrasta $\mu_0 = 12.8$ vs $\mu_a < 12.8$ meses en el nivel de significación de $\alpha = 0.01$.

18. El encargado de la seguridad de cierta empresa quiere verificar la hipótesis "el promedio de tiempo real requerido por el velador para realizar una ronda es 25 minutos. Una ejecución de una muestra aleatoria de 32 rondas del velador promedió 25.8 minutos con una desviación estándar de 1.5 minutos:
a. Determina en el nivel 0.05 de significación si tiene evidencia suficiente para rechazar la hipótesis nula $\mu_0 = 25$.
b. Determina en el nivel 0.10 de significación si tiene evidencia suficiente para rechazar la hipótesis nula $\mu_0 = 25$ a favor de $\mu_a > 25$.

19. Una realización de una muestra aleatoria de 54 camisas, promedió una vida útil media de 65 lavadas y una desviación estándar de 6 lavadas. Se afirma que en condiciones de clima templado las camisas tienen una vida útil promedio de 80 lavadas.
a. ¿Puede concluirse, en el nivel de 0.05 de significación, que su uso en un clima tropical reduce la vida útil promedio de las camisas?
b. ¿Puede concluirse, en el nivel de 0.01 de significación, que su uso en un clima tropical reduce la vida útil promedio de las camisas?

20. Se afirma que el 40% de los fumadores refieren la marca *"delicados"*. En una realización de una muestra aleatoria de 120 consumidores de cigarrillos 50 de ellos prefirieron la marca *"delicados"*. ¿Estos resultados presentan evidencia suficiente para concluir que la proporción de fumadores *"delicados"* es superior a la indicada por el estudio?
a. Utiliza el nivel de significación $\alpha = 0.05$.
b. Utiliza el nivel de significación $\alpha = 0.01$.
c. ¿Cuál es el nivel de significación a partir del que se rechaza la hipótesis nula?

21. Una realización de una muestra aleatoria de $n = 1000$ caramelos mostró que $x = 306$ de ellos tenían peso distinto al especificado en su etiqueta.
a. ¿Proporcionan los datos evidencia para suponer $p < 0.31$? Utiliza una probabilidad de cometer error $tipo\ I$ de 0.05.
b. ¿Proporcionan los datos evidencia que indique $p < 0.31$? Utiliza una probabilidad de cometer error $tipo\ I$ de 0.01.

22. Un distribuidor de la revista "*Nenas*" supone que el 58% de sus clientes renovarán su suscripción. Para verificar su afirmación entrevistó a 200 de ellos y 112 le indicaron que sí lo harían.
a. ¿Qué hipótesis alternativa debe escoger el editor para determinar si los datos proporcionan suficiente evidencia de una reducción de la proporción p de suscriptores a la revista "*Nenas*"?
b. Efectúa la prueba para $\alpha = 0.05$ y concluye.
c. Efectúa la prueba para $\alpha = 0.01$ y concluye.
d. Efectúa la prueba para $\alpha = 0.001$ y concluye.
e. ¿Cuál es el nivel de significación mínimo con el que se debe rechazar la hipótesis nula?

23. Un administrador de la línea de autobuses "*Estrella Blanca*" sostiene que menos del 6%

de los equipajes extraviados no se recuperan.

a. Pruebe esta afirmación, si en una ejecución de una muestra aleatoria 14 de 200 equipajes extraviados no se encontraron y la probabilidad de cometer un error $tipo\ I$ es 0.01.

b. ¿Cuál es el nivel de significación mínimo (unilateral) para rechazar la hipótesis: 0.06 de todos los equipajes perdidos no se recuperan?

24. Para contrastar la afirmación del jefe del departamento de transporte de la *Cruz Roja*, "por lo menos 40% de todas las llamadas que recibe son emergencias de vida o muerte", se tomó una muestra aleatoria de sus registros y se encontró que 49 de 150 llamadas fueron emergencias de vida o muerte.

a. ¿Qué puede concluirse, sobre la afirmación anterior, si la probabilidad de cometer un error $tipo\ I$ debe ser menor a 0.08?

b. ¿Qué puede concluirse, sobre la afirmación anterior, si la probabilidad de cometer un error $tipo\ I$ debe ser menor de 0.20?

25. Un médico afirma: el 10% de todas las personas expuestas a cierta cantidad de radiación X tendrá secuelas. Si en una realización de una muestra aleatoria de 180 personas expuestas a la radiación únicamente 20 de ellas presentaron secuelas.

a. Pruebe $H_0: p_0 = 0.10$ contra H_a: $p_a > 0.10$ en el nivel de significación 0.05.

b. ¿Cuál es el nivel de significación mínimo (unilateral) en el que se rechaza la hipótesis nula antes señalada?

26. En una realización de una muestra aleatoria se observó que 80 de 140 accidentes industriales fueron consecuencia de errores de los trabajadores. Suponga normalidad.

a. Utilice el nivel de significación del 0.05 para probar la hipótesis "el 0.5 de los accidentes industriales son consecuencia de los errores del trabajador".

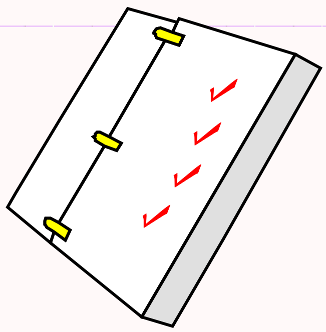
b. ¿Cuál es nivel de significación mínimo (bilateral) para rechazar la hipótesis: "el 0.5 de los accidentes industriales es error de los trabajadores?

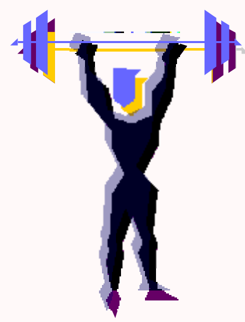
27. Se toma una realización de una muestra aleatoria de 50 botellas de leche de la marca "*La vaquita*" y se detectan 14 con exceso de grasa.

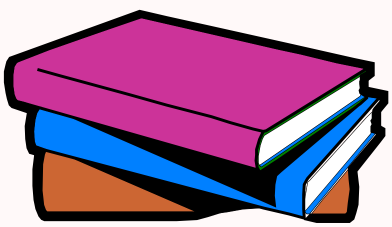
a. ¿Podemos rechazar H_0: $p_0 = 0.12$ a favor de H_a: $p_a > 0.12$ con el nivel 0.002 de significación?

b. ¿Podemos rechazar la hipótesis nula $p_0 = 0.12$ a favor de H_a: $p_a \neq 0.12$ con el nivel 0.01 de significación?

c. ¿Cuál es el nivel de significación mínimo (unilateral) en el que se puede rechazar la hipótesis alternativa antes señalada?







3.3 RESUMEN Y AUTOEVALUACIÓN

ACTIVIDADES

SECCIÓN 3.1

ACTIVIDAD 1 (Estimadores puntuales)

a. Calcula el estimador puntual del tiempo media de sus llamadas telefónicas del último mes.
b. Calcula el estimador puntual del monto diario que utilizó en transportarse a la escuela en las dos últimas semanas.
c. Calcula el estimador puntual de la proporción de materias que ha acreditado.

ACTIVIDAD 2 (Efecto del tamaño de muestra)

Calcula intervalos de confianza para μ, si $\sigma = 1$, $\bar{x} = 12$, $(1-\alpha)100\% = 90\%$, y:

a. $n = 16$.
b. $n = 25$.
c. $n = 36$.
d. $n = 49$.
e. ¿Qué puedes decir acerca del tamaño de un intervalo de confianza conforme aumenta el tamaño de la muestra?

ACTIVIDAD 3 (Efecto del nivel de confianza)

Calcula intervalos de confianza para μ, si $\sigma = 1$, $\bar{x} = 12$, $n = 16$ y:

a. $(1-\alpha)100\% = 90\%$.
b. $(1-\alpha)100\% = 95\%$.
c. $(1-\alpha)100\% = 98\%$.
d. $(1-\alpha)100\% = 99\%$.
e. ¿Qué puedes afirmar sobre el tamaño de un intervalo de confianza conforme aumenta el nivel de confianza?

ACTIVIDAD 4 (Efecto del tamaño de muestra)

Calcula intervalos de confianza para p si $x = 10$, $(1-\alpha)100\% = 90\%$ y:

a. $n = 16$.
b. $n = 25$.
c. $n = 36$.
d. $n = 49$.
e. $n = 81$.
f. ¿Qué puedes decir acerca del tamaño de un intervalo de confianza conforme aumenta el tamaño de la muestra?

ACTIVIDAD 5 (Efecto del nivel de confianza)

2. Calcula intervalos de confianza para p sí $\hat{p} = 0.30$, $n = 64$ y:

a. $(1-\alpha)100\% = 90\%$.
b. $(1-\alpha)100\% = 95\%$.
c. $(1-\alpha)100\% = 98\%$.
d. $(1-\alpha)100\% = 99\%$.
f. ¿Qué puedes afirmar sobre el tamaño de un intervalo de confianza conforme aumenta el nivel de confianza?

SECCIÓN 3.2

ACTIVIDAD 6

Haz una realización de una muestra aleatoria de tamaño $n = 10$ de su grupo de estadística (al que debe considerar como una población). Plantee una hipótesis referente al peso promedio de los elementos del grupo. ¿Proporcionan estos datos evidencia de los miembros de su grupo tiene pesos distintos al peso promedio supuesto? Utiliza el nivel de significación de:

a. $\alpha = 0.05$.
b. $\alpha = 0.01$.
c. $\alpha = 0.1$.

Discute sus resultados.

RESUMEN

SECCIÓN 3.1

Estimador

Función que depende de una variable aleatoria y que se utiliza para inferir el valor de un parámetro

Estimador puntual.

Valor asociado por un estadístico a una realización de la MAS que se utiliza para inferir el valor del parámetro de una población.

Intervalo aleatorio de confianza.

Intervalo de la forma $\Theta_I \leq \theta \leq \Theta_S$, en el que los extremos son funciones que dependen de una MAS.

Estimador por intervalo o intervalo de confianza.

Intervalo de valores $\hat{\theta}_I \leq \theta \leq \hat{\theta}_S$, con una confianza previamente establecida, en el que se estima que contiene el valor de un parámetro. $\hat{\theta}_I$ y $\hat{\theta}_S$ dependen del valor de la estadística o del estimador.

Nivel de confianza

Probabilidad de que el parámetro a estimar se encuentre en el intervalo de confianza.

Elementos de un intervalo de confianza $p\left(\hat{\theta}_I \leq \theta \leq \hat{\theta}_S \right) = 1-\alpha$.

a. Límite inferior de confianza $\hat{\theta}_I$.

b. Límite superior de confianza $\hat{\theta}_S$.

c. Parámetro objetivo θ.

d. Coeficiente o nivel de confianza $1-\alpha$.

e. Confianza $\left(1-\alpha \right)100\%$.

f. Longitud del intervalo $L = \hat{\theta}_S - \hat{\theta}_I$.

Intervalo de confianza para μ, con σ conocida.

$\bar{x} - z_{\alpha/2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x} + z_{\alpha/2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$, $z_{\alpha/2}$ es el valor del percentil z que deja un área de $\alpha/2$ a su derecha.

Intervalo de confianza para μ, con $n \geq 30$.

$\bar{x} - z_{\alpha/2}\dfrac{s}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x} + z_{\alpha/2}\dfrac{s}{\sqrt{n}}$, $z_{\alpha/2}$ es el valor del percentil z que deja un área de $\alpha/2$ a su derecha.

Error máximo cometido al estimar μ.

$$E_{Máx} = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}.$$

Tamaño de la muestra n

$$n = \left(\frac{z_{\alpha/2}\,\sigma}{E_{MAX}} \right)^2.$$

Intervalo de confianza para p.

$\hat{p} - z_{\alpha/2}\sqrt{\dfrac{\hat{p}\hat{q}}{n}} < p < \hat{p} + z_{\alpha/2}\sqrt{\dfrac{\hat{p}\hat{q}}{n}}$, $z_{\alpha/2}$ el valor del percentil z que deja un área de $\alpha/2$ a su derecha.

Error máximo cometido al estimar p.	$E_{Máx} = z_{\alpha/2}\sqrt{\hat{p}\hat{q}/n}$
Tamaño de la muestra n ***si se conoce*** $\hat{p}$.	$n = \left(\dfrac{z_{\alpha/2}}{E_{Máx}}\right)^2 \hat{p}\hat{q}$.
Tamaño de la muestra n ***si no se conoce*** $\hat{p}$.	$n = \left(\dfrac{z_{\alpha/2}}{2E_{Máx}}\right)^2$.

SECCIÓN 3.2

Hipótesis Estadística.	Suposición acerca del valor de un parámetro.
Hipótesis nula	Suposición acerca del valor de un parámetro que indica que la situación no cambia.
Hipótesis Alternativa.	Aquella suposición que se contrapone a la hipótesis nula.
$Error\ tipo\ I$.	Rechazar la hipótesis nula siendo verdadera.
$Error\ tipo\ II$.	Aceptar la hipótesis nula siendo falsa.
Nivel de significación α.	Probabilidad de cometer error $tipo\ I$.
β.	Probabilidad de cometer error $tipo\ II$.
Estadístico de prueba.	Es el valor de una función que depende de los datos muestrales, y sobre el que se basa la decisión de aceptar o rechazar
Región crítica o región de rechaza.	Conjunto de valores para los que se rechaza la hipótesis nula.
Toma de una decisión.	Si el valor calculado del estadístico de prueba cae en la región de rechazo, se rechaza la hipótesis nula H_0 y se acepta la hipótesis alternativa H_a. Si el valor calculado del estadístico de prueba no se encuentra en la región de rechazo, no se rechaza H_0.
Hipótesis alternativa bilateral.	Si $H_0 : \theta = \theta_0$, entonces la hipótesis alternativa correspondiente es $H_a : \theta \neq \theta_0$ y la prueba se denomina bilateral o de dos colas.
Hipótesis alternativa unilateral.	Si $H_0 : \theta > \theta_0$ ó $H_0 : \theta < \theta_0$, entonces la hipótesis alternativa correspondiente es $H_a : \theta < \theta_0$ o $H_a : \theta > \theta_0$ respectivamente, la prueba se denominan: unilateral izquierda o derecha respectivamente.

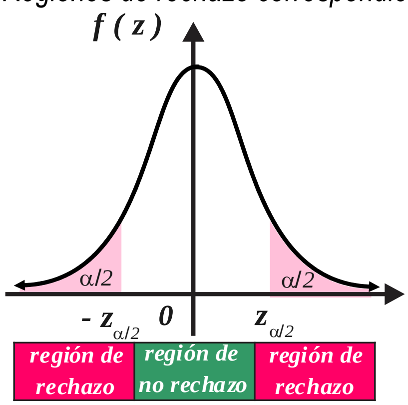
Características de una prueba de hipótesis para μ

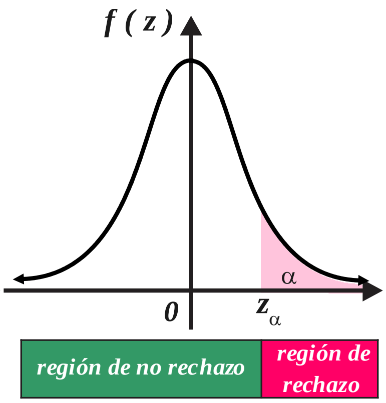
Hipótesis nula : $H_0 : \mu = \mu_0$.

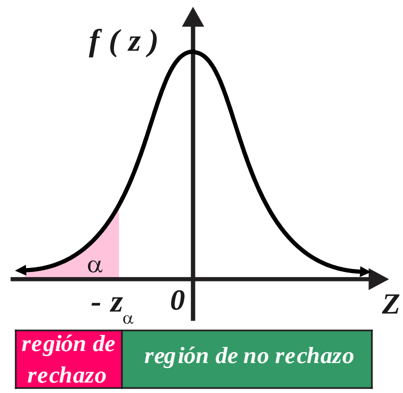
Estadística de prueba: $z = \dfrac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}}$.

Hipótesis alternativa	*Región de rechazo al nivel de confianza* α .
$H_a : \mu \neq \mu_0$	$z > z_{\alpha/2}$ o $z < -z_{\alpha/2}$
$H_a : \mu > \mu_0$	$z > z_{\alpha}$
$H_a : \mu < \mu_0$	$z < -z_{\alpha}$

Regiones de rechazo correspondientes:







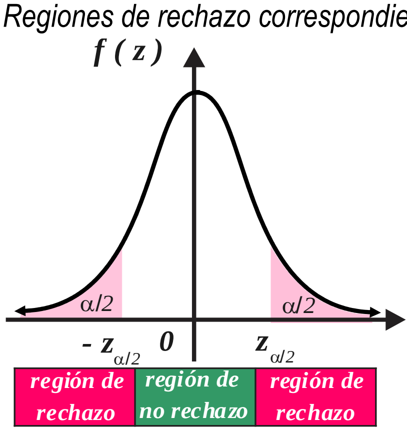
Características de una prueba de hipótesis para p

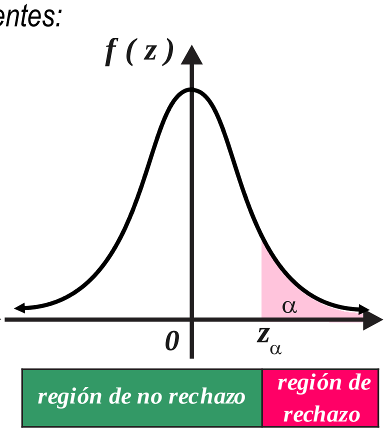
Hipótesis nula: $H_0 : p = p_0$.

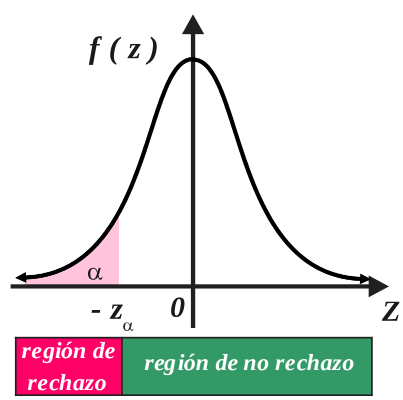
Estadística de prueba: $z = \dfrac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{p_0 q_0 / n}} = \dfrac{x - np_0}{\sqrt{n\, p_0\, q_0}}$.

Hipótesis alternativa	*Región de rechazo al nivel de confianza* α .
$H_a : p \neq p_0$	$z > z_{\alpha/2}$ o $z < -z_{\alpha/2}$
$H_a : p > p_0$	$z > z_{\alpha}$
$H_a : p < p_0$	$z < -z_{\alpha}$

Regiones de rechazo correspondientes:







USO DE LAS TECNOLOGÍAS

SECCIÓN 3.1

EJEMPLO 6 BIS (INTERVALO DE CONFIANZA PARA μ CON APPS).

Se midió la concentración de azúcar en el contenido de una muestra de 49 refrescos Pascual cuyo envase indica "contenido 355 mililitros". Se encontró una media aritmética de 36 gramos; si suponemos que la desviación estándar del contenido de azúcar en la población es $\sigma = 4$, entonces un intervalo de confianza del 95% para la concentración media de azúcar se construye de la siguiente forma.

DATOS:

Tamaño de muestra $n = 49$.
Media aritmética $\bar{x} = 36$.
Desviación estándar de la población $\sigma = 4$.
Nivel de confianza del 95%.

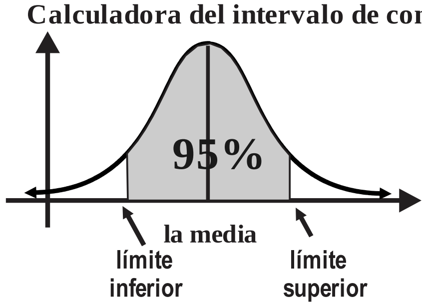
a. Con la aplicación **"APRENDER SOBRE LA ELECTRÓNICA"**, con liga **http://www.learningaboutelectronics.com/Articulos/Calculadora-de-intervalo-de-confianza.php**

Una vez que ingresaste al sitio, solo debes completar los campos solicitados y dar click Izquierdo en la pestaña "calcular".

Aprender sobre la electrónica

Inicio | Artículos | Proyectos | Foros | **Calculadoras** | Contacto

Calculadora del intervalo de confianza



Introduzca los números en notación español (ejemplos 1.020,5; 1.2; 12,4)

Introduzca la Media: 36

Introduzca la Desviación estándar: 4

Introduzca el tamaño de muestra: 49

Seleccione el Intervalo de Confianza: 95%

Intervalo de Confianza:

34.88 (Límite inferior) a 37.12 (límite superior)

Calcular

b. Con la aplicación **"MATHCRACKER"**, con liga **https://mathcracker.com/es/calculadora-intervalo-de-confianza-media-z**

Una vez que ingresaste al sitio, solo debes completar los campos solicitados y dar click Izquierdo en la pestaña “calcular”.

Instrucciones: Utilice nuestra Calculadora de intervalos de confianza para calcular un intervalo de confianza para la media poblacional μ, en el caso de que se conozca la desviación estándar poblacional σ. Escriba la media de la muestra, la desviación estándar de la población, el tamaño de la muestra y el nivel de confianza, y el intervalo de confianza se calculará automáticamente.

- **Media de la muestra ($\bar{X}$)** 36
- **Desviación Estándar Población (σ)** 4
- **Tamaño de muestra (N)** 49
- **Nivel de Confianza** 95%

CALCULAR

Solution:

Necesitamos construir el intervalo de confianza 95% para la media poblacional μ. Se proporciona la siguiente información:

Media de la muestra ($\bar{X}$)
Desviación Estándar Población (s)
Tamaño de muestra (N)

El valor crítico para $\alpha = 0.02$ es $z_c = z_{1-\alpha/2} = 2.326$. El intervalo de confianza correspondiente se calcula como se muestra a continuación:

$$CI = \left(\bar{X} - z_c \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \bar{X} + z_c \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right)$$

$$= \left(36 - 1.96 \frac{4}{\sqrt{49}},\ 36 + 1.96 \frac{4}{\sqrt{49}} \right)$$

$$= \left(34.88, 37.12 \right)$$

Por lo tanto, según los datos proporcionados, el intervalo de confianza 95% para la media de la población es 34.88 < μ < 37.12, lo que indica que estamos 95% seguros de que la media de la población real μ está contenida en el intervalo (34.88, 37.12).

EJEMPLO 8 BIS (INTERVALO DE CONFIANZA PARA p CON APPS).

Un estudio sobre los gustos musicales realizado a $n = 500$ estudiantes universitarios (seleccionados al azar) mostró que $x = 340$ de ellos escuchan la estación radiofónica “La Zeta”. Construyamos un intervalo de confianza del 98% para la proporción real de universitarios que escuchan “La Zeta”.

DATOS:

Tamaño de muestra $n = 500$.
Número de casos favorables $x = 340$.
Nivel de confianza del 98%.

a. Con la aplicación **“MATHCRACKER”** on-line con liga
https://mathcracker.com/es/calculadora-proporciones-intervalo-confianza
Una vez que has ingresado al sitio, solo debes completar los campos solicitados y dar click Izquierdo en la pestaña “calcular”. Obtienes

mathcracker CALCULADORAS EN LÍNEA HERRAMIENTAS GRÁFICAS GALLETAS MATEMÁTICAS USADO FRECUENTEMENTE

Intervalo de confianza para calculadora de proporciones

Instrucciones: Utilice este intervalo de confianza paso a paso para la calculadora de proporciones, proporcionando los datos de muestra en el siguiente formulario:

- Número de casos favorables (X) — 340
- Tamaño de muestra (N) — 500
- Proporción de la muestra (proporcione en lugar de X si se conoce) —
- Nivel de confianza (Ej.: 0.95, 95, 99, 99%)= — 98

CALCULAR

Solution:

Necesitamos construir el intervalo de confianza 98% para la proporción de población. Se nos ha proporcionado la siguiente información sobre el número de casos favorables:

Casos favorables $X =$	
Tamaño de muestra N	

La proporción de la muestra se calcula de la siguiente manera, basada en el tamaño de la muestra N = 500 y el número de casos favorables $X = 340$:

$$\hat{p} = \frac{X}{N} = \frac{340}{500}$$

El valor crítico para $\alpha = 0.02$ es $z_c = z_{1-\alpha/2} = 2.326$. El intervalo de confianza correspondiente se calcula como se muestra:

$$\begin{aligned} CI\ (\text{Proportion}) &= \left(\hat{p} - z_c \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\ ,\ \hat{p} + z_c \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right) \\ &= \left(0.68 - 2.326 \cdot \sqrt{\frac{0.68(1-0.68)}{500}}\ ,\ 0.68 - 2.326 \cdot \sqrt{\frac{0.68(1-0.68)}{500}}\right) \\ &= (0.631\ ,\ 0.729) \end{aligned}$$

Por lo tanto, según los datos proporcionados, el intervalo de confianza 98% para la proporción de la población es $0.631 < p < 0.729$, lo que indica que estamos 98% seguros de que la proporción de la población real p está contenida en el intervalo $(0.631\ ,\ 0.729)$

SECCIÓN 3.2

EJEMPLO 11 BIS (PRUEBA DEHIPÓTESIS PARA μ CON APPS)

Los diámetros de los pernos producidos por "*Ferromex*" tienen una desviación estándar real de 0.001 centímetros. Una muestra aleatoria de 10 pernos dio un diámetro medio de 0.2546 centímetros. Para contrastar la hipótesis "el diámetro medio verdadero es menor a 0.2526centímetros" utilizando el nivel $\alpha = 0.05$:

DATOS:

Parámetro objetivo μ.

Tipo de prueba: H_0: $\mu = 0.2526$ vs H_a: $\mu > 0.2526$.

Tamaño de muestra $n = 10$.

Media aritmética $\bar{x} = 0.2546$.

Desviación estándar $s = 0.001$.

Nivel de significación $\alpha = 0.05$.

a. Con la aplicación **"MATHCRACKER"** on-line con liga

https://mathcracker.com/es/prueba-z-para-una-media

Una vez que ingresaste al sitio, solo debes completar los campos solicitados y dar click Izquierdo en la pestaña "calcular". Obtienes,

Solution:

Se ha proporcionado la siguiente información:

Media de la población hipotética (μ)=	0.2546
Desviación estándar de la población (σ)=	0.001
Tamaño de muestra (n)=	10
Media muestral ($\overline{X}$) =	0.2546
Nivel de significación (α)	0.05

(1) *Hipótesis nula y alternativas*:

$$H_0 : \mu \quad = \quad 0.2526$$

$$H_a : \mu \quad > \quad 0.2526$$

Esto corresponde a una prueba de hipótesis de cola derecha, para la cual se utilizará una prueba Z, para la media con una desviación estándar de población conocida.

(2) *Región de rechazo*

Según la información proporcionada, el nivel de significación es $\alpha = 0.05$, y el valor crítico para una prueba de hipótesis de cola derecha es $z_C = 1.64$.

La región de rechazo para esta prueba de hipótesis de prueba derecha es $R = \{ z : z > 1.645 \}$.

(3) *Estadística de prueba*

La estadística z se calcula de la siguiente manera:

$$z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}}$$

$$z = \frac{0.2546 - 0.2526}{0.001/\sqrt{10}}$$
$$= 6.325$$

(4) *Decisión sobre la hipótesis nula*

Dado que se observa $z = 6.325 > Z_C = 1.645$, entonces se concluye que la hipótesis nula es rechazada.

(5) *Conclusión*

Se concluye que la hipótesis nula H_0 es rechazada. Por tanto, no hay suficiente evidencia para afirmar que la media poblacional μ es mayor que 0.2546, al nivel de significancia $\alpha = 0.05$.

EJEMPLO 11 BIS (PRUEBA DEHIPÓTESIS PARA μ CON APPS)

Los diámetros de los pernos producidos por "*Ferromex*" tienen una desviación estándar real de 0.001 centímetros. Una muestra aleatoria de 10 pernos dio un diámetro medio de 0.2546 centímetros. Para contrastar la hipótesis "el diámetro medio verdadero es menor a 0.2526centímetros" utilizando el nivel $\alpha = 0.05$:

DATOS:

Parámetro objetivo μ.

Tipo de prueba, H_0: $\mu = 0.2526$ vs H_a: $\mu > 0.2526$.

Tamaño de muestra $n = 10$.

Media aritmética $\bar{x} = 0.2546$.

Desviación estándar $s = 0.001$.

Nivel de significación $\alpha = 0.05$.

Con la aplicación **"MATHCRACKER"** on-line con liga

https://mathcracker.com/es/prueba-z-para-una-media

Una vez que ingresaste al sitio, solo debes completar los campos solicitados y dar click Izquierdo en la pestaña "calcular". Obtienes,

Solution:

Se ha proporcionado la siguiente información:

Media de la población hipotética (μ)=	0.2546
Desviación estándar de la población (σ)=	0.001
Tamaño de muestra (n)=	10
Media muestral ($\overline{X}$) =	0.2546
Nivel de significación (α)	0.05

(1) *Hipótesis nula y alternativas*:

$H_0 : \mu \;=\; 0.2526$

$H_a : \mu \;>\; 0.2526$

Esto corresponde a una prueba de hipótesis de cola derecha, para la cual se utilizará una prueba Z, para la media con una desviación estándar de población conocida.

<u>(2) *Región de rechazo*</u>

Según la información proporcionada, el nivel de significación es $\alpha = 0.05$, y el valor crítico para una prueba de hipótesis de cola derecha es $z_C = 1.64$.

La región de rechazo para esta prueba de hipótesis de prueba derecha es $R = \{ z : z > 1.645 \}$.

<u>(3) *Estadística de prueba*</u>

La estadística z se calcula de la siguiente manera:

$$z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}}$$

$$z = \frac{0.2546 - 0.2526}{0.001 / \sqrt{10}}$$

$$= 6.325$$

<u>(4) *Decisión sobre la hipótesis nula*</u>

Dado que se observa $z = 6.325 > Z_C = 1.645$, entonces se concluye que la hipótesis nula es rechazada.

<u>(5) *Conclusión*</u>

Se concluye que la hipótesis nula H_0 es rechazada. Por tanto, no hay suficiente evidencia para afirmar que la media poblacional μ es mayor que 0.2546, al nivel de significancia $\alpha = 0.05$.

EJEMPLO 12 (BIS) (PRUEBA DE HIPÓTESIS PARA p, CON APPS)

El 60% de los jóvenes prefiere la coca cola sobre cualquier otra bebida. En una encuesta efectuada a 100 jóvenes se encontró que 70 prefirieron coca cola.

Para verificar si la información obtenida es evidencia suficiente para concluir que la proporción de jóvenes que prefiere coca cola es menor al indicado por el estudio, utilizando $\alpha = 0.05$.

3. Estadístico de prueba $z = \dfrac{x - np_0}{\sqrt{n\, p_0\, q_0}} = \dfrac{70 - 60}{\sqrt{100(0.6)(0.4)}} = 2.04$.

4. Región de rechazo.

Si $\alpha = 0.05$, de las tablas de la distribución normal obtenemos $z_\alpha = z_{0.05} = 1.645$, por tanto, se rechaza $H_0 : p = 0.6$ si $Z > 1.645$.

c

DATOS:

Parámetro objetivo p.

Tipo de prueba, $H_0 :\ p = 0.6$ vs $H_a :\ p > 0.6$.

Tamaño de muestra $n = 100$.

Casos favorables 70.

Nivel de significación $\alpha = 0.05$.

Con la aplicación **“MATHCRACKER”** on-line con liga

https://mathcracker.com/es/prueba-z-para-una-media

Una vez que ingresaste al sitio, solo debes completar los campos solicitados y dar click Izquierdo en la pestaña “calcular”. Obtienes,

Solution:

<u>(1) *Hipótesis nulas y alternativas*</u>

Deben probarse las siguientes hipótesis nulas y alternativas para la proporción de población:

$$H_0: \ p = 0.6$$

$$H_a: \ p > 0.6$$

Esto corresponde a una prueba de hipótesis de cola derecha, para la cual se utilizará una prueba z para una proporción de población.

<u>(2) *Región de rechazo*</u>

Según la información proporcionada, el nivel de significancia es $\alpha = 0.05$, y el valor crítico para una prueba de hipótesis de cola derecha es $z_C = 1.64$.

La región de rechazo para esta prueba de hipótesis de cola derecha es $R = \{z : z > 1.64\}$.

<u>(3) *Estadísticas de prueba*</u>

La estadística z se calcula de la siguiente manera:

$$z = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}}$$

$$= \frac{0.70 - 0.60}{\sqrt{\frac{0.6(1.0.6)}{100}}} \hat{p}$$

$$= 0.2041$$

<u>(4) *Decisión sobre la hipótesis nula*</u>

Dado que se observa que $z = 2.041 > z_C = 1.645$, entonces se concluye que *la hipótesis nula es rechazada.*

<u>(5) *Conclusión*</u>

Se concluye que la hipótesis nula H_0 *es rechazada.* Por lo tanto, no hay suficiente evidencia para afirmar que la proporción de población p es mayor que 0.6, al nivel de significancia $\alpha = 0.05$.

AUTOEVALUACIÓN

COMPLETA LOS ESPACIOS

SELECCIONA LAS PALABRAS FALTANTES DEL BLOQUE INFERIOR

1. La ________________________________se basa en el análisis de las realizaciones de una muestra aleatoria simple.

2. El término _______________________ se refiere a la determinación de un parámetro de una población estadística en términos de la probabilidad.

3. Un ________________ es una regla que depende de las realizaciones de una muestra aleatoria simple que establece la forma en que se calculan los dos números que forman los extremos de un intervalo.

4. Algunas de las características óptimas de una estimación por intervalo es la de contener al ________________ y ser lo menos amplio posible.

5. Mientras mayor sea la longitud del intervalo de confianza $p\left(\hat{\theta}_I \leq \theta \leq \hat{\theta}_S\right) = 1-\alpha$, se tendrá una mayor certeza de __________________________ al objetivo θ.

6. Si se ________________________________ el tamaño de las muestras la longitud del intervalo disminuye.

7. Si se incrementa el ___________________________ en un estimador por intervalo, entonces su amplitud aumenta.

8. El ________________________________ cometido al estimar puntualmente μ utilizando la media aritmética es $E_{Máx} = z_{\alpha/2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

9. Si la _____________________________ es conocida, entonces un estimador por intervalo para μ es $\bar{x} - z_{\alpha/2}\dfrac{s}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x} + z_{\alpha/2}\dfrac{s}{\sqrt{n}}$.

10. En los intervalos de confianza para la ________________________________ el número $z_{\alpha/2}$ se refiere al área o probabilidad que se encuentra a su derecha.

11. Los métodos y técnicas relacionados con la problemática de determinar cuál de dos _____________________________, acerca de un parámetro, es la correcta es el proceso conocido como prueba de hipótesis.

12. Las ________________________________constituyen uno de los métodos para inferir acerca del posible valor de un parámetro.

13. Una prueba de hipótesis es un proceso que se utiliza utilizan para analizar si una afirmación tentativa sobre el valor de un parámetro se ve apoyada o rechazada por las evidencias encontradas en realizaciones de ________________________________.

14. La "aceptación" de una hipótesis estadística sólo significa que la información contenida en la realización de una muestra aleatoria simple no proporciona la suficiente evidencia como para ________________________________.

15. La ________________________________se plantea en términos de alguna de las frases "es igual", "no mejora", "no cambia", etc.

16. La hipótesis alternativa es la ________________________________ de la hipótesis nula.

17. La ______________________________ determina el criterio para aceptar o rechazar H_0.

18. La región crítica está compuesta por el conjunto de todos los valores ___________________________ para los cuales se no se acepta la hipótesis nula H_0.

19. El ________________________________, también denotado por la letra griega alfa, es la probabilidad de rechazar la hipótesis nula cuando es verdadera.

20. Se comete ________________________________cuando se acepta una hipótesis estadística siendo falsa.

21. Si en una muestra específica el valor calculado del estadístico de prueba se encuentra en la región crítica, entonces se rechaza la hipótesis nula y se concluye que la ________________________________ debe aceptarse.

22. Si se plantea una hipótesis nula en términos de una ____________________, entonces el proceso de prueba se conoce como unilateral o de una cola.

muestras aleatorias simples. ***Inferencia***. $\hat{\Theta}$. ***incrementa***. **negación** ***error máximo***. ***hipótesis alternativa***. ***varianza poblacional*** . ***del estadístico de prueba***. ***media y para la proporción***. **suposiciones. Las pruebas de hipótesis. hipótesis nula. contener. estimador. nivel de significancia. parámetro objetivo y ser lo menos. rechazarla. inferencia estadística. error tipo dos. desigualdad. nivel de confianza. región de rechazo o región crítica.**

CIERTO O FALSO

(Selecciona la opción correcta)

C **F** **1.** Un estimador puntual es una estimación respecto al valor de un estadístico.

C **F** **2.** Un estimador puntual es una fórmula de una MAS que se utiliza para estimar un parámetro.

C **F** **3.** Un estimador por intervalos es un par de números llamados límites entre los que se encuentra el valor del parámetro objetivo.

C **F** **4.** Los extremos de un intervalo de confianza son estimadores puntuales.

C **F** **5.** Los términos "estimación por intervalo" e "intervalo de confianza" son equivalentes".

C **F** **6.** Los extremos de un estimador por intervalo son variables aleatorias.

C **F** **7.** En un intervalo de confianza, el nivel de confianza puede ser superior al 100%.

C **F** **8.** En un intervalo de confianza, la confianza depende del tamaño de la muestra.

C F **9.** En un intervalo de confianza el error máximo cometido en la estimación depende del tamaño de muestra.

C F **10.** Los intervalos aleatorios de confianza para la media siempre se distribuyen normalmente.

C F **11.** Los intervalos aleatorios de confianza para la proporción siempre se distribuyen normalmente.

C F **12.** Con un intervalo de confianza para la media real se pretende estimar la media aritmética.

C F **13.** Si el tamaño de una muestra es inferior a 30, podemos concluir que nunca es útil el estimador por intervalo $\bar{x} - z_{\alpha/2} \frac{s}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x} + z_{\alpha/2} \frac{s}{\sqrt{n}}$.

C F **14.** La hipótesis nula se plantea con el objeto de rechazarse.

C F **15.** El proceso de prueba de hipótesis se utiliza para estimaciones puntuales.

C F **16.** La probabilidad de rechazar una hipótesis siendo falsa es una decisión correcta.

C F **17.** Una hipótesis nula se plantea con la finalidad de no rechazarse.

C F **18.** La hipótesis alternativa se plantea con la intención de aceptarse.

C F **19.** Si se rechaza la hipótesis nula, la hipótesis alterna se acepta.

C F **20.** El nivel de significación y el $error\ \ tipo\ \ II$ son conceptos equivalentes.

C F **21.** El nivel de significación es una probabilidad.

C F **22.** En el proceso de prueba de hipótesis sobre una proporción siempre debe utilizarse una distribución de probabilidades normal.

C F **23. L**a estadística de prueba para la proporción siempre es positiva.

PROBLEMAS PROPUESTOS

1. A partir de $p(1.7 \le \mu \le 4.2) = 0.98$ determina:
a. Las estimaciones de los límites de confianza.
b. La confianza.
c. La longitud del intervalo.

2. Sea $n = 121$, $\bar{x} = 23.8$ y $s = 1.24$. Determina los límites de confianza de 95% para μ.

3. Si $1.8 \le \mu \le 4.2$, $\bar{x} = 3$, $n = 36$ y $\sigma = 2$ determina:
a. El error máximo cometido si se utiliza $\bar{x}$ como estimador de μ.
b. El nivel de confianza.

4. Sea $n = 144$ y $\hat{p} = 0.6$. Determine los límites de confianza del 98% para p.

5. Si $0.40 \le p \le 0.70$, $\hat{p} = 0.55$ y $n = 30$ determina:
a. El error máximo cometido si se utiliza $\hat{p}$ como estimador de p.
b. El nivel de confianza.

6. Si $0.32 \le p \le 0.64$ y $\hat{p} = 0.48$ determine:
a. El error máximo cometido, si se utiliza $\hat{p}$ como estimador de p.
b. El tamaño de muestra utilizado si la confianza es de 98%.

7. Sean $H_0 : \mu = 12$, $H_a : \mu \ne 12$, $n = 100$ con $\sigma = 10$, se define la región crítica $\bar{X} < 9$ o $\bar{X} > 15$.
a. Determina el nivel de significación α cuando $\mu = 12$ es verdadera.
b. Evalúa β para la alternativa $\mu = 11.8$.

8. Sean $H_0 : \mu = 12$, $H_a : \mu < 12$, $\sigma = 7$ y $n = 50$, se define la región crítica $0 < \bar{X} < 11.5$.
a. Determina el nivel de significación α cuando $\mu = 12$ es verdadera.
b. Evalúa β para la alternativa $\mu = 11.8$.

9. Sean $H_0 : p = 0.30$ y $n = 22$.
a. Determina el nivel de significación α si se rechaza H_0 cuando $10 \le X \le 15$.
b. Determina β para sí $H_a : p = 0.25$.

10. Prueba H_0: $\mu = 125$ contra H_a: $\mu \ne 125$ para una muestra de tamaño $n = 81$ suponiendo que $\bar{x} = 120$ y $s = 3.8$ unidades, utilice un nivel de significación del 2%.

11. Determina el nivel de significación mínimo para el cual se rechaza:
H_0: $\mu = 12.8$ contra H_a: $\mu > 12.8$ sí $\bar{x} = 14$, $\sigma = 4$ y $n = 25$.

12. Determina el nivel de significación máximo para el cual se rechaza:
H_0: $\mu = 6.13$ contra H_a: $\mu < 6.13$ sí $\bar{x} = 5.8$, $\sigma = 2$ y $n = 100$.

13. Prueba H_0: $p = 0.74$ a favor de H_a: $p < 0.74$ para una muestra de tamaño $n = 36$ suponiendo que $X = 24$, utilice un nivel de significación de 1%.

14. Prueba H_0: $p = 0.38$ a favor de H_a: $p > 0.38$ para una muestra de tamaño $n = 144$ suponiendo que $X = 56$, utilice un nivel de significación del 4%.

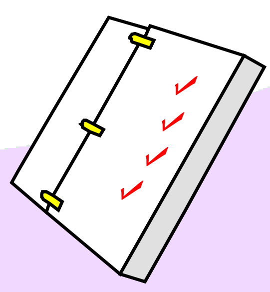
15. Determina el nivel de significación para el cual se rechaza: H_0: $p = 0.6$ contra H_a: $p \ne 0.6$ sí $X = 70$, y $n = 100$.

APÉNDICE A. TABLAS

A.1 Probabilidades binomiales acumuladas

A.2 Probabilidades y percentiles normales

A.3 Números aleatorios



A.3 Probabilidades binomiales acumuladas

$$B(x,n,p)=\sum_{k=0}^{x} C_0^k\, p^k (1-p)^{n-k}$$ ***de n = 1 a n = 9***

n	x	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40	0.45	0.50	0.55	0.60	0.65	0.70	0.75	0.80	0.85	0.90	0.95
1	0	0.9500	0.9000	0.8500	0.8000	0.7500	0.7000	0.6500	0.6000	0.5500	0.5000	0.4500	0.4000	0.3500	0.3000	0.2500	0.2000	0.1500	0.1000	0.0500
	1	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
2	0	0.9025	0.8100	0.7225	0.6400	0.5625	0.4900	0.4225	0.3600	0.3025	0.2500	0.2025	0.1600	0.1225	0.0900	0.0625	0.0400	0.0225	0.0100	0.0025
	1	0.9975	0.9900	0.9775	0.9600	0.9375	0.9100	0.8775	0.8400	0.7975	0.7500	0.6975	0.6400	0.5775	0.5100	0.4375	0.3600	0.2775	0.1900	0.0975
	2	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
3	0	0.8574	0.7290	0.6141	0.5120	0.4219	0.3430	0.2746	0.2160	0.1664	0.1250	0.0911	0.0640	0.0429	0.0270	0.0156	0.0080	0.0034	0.0010	0.0001
	1	0.9928	0.9720	0.9393	0.8960	0.8438	0.7840	0.7183	0.6480	0.5748	0.5000	0.4253	0.3520	0.2818	0.2160	0.1563	0.1040	0.0607	0.0280	0.0072
	2	0.9999	0.9990	0.9966	0.9920	0.9844	0.9730	0.9571	0.9360	0.9089	0.8750	0.8336	0.7840	0.7254	0.6570	0.5781	0.4880	0.3859	0.2710	0.1426
	3	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4	0	0.8145	0.6561	0.5220	0.4096	0.3164	0.2401	0.1785	0.1296	0.0915	0.0625	0.0410	0.0256	0.0150	0.0081	0.0039	0.0016	0.0005	0.0001	0.0000
	1	0.9860	0.9477	0.8905	0.8192	0.7383	0.6517	0.5630	0.4752	0.3910	0.3125	0.2415	0.1792	0.1265	0.0837	0.0508	0.0272	0.0120	0.0037	0.0005
	2	0.9995	0.9963	0.9880	0.9728	0.9492	0.9163	0.8735	0.8208	0.7585	0.6875	0.6090	0.5248	0.4370	0.3483	0.2617	0.1808	0.1095	0.0523	0.0140
	3	1.0000	0.9999	0.9995	0.9984	0.9961	0.9919	0.9850	0.9744	0.9590	0.9375	0.9085	0.8704	0.8215	0.7599	0.6836	0.5904	0.4780	0.3439	0.1855
	4	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
5	0	0.7738	0.5905	0.4437	0.3277	0.2373	0.1681	0.1160	0.0778	0.0503	0.0313	0.0185	0.0102	0.0053	0.0024	0.0010	0.0003	0.0001	0.0000	0.0000
	1	0.9774	0.9185	0.8352	0.7373	0.6328	0.5282	0.4284	0.3370	0.2562	0.1875	0.1312	0.0870	0.0540	0.0308	0.0156	0.0067	0.0022	0.0005	0.0000
	2	0.9988	0.9914	0.9734	0.9421	0.8965	0.8369	0.7648	0.6826	0.5931	0.5000	0.4069	0.3174	0.2352	0.1631	0.1035	0.0579	0.0266	0.0086	0.0012
	3	1.0000	0.9995	0.9978	0.9933	0.9844	0.9692	0.9460	0.9130	0.8688	0.8125	0.7438	0.6630	0.5716	0.4718	0.3672	0.2627	0.1648	0.0815	0.0226
	4	1.0000	1.0000	0.9999	0.9997	0.9990	0.9976	0.9947	0.9898	0.9815	0.9688	0.9497	0.9222	0.8840	0.8319	0.7627	0.6723	0.5563	0.4095	0.2262
	5	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
6	0	0.7351	0.5314	0.3771	0.2621	0.1780	0.1176	0.0754	0.0467	0.0277	0.0156	0.0083	0.0041	0.0018	0.0007	0.0002	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000
	1	0.9672	0.8857	0.7765	0.6554	0.5339	0.4202	0.3191	0.2333	0.1636	0.1094	0.0692	0.0410	0.0223	0.0109	0.0046	0.0016	0.0004	0.0001	0.0000
	2	0.9978	0.9842	0.9527	0.9011	0.8306	0.7443	0.6471	0.5443	0.4415	0.3438	0.2553	0.1792	0.1174	0.0705	0.0376	0.0170	0.0059	0.0013	0.0001
	3	0.9999	0.9987	0.9941	0.9830	0.9624	0.9295	0.8826	0.8208	0.7447	0.6563	0.5585	0.4557	0.3529	0.2557	0.1694	0.0989	0.0473	0.0158	0.0022
	4	1.0000	0.9999	0.9996	0.9984	0.9954	0.9891	0.9777	0.9590	0.9308	0.8906	0.8364	0.7667	0.6809	0.5798	0.4661	0.3446	0.2235	0.1143	0.0328
	5	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998	0.9993	0.9982	0.9959	0.9917	0.9844	0.9723	0.9533	0.9246	0.8824	0.8220	0.7379	0.6229	0.4686	0.2649
	6	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
7	0	0.6983	0.4783	0.3206	0.2097	0.1335	0.0824	0.0490	0.0280	0.0152	0.0078	0.0037	0.0016	0.0006	0.0002	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	1	0.9556	0.8503	0.7166	0.5767	0.4449	0.3294	0.2338	0.1586	0.1024	0.0625	0.0357	0.0188	0.0090	0.0038	0.0013	0.0004	0.0001	0.0000	0.0000
	2	0.9962	0.9743	0.9262	0.8520	0.7564	0.6471	0.5323	0.4199	0.3164	0.2266	0.1529	0.0963	0.0556	0.0288	0.0129	0.0047	0.0012	0.0002	0.0000
	3	0.9998	0.9973	0.9879	0.9667	0.9294	0.8740	0.8002	0.7102	0.6083	0.5000	0.3917	0.2898	0.1998	0.1260	0.0706	0.0333	0.0121	0.0027	0.0002
	4	1.0000	0.9998	0.9988	0.9953	0.9871	0.9712	0.9444	0.9037	0.8471	0.7734	0.6836	0.5801	0.4677	0.3529	0.2436	0.1480	0.0738	0.0257	0.0038
	5	1.0000	1.0000	0.9999	0.9996	0.9987	0.9962	0.9910	0.9812	0.9643	0.9375	0.8976	0.8414	0.7662	0.6706	0.5551	0.4233	0.2834	0.1497	0.0444
	6	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998	0.9994	0.9984	0.9963	0.9922	0.9848	0.9720	0.9510	0.9176	0.8665	0.7903	0.6794	0.5217	0.3017
	7	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
8	0	0.6634	0.4305	0.2725	0.1678	0.1001	0.0576	0.0319	0.0168	0.0084	0.0039	0.0017	0.0007	0.0002	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	1	0.9428	0.8131	0.6572	0.5033	0.3671	0.2553	0.1691	0.1064	0.0632	0.0352	0.0181	0.0085	0.0036	0.0013	0.0004	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000
	2	0.9942	0.9619	0.8948	0.7969	0.6785	0.5518	0.4278	0.3154	0.2201	0.1445	0.0885	0.0498	0.0253	0.0113	0.0042	0.0012	0.0002	0.0000	0.0000
	3	0.9996	0.9950	0.9786	0.9437	0.8862	0.8059	0.7064	0.5941	0.4770	0.3633	0.2604	0.1737	0.1061	0.0580	0.0273	0.0104	0.0029	0.0004	0.0000
	4	1.0000	0.9996	0.9971	0.9896	0.9727	0.9420	0.8939	0.8263	0.7396	0.6367	0.5230	0.4059	0.2936	0.1941	0.1138	0.0563	0.0214	0.0050	0.0004
	5	1.0000	1.0000	0.9998	0.9988	0.9958	0.9887	0.9747	0.9502	0.9115	0.8555	0.7799	0.6846	0.5722	0.4482	0.3215	0.2031	0.1052	0.0381	0.0058
	6	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9996	0.9987	0.9964	0.9915	0.9819	0.9648	0.9368	0.8936	0.8309	0.7447	0.6329	0.4967	0.3428	0.1869	0.0572
	7	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998	0.9993	0.9983	0.9961	0.9916	0.9832	0.9681	0.9424	0.8999	0.8322	0.7275	0.5695	0.3366
	8	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
9	0	0.6302	0.3874	0.2316	0.1342	0.0751	0.0404	0.0207	0.0101	0.0046	0.0020	0.0008	0.0003	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	1	0.9288	0.7748	0.5995	0.4362	0.3003	0.1960	0.1211	0.0705	0.0385	0.0195	0.0091	0.0038	0.0014	0.0004	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	2	0.9916	0.9470	0.8591	0.7382	0.6007	0.4628	0.3373	0.2318	0.1495	0.0898	0.0498	0.0250	0.0112	0.0043	0.0013	0.0003	0.0000	0.0000	0.0000
	3	0.9994	0.9917	0.9661	0.9144	0.8343	0.7297	0.6089	0.4826	0.3614	0.2539	0.1658	0.0994	0.0536	0.0253	0.0100	0.0031	0.0006	0.0001	0.0000
	4	1.0000	0.9991	0.9944	0.9804	0.9511	0.9012	0.8283	0.7334	0.6214	0.5000	0.3786	0.2666	0.1717	0.0988	0.0489	0.0196	0.0056	0.0009	0.0000
	5	1.0000	0.9999	0.9994	0.9969	0.9900	0.9747	0.9464	0.9006	0.8342	0.7461	0.6386	0.5174	0.3911	0.2703	0.1657	0.0856	0.0339	0.0083	0.0006

$$B(x,n,p)=\sum_{k=0}^{x} C_0^k p^k (1-p)^{n-k}$$ **de n = 9 a n = 13**

n	x	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40	0.45	0.50	0.55	0.60	0.65	0.70	0.75	0.80	0.85	0.90	0.95
9	6	1.0000	1.0000	1.0000	0.9997	0.9987	0.9957	0.9888	0.9750	0.9502	0.9102	0.8505	0.7682	0.6627	0.5372	0.3993	0.2618	0.1409	0.0530	0.0084
	7	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9996	0.9986	0.9962	0.9909	0.9805	0.9615	0.9295	0.8789	0.8040	0.6997	0.5638	0.4005	0.2252	0.0712
	8	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9997	0.9992	0.9980	0.9954	0.9899	0.9793	0.9596	0.9249	0.8658	0.7684	0.6126	0.3698
	9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
10	0	0.5987	0.3487	0.1969	0.1074	0.0563	0.0282	0.0135	0.0060	0.0025	0.0010	0.0003	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	1	0.9139	0.7361	0.5443	0.3758	0.2440	0.1493	0.0860	0.0464	0.0233	0.0107	0.0045	0.0017	0.0005	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	2	0.9885	0.9298	0.8202	0.6778	0.5256	0.3828	0.2616	0.1673	0.0996	0.0547	0.0274	0.0123	0.0048	0.0016	0.0004	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000
	3	0.9990	0.9872	0.9500	0.8791	0.7759	0.6496	0.5138	0.3823	0.2660	0.1719	0.1020	0.0548	0.0260	0.0106	0.0035	0.0009	0.0001	0.0000	0.0000
	4	0.9999	0.9984	0.9901	0.9672	0.9219	0.8497	0.7515	0.6331	0.5044	0.3770	0.2616	0.1662	0.0949	0.0473	0.0197	0.0064	0.0014	0.0001	0.0000
	5	1.0000	0.9999	0.9986	0.9936	0.9803	0.9527	0.9051	0.8338	0.7384	0.6230	0.4956	0.3669	0.2485	0.1503	0.0781	0.0328	0.0099	0.0016	0.0001
	6	1.0000	1.0000	0.9999	0.9991	0.9965	0.9894	0.9740	0.9452	0.8980	0.8281	0.7340	0.6177	0.4862	0.3504	0.2241	0.1209	0.0500	0.0128	0.0010
	7	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9996	0.9984	0.9952	0.9877	0.9726	0.9453	0.9004	0.8327	0.7384	0.6172	0.4744	0.3222	0.1798	0.0702	0.0115
	8	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9995	0.9983	0.9955	0.9893	0.9767	0.9536	0.9140	0.8507	0.7560	0.6242	0.4557	0.2639	0.0861
	9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9997	0.9990	0.9975	0.9940	0.9865	0.9718	0.9437	0.8926	0.8031	0.6513	0.4013
	10	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
11	0	0.5688	0.3138	0.1673	0.0859	0.0422	0.0198	0.0088	0.0036	0.0014	0.0005	0.0002	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	1	0.8981	0.6974	0.4922	0.3221	0.1971	0.1130	0.0606	0.0302	0.0139	0.0059	0.0022	0.0007	0.0002	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	2	0.9848	0.9104	0.7788	0.6174	0.4552	0.3127	0.2001	0.1189	0.0652	0.0327	0.0148	0.0059	0.0020	0.0006	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	3	0.9984	0.9815	0.9306	0.8389	0.7133	0.5696	0.4256	0.2963	0.1911	0.1133	0.0610	0.0293	0.0122	0.0043	0.0012	0.0002	0.0000	0.0000	0.0000
	4	0.9999	0.9972	0.9841	0.9496	0.8854	0.7897	0.6683	0.5328	0.3971	0.2744	0.1738	0.0994	0.0501	0.0216	0.0076	0.0020	0.0003	0.0000	0.0000
	5	1.0000	0.9997	0.9973	0.9883	0.9657	0.9218	0.8513	0.7535	0.6331	0.5000	0.3669	0.2465	0.1487	0.0782	0.0343	0.0117	0.0027	0.0003	0.0000
	6	1.0000	1.0000	0.9997	0.9980	0.9924	0.9784	0.9499	0.9006	0.8262	0.7256	0.6029	0.4672	0.3317	0.2103	0.1146	0.0504	0.0159	0.0028	0.0001
	7	1.0000	1.0000	1.0000	0.9998	0.9988	0.9957	0.9878	0.9707	0.9390	0.8867	0.8089	0.7037	0.5744	0.4304	0.2867	0.1611	0.0694	0.0185	0.0016
	8	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9994	0.9980	0.9941	0.9852	0.9673	0.9348	0.8811	0.7999	0.6873	0.5448	0.3826	0.2212	0.0896	0.0152
	9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9998	0.9993	0.9978	0.9941	0.9861	0.9698	0.9394	0.8870	0.8029	0.6779	0.5078	0.3026	0.1019
	10	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9998	0.9995	0.9986	0.9964	0.9912	0.9802	0.9578	0.9141	0.8327	0.6862	0.4312
	11	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
12	0	0.5404	0.2824	0.1422	0.0687	0.0317	0.0138	0.0057	0.0022	0.0008	0.0002	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	1	0.8816	0.6590	0.4435	0.2749	0.1584	0.0850	0.0424	0.0196	0.0083	0.0032	0.0011	0.0003	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	2	0.9804	0.8891	0.7358	0.5583	0.3907	0.2528	0.1513	0.0834	0.0421	0.0193	0.0079	0.0028	0.0008	0.0002	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	3	0.9978	0.9744	0.9078	0.7946	0.6488	0.4925	0.3467	0.2253	0.1345	0.0730	0.0356	0.0153	0.0056	0.0017	0.0004	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000
	4	0.9998	0.9957	0.9761	0.9274	0.8424	0.7237	0.5833	0.4382	0.3044	0.1938	0.1117	0.0573	0.0255	0.0095	0.0028	0.0006	0.0001	0.0000	0.0000
	5	1.0000	0.9995	0.9954	0.9806	0.9456	0.8822	0.7873	0.6652	0.5269	0.3872	0.2607	0.1582	0.0846	0.0386	0.0143	0.0039	0.0007	0.0001	0.0000
	6	1.0000	0.9999	0.9993	0.9961	0.9857	0.9614	0.9154	0.8418	0.7393	0.6128	0.4731	0.3348	0.2127	0.1178	0.0544	0.0194	0.0046	0.0005	0.0000
	7	1.0000	1.0000	0.9999	0.9994	0.9972	0.9905	0.9745	0.9427	0.8883	0.8062	0.6956	0.5618	0.4167	0.2763	0.1576	0.0726	0.0239	0.0043	0.0002
	8	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9996	0.9983	0.9944	0.9847	0.9644	0.9270	0.8655	0.7747	0.6533	0.5075	0.3512	0.2054	0.0922	0.0256	0.0022
	9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9998	0.9992	0.9972	0.9921	0.9807	0.9579	0.9166	0.8487	0.7472	0.6093	0.4417	0.2642	0.1109	0.0196
	10	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9997	0.9989	0.9968	0.9917	0.9804	0.9576	0.9150	0.8416	0.7251	0.5565	0.3410	0.1184
	11	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998	0.9992	0.9978	0.9943	0.9862	0.9683	0.9313	0.8578	0.7176	0.4596
	12	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
13	0	0.5133	0.2542	0.1209	0.0550	0.0238	0.0097	0.0037	0.0013	0.0004	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	1	0.8646	0.6213	0.3983	0.2336	0.1267	0.0637	0.0296	0.0126	0.0049	0.0017	0.0005	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	2	0.9755	0.8661	0.6920	0.5017	0.3326	0.2025	0.1132	0.0579	0.0269	0.0112	0.0041	0.0013	0.0003	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	3	0.9969	0.9658	0.8820	0.7473	0.5843	0.4206	0.2783	0.1686	0.0929	0.0461	0.0203	0.0078	0.0025	0.0007	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	4	0.9997	0.9935	0.9658	0.9009	0.7940	0.6543	0.5005	0.3530	0.2279	0.1334	0.0698	0.0321	0.0126	0.0040	0.0010	0.0002	0.0000	0.0000	0.0000
	5	1.0000	0.9991	0.9925	0.9700	0.9198	0.8346	0.7159	0.5744	0.4268	0.2905	0.1788	0.0977	0.0462	0.0182	0.0056	0.0012	0.0002	0.0000	0.0000
	6	1.0000	0.9999	0.9987	0.9930	0.9757	0.9376	0.8705	0.7712	0.6437	0.5000	0.3563	0.2288	0.1295	0.0624	0.0243	0.0070	0.0013	0.0001	0.0000
	7	1.0000	1.0000	0.9998	0.9988	0.9944	0.9818	0.9538	0.9023	0.8212	0.7095	0.5732	0.4256	0.2841	0.1654	0.0802	0.0300	0.0075	0.0009	0.0000
	8	1.0000	1.0000	1.0000	0.9998	0.9990	0.9960	0.9874	0.9679	0.9302	0.8666	0.7721	0.6470	0.4995	0.3457	0.2060	0.0991	0.0342	0.0065	0.0003
	9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9993	0.9975	0.9922	0.9797	0.9539	0.9071	0.8314	0.7217	0.5794	0.4157	0.2527	0.1180	0.0342	0.0031
	10	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9997	0.9987	0.9959	0.9888	0.9731	0.9421	0.8868	0.7975	0.6674	0.4983	0.3080	0.1339	0.0245
	11	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9995	0.9983	0.9951	0.9874	0.9704	0.9363	0.8733	0.7664	0.6017	0.3787	0.1354
	12	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9996	0.9987	0.9963	0.9903	0.9762	0.9450	0.8791	0.7458	0.4867

$$B(x,n,p)=\sum_{k=0}^{x} C_0^k\, p^k (1-p)^{n-k}$$ **de $n = 14$ a $n = 17$**

n	x	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40	0.45	0.50	0.55	0.60	0.65	0.70	0.75	0.80	0.85	0.90	0.95
14	0	0.4877	0.2288	0.1028	0.0440	0.0178	0.0068	0.0024	0.0008	0.0002	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	1	0.8470	0.5846	0.3567	0.1979	0.1010	0.0475	0.0205	0.0081	0.0029	0.0009	0.0003	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	2	0.9699	0.8416	0.6479	0.4481	0.2811	0.1608	0.0839	0.0398	0.0170	0.0065	0.0022	0.0006	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	3	0.9958	0.9559	0.8535	0.6982	0.5213	0.3552	0.2205	0.1243	0.0632	0.0287	0.0114	0.0039	0.0011	0.0002	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	4	0.9996	0.9908	0.9533	0.8702	0.7415	0.5842	0.4227	0.2793	0.1672	0.0898	0.0426	0.0175	0.0060	0.0017	0.0003	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	5	1.0000	0.9985	0.9885	0.9561	0.8883	0.7805	0.6405	0.4859	0.3373	0.2120	0.1189	0.0583	0.0243	0.0083	0.0022	0.0004	0.0000	0.0000	0.0000
	6	1.0000	0.9998	0.9978	0.9884	0.9617	0.9067	0.8164	0.6925	0.5461	0.3953	0.2586	0.1501	0.0753	0.0315	0.0103	0.0024	0.0003	0.0000	0.0000
	7	1.0000	1.0000	0.9997	0.9976	0.9897	0.9685	0.9247	0.8499	0.7414	0.6047	0.4539	0.3075	0.1836	0.0933	0.0383	0.0116	0.0022	0.0002	0.0000
	8	1.0000	1.0000	1.0000	0.9996	0.9978	0.9917	0.9757	0.9417	0.8811	0.7880	0.6627	0.5141	0.3595	0.2195	0.1117	0.0439	0.0115	0.0015	0.0000
	9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9997	0.9983	0.9940	0.9825	0.9574	0.9102	0.8328	0.7207	0.5773	0.4158	0.2585	0.1298	0.0467	0.0092	0.0004
	10	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9998	0.9989	0.9961	0.9886	0.9713	0.9368	0.8757	0.7795	0.6448	0.4787	0.3018	0.1465	0.0441	0.0042
	11	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9994	0.9978	0.9935	0.9830	0.9602	0.9161	0.8392	0.7189	0.5519	0.3521	0.1584	0.0301
	12	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9997	0.9991	0.9971	0.9919	0.9795	0.9525	0.8990	0.8021	0.6433	0.4154	0.1530
	13	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998	0.9992	0.9976	0.9932	0.9822	0.9560	0.8972	0.7712	0.5123
	14	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
15	0	0.4633	0.2059	0.0874	0.0352	0.0134	0.0047	0.0016	0.0005	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	1	0.8290	0.5490	0.3186	0.1671	0.0802	0.0353	0.0142	0.0052	0.0017	0.0005	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	2	0.9638	0.8159	0.6042	0.3980	0.2361	0.1268	0.0617	0.0271	0.0107	0.0037	0.0011	0.0003	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	3	0.9945	0.9444	0.8227	0.6482	0.4613	0.2969	0.1727	0.0905	0.0424	0.0176	0.0063	0.0019	0.0005	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	4	0.9994	0.9873	0.9383	0.8358	0.6865	0.5155	0.3519	0.2173	0.1204	0.0592	0.0255	0.0093	0.0028	0.0007	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	5	0.9999	0.9978	0.9832	0.9389	0.8516	0.7216	0.5643	0.4032	0.2608	0.1509	0.0769	0.0338	0.0124	0.0037	0.0008	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000
	6	1.0000	0.9997	0.9964	0.9819	0.9434	0.8689	0.7548	0.6098	0.4522	0.3036	0.1818	0.0950	0.0422	0.0152	0.0042	0.0008	0.0001	0.0000	0.0000
	7	1.0000	1.0000	0.9994	0.9958	0.9827	0.9500	0.8868	0.7869	0.6535	0.5000	0.3465	0.2131	0.1132	0.0500	0.0173	0.0042	0.0006	0.0000	0.0000
	8	1.0000	1.0000	0.9999	0.9992	0.9958	0.9848	0.9578	0.9050	0.8182	0.6964	0.5478	0.3902	0.2452	0.1311	0.0566	0.0181	0.0036	0.0003	0.0000
	9	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9992	0.9963	0.9876	0.9662	0.9231	0.8491	0.7392	0.5968	0.4357	0.2784	0.1484	0.0611	0.0168	0.0022	0.0001
	10	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9993	0.9972	0.9907	0.9745	0.9408	0.8796	0.7827	0.6481	0.4845	0.3135	0.1642	0.0617	0.0127	0.0006
	11	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9995	0.9981	0.9937	0.9824	0.9576	0.9095	0.8273	0.7031	0.5387	0.3518	0.1773	0.0556	0.0055
	12	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9997	0.9989	0.9963	0.9893	0.9729	0.9383	0.8732	0.7639	0.6020	0.3958	0.1841	0.0362
	13	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9995	0.9983	0.9948	0.9858	0.9647	0.9198	0.8329	0.6814	0.4510	0.1710
	14	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9995	0.9984	0.9953	0.9866	0.9648	0.9126	0.7941	0.5367
	15	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
16	0	0.4401	0.1853	0.0743	0.0281	0.0100	0.0033	0.0010	0.0003	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	1	0.8108	0.5147	0.2839	0.1407	0.0635	0.0261	0.0098	0.0033	0.0010	0.0003	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	2	0.9571	0.7892	0.5614	0.3518	0.1971	0.0994	0.0451	0.0183	0.0066	0.0021	0.0006	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	3	0.9930	0.9316	0.7899	0.5981	0.4050	0.2459	0.1339	0.0651	0.0281	0.0106	0.0035	0.0009	0.0002	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	4	0.9991	0.9830	0.9209	0.7982	0.6302	0.4499	0.2892	0.1666	0.0853	0.0384	0.0149	0.0049	0.0013	0.0003	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	5	0.9999	0.9967	0.9765	0.9183	0.8103	0.6598	0.4900	0.3288	0.1976	0.1051	0.0486	0.0191	0.0062	0.0016	0.0003	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	6	1.0000	0.9995	0.9944	0.9733	0.9204	0.8247	0.6881	0.5272	0.3660	0.2272	0.1241	0.0583	0.0229	0.0071	0.0016	0.0002	0.0000	0.0000	0.0000
	7	1.0000	0.9999	0.9989	0.9930	0.9729	0.9256	0.8406	0.7161	0.5629	0.4018	0.2559	0.1423	0.0671	0.0257	0.0075	0.0015	0.0002	0.0000	0.0000
	8	1.0000	1.0000	0.9998	0.9985	0.9925	0.9743	0.9329	0.8577	0.7441	0.5982	0.4371	0.2839	0.1594	0.0744	0.0271	0.0070	0.0011	0.0001	0.0000
	9	1.0000	1.0000	1.0000	0.9998	0.9984	0.9929	0.9771	0.9417	0.8759	0.7728	0.6340	0.4728	0.3119	0.1753	0.0796	0.0267	0.0056	0.0005	0.0000
	10	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9997	0.9984	0.9938	0.9809	0.9514	0.8949	0.8024	0.6712	0.5100	0.3402	0.1897	0.0817	0.0235	0.0033	0.0001
	11	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9997	0.9987	0.9951	0.9851	0.9616	0.9147	0.8334	0.7108	0.5501	0.3698	0.2018	0.0791	0.0170	0.0009
	12	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9998	0.9991	0.9965	0.9894	0.9719	0.9349	0.8661	0.7541	0.5950	0.4019	0.2101	0.0684	0.0070
	13	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9994	0.9979	0.9934	0.9817	0.9549	0.9006	0.8029	0.6482	0.4386	0.2108	0.0429
	14	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9997	0.9990	0.9967	0.9902	0.9739	0.9365	0.8593	0.7161	0.4853	0.1892
	15	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9997	0.9990	0.9967	0.9900	0.9719	0.9257	0.8147	0.5599
	16	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
17	0	0.4181	0.1668	0.0631	0.0225	0.0075	0.0023	0.0007	0.0002	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	1	0.7922	0.4818	0.2525	0.1182	0.0501	0.0193	0.0067	0.0021	0.0006	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	2	0.9497	0.7618	0.5198	0.3096	0.1637	0.0774	0.0327	0.0123	0.0041	0.0012	0.0003	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	3	0.9912	0.9174	0.7556	0.5489	0.3530	0.2019	0.1028	0.0464	0.0184	0.0064	0.0019	0.0005	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

$$B(x,n,p)=\sum_{k=0}^{x} C_0^k\, p^k (1-p)^{n-k}$$ ***de n = 17 a n = 19***

n	x	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40	0.45	0.50	0.55	0.60	0.65	0.70	0.75	0.80	0.85	0.90	0.95
17	4	0.9988	0.9779	0.9013	0.7582	0.5739	0.3887	0.2348	0.1260	0.0596	0.0245	0.0086	0.0025	0.0006	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	5	0.9999	0.9953	0.9681	0.8943	0.7653	0.5968	0.4197	0.2639	0.1471	0.0717	0.0301	0.0106	0.0030	0.0007	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	6	1.0000	0.9992	0.9917	0.9623	0.8929	0.7752	0.6188	0.4478	0.2902	0.1662	0.0826	0.0348	0.0120	0.0032	0.0006	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000
	7	1.0000	0.9999	0.9983	0.9891	0.9598	0.8954	0.7872	0.6405	0.4743	0.3145	0.1834	0.0919	0.0383	0.0127	0.0031	0.0005	0.0000	0.0000	0.0000
	8	1.0000	1.0000	0.9997	0.9974	0.9876	0.9597	0.9006	0.8011	0.6626	0.5000	0.3374	0.1989	0.0994	0.0403	0.0124	0.0026	0.0003	0.0000	0.0000
	9	1.0000	1.0000	1.0000	0.9995	0.9969	0.9873	0.9617	0.9081	0.8166	0.6855	0.5257	0.3595	0.2128	0.1046	0.0402	0.0109	0.0017	0.0001	0.0000
	10	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9994	0.9968	0.9880	0.9652	0.9174	0.8338	0.7098	0.5522	0.3812	0.2248	0.1071	0.0377	0.0083	0.0008	0.0000
	11	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9993	0.9970	0.9894	0.9699	0.9283	0.8529	0.7361	0.5803	0.4032	0.2347	0.1057	0.0319	0.0047	0.0001
	12	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9994	0.9975	0.9914	0.9755	0.9404	0.8740	0.7652	0.6113	0.4261	0.2418	0.0987	0.0221	0.0012
	13	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9995	0.9981	0.9936	0.9816	0.9536	0.8972	0.7981	0.6470	0.4511	0.2444	0.0826	0.0088
	14	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9997	0.9988	0.9959	0.9877	0.9673	0.9226	0.8363	0.6904	0.4802	0.2382	0.0503
	15	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9994	0.9979	0.9933	0.9807	0.9499	0.8818	0.7475	0.5182	0.2078
	16	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9998	0.9993	0.9977	0.9925	0.9775	0.9369	0.8332	0.5819
	17	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
18	0	0.3972	0.1501	0.0536	0.0180	0.0056	0.0016	0.0004	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	1	0.7735	0.4503	0.2241	0.0991	0.0395	0.0142	0.0046	0.0013	0.0003	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	2	0.9419	0.7338	0.4797	0.2713	0.1353	0.0600	0.0236	0.0082	0.0025	0.0007	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	3	0.9891	0.9018	0.7202	0.5010	0.3057	0.1646	0.0783	0.0328	0.0120	0.0038	0.0010	0.0002	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	4	0.9985	0.9718	0.8794	0.7164	0.5187	0.3327	0.1886	0.0942	0.0411	0.0154	0.0049	0.0013	0.0003	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	5	0.9998	0.9936	0.9581	0.8671	0.7175	0.5344	0.3550	0.2088	0.1077	0.0481	0.0183	0.0058	0.0014	0.0003	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	6	1.0000	0.9988	0.9882	0.9487	0.8610	0.7217	0.5491	0.3743	0.2258	0.1189	0.0537	0.0203	0.0062	0.0014	0.0002	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	7	1.0000	0.9998	0.9973	0.9837	0.9431	0.8593	0.7283	0.5634	0.3915	0.2403	0.1280	0.0576	0.0212	0.0061	0.0012	0.0002	0.0000	0.0000	0.0000
	8	1.0000	1.0000	0.9995	0.9957	0.9807	0.9404	0.8609	0.7368	0.5778	0.4073	0.2527	0.1347	0.0597	0.0210	0.0054	0.0009	0.0001	0.0000	0.0000
	9	1.0000	1.0000	0.9999	0.9991	0.9946	0.9790	0.9403	0.8653	0.7473	0.5927	0.4222	0.2632	0.1391	0.0596	0.0193	0.0043	0.0005	0.0000	0.0000
	10	1.0000	1.0000	1.0000	0.9998	0.9988	0.9939	0.9788	0.9424	0.8720	0.7597	0.6085	0.4366	0.2717	0.1407	0.0569	0.0163	0.0027	0.0002	0.0000
	11	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9998	0.9986	0.9938	0.9797	0.9463	0.8811	0.7742	0.6257	0.4509	0.2783	0.1390	0.0513	0.0118	0.0012	0.0000
	12	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9997	0.9986	0.9942	0.9817	0.9519	0.8923	0.7912	0.6450	0.4656	0.2825	0.1329	0.0419	0.0064	0.0002
18	13	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9997	0.9987	0.9951	0.9846	0.9589	0.9058	0.8114	0.6673	0.4813	0.2836	0.1206	0.0282	0.0015
	14	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9998	0.9990	0.9962	0.9880	0.9672	0.9217	0.8354	0.6943	0.4990	0.2798	0.0982	0.0109
	15	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9993	0.9975	0.9918	0.9764	0.9400	0.8647	0.7287	0.5203	0.2662	0.0581
	16	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9997	0.9987	0.9954	0.9858	0.9605	0.9009	0.7759	0.5497	0.2265
	17	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9996	0.9984	0.9944	0.9820	0.9464	0.8499	0.6028
	18	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
19	0	0.3774	0.1351	0.0456	0.0144	0.0042	0.0011	0.0003	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	1	0.7547	0.4203	0.1985	0.0829	0.0310	0.0104	0.0031	0.0008	0.0002	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	2	0.9335	0.7054	0.4413	0.2369	0.1113	0.0462	0.0170	0.0055	0.0015	0.0004	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	3	0.9868	0.8850	0.6841	0.4551	0.2631	0.1332	0.0591	0.0230	0.0077	0.0022	0.0005	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	4	0.9980	0.9648	0.8556	0.6733	0.4654	0.2822	0.1500	0.0696	0.0280	0.0096	0.0028	0.0006	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	5	0.9998	0.9914	0.9463	0.8369	0.6678	0.4739	0.2968	0.1629	0.0777	0.0318	0.0109	0.0031	0.0007	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	6	1.0000	0.9983	0.9837	0.9324	0.8251	0.6655	0.4812	0.3081	0.1727	0.0835	0.0342	0.0116	0.0031	0.0006	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	7	1.0000	0.9997	0.9959	0.9767	0.9225	0.8180	0.6656	0.4878	0.3169	0.1796	0.0871	0.0352	0.0114	0.0028	0.0005	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	8	1.0000	1.0000	0.9992	0.9933	0.9713	0.9161	0.8145	0.6675	0.4940	0.3238	0.1841	0.0885	0.0347	0.0105	0.0023	0.0003	0.0000	0.0000	0.0000
	9	1.0000	1.0000	0.9999	0.9984	0.9911	0.9674	0.9125	0.8139	0.6710	0.5000	0.3290	0.1861	0.0875	0.0326	0.0089	0.0016	0.0001	0.0000	0.0000
	10	1.0000	1.0000	1.0000	0.9997	0.9977	0.9895	0.9653	0.9115	0.8159	0.6762	0.5060	0.3325	0.1855	0.0839	0.0287	0.0067	0.0008	0.0000	0.0000
	11	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9995	0.9972	0.9886	0.9648	0.9129	0.8204	0.6831	0.5122	0.3344	0.1820	0.0775	0.0233	0.0041	0.0003	0.0000
	12	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9994	0.9969	0.9884	0.9658	0.9165	0.8273	0.6919	0.5188	0.3345	0.1749	0.0676	0.0163	0.0017	0.0000
	13	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9993	0.9969	0.9891	0.9682	0.9223	0.8371	0.7032	0.5261	0.3322	0.1631	0.0537	0.0086	0.0002
	14	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9994	0.9972	0.9904	0.9720	0.9304	0.8500	0.7178	0.5346	0.3267	0.1444	0.0352	0.0020
	15	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9995	0.9978	0.9923	0.9770	0.9409	0.8668	0.7369	0.5449	0.3159	0.1150	0.0132
	16	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9996	0.9985	0.9945	0.9830	0.9538	0.8887	0.7631	0.5587	0.2946	0.0665
	17	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9998	0.9992	0.9969	0.9896	0.9690	0.9171	0.8015	0.5797	0.2453
	18	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9997	0.9989	0.9958	0.9856	0.9544	0.8649	0.6226
	19	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

$$B(x,n,p)=\sum_{k=0}^{x} C_0^k\, p^k (1-p)^{n-k}$$ ***de n = 22 a n = 24***

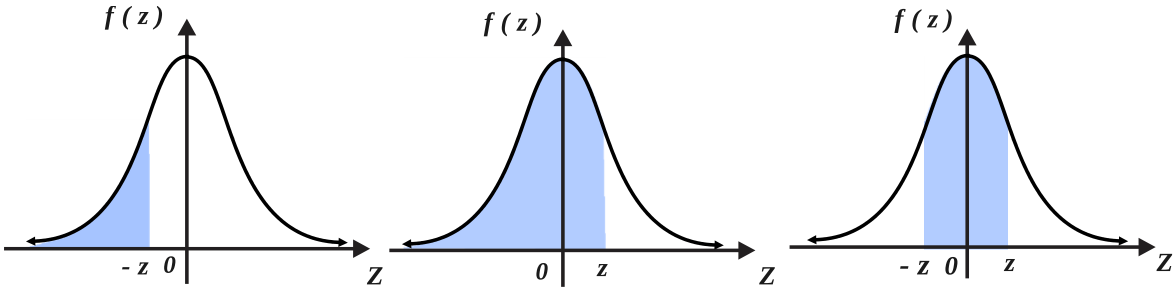
n	x	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40	0.45	0.50	0.55	0.60	0.65	0.70	0.75	0.80	0.85	0.90	0.95
20	0	0.3585	0.1216	0.0388	0.0115	0.0032	0.0008	0.0002	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	1	0.7358	0.3917	0.1756	0.0692	0.0243	0.0076	0.0021	0.0005	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	2	0.9245	0.6769	0.4049	0.2061	0.0913	0.0355	0.0121	0.0036	0.0009	0.0002	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	3	0.9841	0.8670	0.6477	0.4114	0.2252	0.1071	0.0444	0.0160	0.0049	0.0013	0.0003	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	4	0.9974	0.9568	0.8298	0.6296	0.4148	0.2375	0.1182	0.0510	0.0189	0.0059	0.0015	0.0003	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	5	0.9997	0.9887	0.9327	0.8042	0.6172	0.4164	0.2454	0.1256	0.0553	0.0207	0.0064	0.0016	0.0003	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	6	1.0000	0.9976	0.9781	0.9133	0.7858	0.6080	0.4166	0.2500	0.1299	0.0577	0.0214	0.0065	0.0015	0.0003	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	7	1.0000	0.9996	0.9941	0.9679	0.8982	0.7723	0.6010	0.4159	0.2520	0.1316	0.0580	0.0210	0.0060	0.0013	0.0002	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	8	1.0000	0.9999	0.9987	0.9900	0.9591	0.8867	0.7624	0.5956	0.4143	0.2517	0.1308	0.0565	0.0196	0.0051	0.0009	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000
	9	1.0000	1.0000	0.9998	0.9974	0.9861	0.9520	0.8782	0.7553	0.5914	0.4119	0.2493	0.1275	0.0532	0.0171	0.0039	0.0006	0.0000	0.0000	0.0000
	10	1.0000	1.0000	1.0000	0.9994	0.9961	0.9829	0.9468	0.8725	0.7507	0.5881	0.4086	0.2447	0.1218	0.0480	0.0139	0.0026	0.0002	0.0000	0.0000
	11	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9991	0.9949	0.9804	0.9435	0.8692	0.7483	0.5857	0.4044	0.2376	0.1133	0.0409	0.0100	0.0013	0.0001	0.0000
	12	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9998	0.9987	0.9940	0.9790	0.9420	0.8684	0.7480	0.5841	0.3990	0.2277	0.1018	0.0321	0.0059	0.0004	0.0000
	13	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9997	0.9985	0.9935	0.9786	0.9423	0.8701	0.7500	0.5834	0.3920	0.2142	0.0867	0.0219	0.0024	0.0000
	14	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9997	0.9984	0.9936	0.9793	0.9447	0.8744	0.7546	0.5836	0.3828	0.1958	0.0673	0.0113	0.0003
	15	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9997	0.9985	0.9941	0.9811	0.9490	0.8818	0.7625	0.5852	0.3704	0.1702	0.0432	0.0026
	16	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9997	0.9987	0.9951	0.9840	0.9556	0.8929	0.7748	0.5886	0.3523	0.1330	0.0159
	17	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9998	0.9991	0.9964	0.9879	0.9645	0.9087	0.7939	0.5951	0.3231	0.0755
	18	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9995	0.9979	0.9924	0.9757	0.9308	0.8244	0.6083	0.2642
	19	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9998	0.9992	0.9968	0.9885	0.9612	0.8784	0.6415
	20	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
21	0	0.3406	0.1094	0.0329	0.0092	0.0024	0.0006	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	1	0.7170	0.3647	0.1550	0.0576	0.0190	0.0056	0.0014	0.0003	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	2	0.9151	0.6484	0.3705	0.1787	0.0745	0.0271	0.0086	0.0024	0.0006	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	3	0.9811	0.8480	0.6113	0.3704	0.1917	0.0856	0.0331	0.0110	0.0031	0.0007	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	4	0.9968	0.9478	0.8025	0.5860	0.3674	0.1984	0.0924	0.0370	0.0126	0.0036	0.0008	0.0002	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	5	0.9996	0.9856	0.9173	0.7693	0.5666	0.3627	0.2009	0.0957	0.0389	0.0133	0.0037	0.0008	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	6	1.0000	0.9967	0.9713	0.8915	0.7436	0.5505	0.3567	0.2002	0.0964	0.0392	0.0132	0.0036	0.0007	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	7	1.0000	0.9994	0.9917	0.9569	0.8701	0.7230	0.5365	0.3495	0.1971	0.0946	0.0379	0.0123	0.0031	0.0006	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	8	1.0000	0.9999	0.9980	0.9856	0.9439	0.8523	0.7059	0.5237	0.3413	0.1917	0.0908	0.0352	0.0108	0.0024	0.0004	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	9	1.0000	1.0000	0.9996	0.9959	0.9794	0.9324	0.8377	0.6914	0.5117	0.3318	0.1841	0.0849	0.0313	0.0087	0.0017	0.0002	0.0000	0.0000	0.0000
	10	1.0000	1.0000	0.9999	0.9990	0.9936	0.9736	0.9228	0.8256	0.6790	0.5000	0.3210	0.1744	0.0772	0.0264	0.0064	0.0010	0.0001	0.0000	0.0000
	11	1.0000	1.0000	1.0000	0.9998	0.9983	0.9913	0.9687	0.9151	0.8159	0.6682	0.4883	0.3086	0.1623	0.0676	0.0206	0.0041	0.0004	0.0000	0.0000
	12	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9996	0.9976	0.9892	0.9648	0.9092	0.8083	0.6587	0.4763	0.2941	0.1477	0.0561	0.0144	0.0020	0.0001	0.0000
	13	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9994	0.9969	0.9877	0.9621	0.9054	0.8029	0.6505	0.4635	0.2770	0.1299	0.0431	0.0083	0.0006	0.0000
	14	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9993	0.9964	0.9868	0.9608	0.9036	0.7998	0.6433	0.4495	0.2564	0.1085	0.0287	0.0033	0.0000
	15	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9992	0.9963	0.9867	0.9611	0.9043	0.7991	0.6373	0.4334	0.2307	0.0827	0.0144	0.0004
	16	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9998	0.9992	0.9964	0.9874	0.9630	0.9076	0.8016	0.6326	0.4140	0.1975	0.0522	0.0032
	17	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9993	0.9969	0.9890	0.9669	0.9144	0.8083	0.6296	0.3887	0.1520	0.0189
	18	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9994	0.9976	0.9914	0.9729	0.9255	0.8213	0.6295	0.3516	0.0849
	19	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9997	0.9986	0.9944	0.9810	0.9424	0.8450	0.6353	0.2830
	20	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9994	0.9976	0.9908	0.9671	0.8906	0.6594
	21	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
22	0	0.3235	0.0985	0.0280	0.0074	0.0018	0.0004	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	1	0.6982	0.3392	0.1367	0.0480	0.0149	0.0041	0.0010	0.0002	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	2	0.9052	0.6200	0.3382	0.1545	0.0606	0.0207	0.0061	0.0016	0.0003	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	3	0.9778	0.8281	0.5752	0.3320	0.1624	0.0681	0.0245	0.0076	0.0020	0.0004	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	4	0.9960	0.9379	0.7738	0.5429	0.3235	0.1645	0.0716	0.0266	0.0083	0.0022	0.0005	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	5	0.9994	0.9818	0.9001	0.7326	0.5168	0.3134	0.1629	0.0722	0.0271	0.0085	0.0021	0.0004	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	6	0.9999	0.9956	0.9632	0.8670	0.6994	0.4942	0.3022	0.1584	0.0705	0.0262	0.0080	0.0019	0.0003	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	7	1.0000	0.9991	0.9886	0.9439	0.8385	0.6713	0.4736	0.2898	0.1518	0.0669	0.0243	0.0070	0.0016	0.0002	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	8	1.0000	0.9999	0.9970	0.9799	0.9254	0.8135	0.6466	0.4540	0.2764	0.1431	0.0617	0.0215	0.0058	0.0011	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	9	1.0000	1.0000	0.9993	0.9939	0.9705	0.9084	0.7916	0.6244	0.4350	0.2617	0.1328	0.0551	0.0180	0.0043	0.0007	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000
	10	1.0000	1.0000	0.9999	0.9984	0.9900	0.9613	0.8930	0.7720	0.6037	0.4159	0.2457	0.1207	0.0474	0.0140	0.0029	0.0003	0.0000	0.0000	0.0000

n	x	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40	0.45	0.50	0.55	0.60	0.65	0.70	0.75	0.80	0.85	0.90	0.95
22	11	1.0000	1.0000	1.0000	0.9997	0.9971	0.9860	0.9526	0.8793	0.7543	0.5841	0.3963	0.2280	0.1070	0.0387	0.0100	0.0016	0.0001	0.0000	0.0000
	12	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9993	0.9957	0.9820	0.9449	0.8672	0.7383	0.5650	0.3756	0.2084	0.0916	0.0295	0.0061	0.0007	0.0000	0.0000
	13	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9989	0.9942	0.9785	0.9383	0.8569	0.7236	0.5460	0.3534	0.1865	0.0746	0.0201	0.0030	0.0001	0.0000
	14	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9998	0.9984	0.9930	0.9757	0.9331	0.8482	0.7102	0.5264	0.3287	0.1615	0.0561	0.0114	0.0009	0.0000
	15	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9997	0.9981	0.9920	0.9738	0.9295	0.8416	0.6978	0.5058	0.3006	0.1330	0.0368	0.0044	0.0001
	16	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9996	0.9979	0.9915	0.9729	0.9278	0.8371	0.6866	0.4832	0.2674	0.0999	0.0182	0.0006
	17	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9995	0.9978	0.9917	0.9734	0.9284	0.8355	0.6765	0.4571	0.2262	0.0621	0.0040
	18	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9996	0.9980	0.9924	0.9755	0.9319	0.8376	0.6680	0.4248	0.1719	0.0222
	19	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9997	0.9984	0.9939	0.9793	0.9394	0.8455	0.6618	0.3800	0.0948
	20	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9998	0.9990	0.9959	0.9851	0.9520	0.8633	0.6608	0.3018
	21	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9996	0.9982	0.9926	0.9720	0.9015	0.6765
	22	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
23	0	0.3074	0.0886	0.0238	0.0059	0.0013	0.0003	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	1	0.6794	0.3151	0.1204	0.0398	0.0116	0.0030	0.0007	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	2	0.8948	0.5920	0.3080	0.1332	0.0492	0.0157	0.0043	0.0010	0.0002	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	3	0.9742	0.8073	0.5396	0.2965	0.1370	0.0538	0.0181	0.0052	0.0012	0.0002	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	4	0.9951	0.9269	0.7440	0.5007	0.2832	0.1356	0.0551	0.0190	0.0055	0.0013	0.0002	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	5	0.9992	0.9774	0.8811	0.6947	0.4685	0.2688	0.1309	0.0540	0.0186	0.0053	0.0012	0.0002	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	6	0.9999	0.9942	0.9537	0.8402	0.6537	0.4399	0.2534	0.1240	0.0510	0.0173	0.0048	0.0010	0.0002	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	7	1.0000	0.9988	0.9848	0.9285	0.8037	0.6181	0.4136	0.2373	0.1152	0.0466	0.0153	0.0040	0.0008	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	8	1.0000	0.9998	0.9958	0.9727	0.9037	0.7709	0.5860	0.3884	0.2203	0.1050	0.0411	0.0128	0.0030	0.0005	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	9	1.0000	1.0000	0.9990	0.9911	0.9592	0.8799	0.7408	0.5562	0.3636	0.2024	0.0937	0.0349	0.0100	0.0021	0.0003	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	10	1.0000	1.0000	0.9998	0.9975	0.9851	0.9454	0.8575	0.7129	0.5278	0.3388	0.1836	0.0813	0.0283	0.0072	0.0012	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000
	11	1.0000	1.0000	1.0000	0.9994	0.9954	0.9786	0.9318	0.8364	0.6865	0.5000	0.3135	0.1636	0.0682	0.0214	0.0046	0.0006	0.0000	0.0000	0.0000
	12	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9988	0.9928	0.9717	0.9187	0.8164	0.6612	0.4722	0.2871	0.1425	0.0546	0.0149	0.0025	0.0002	0.0000	0.0000
	13	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9997	0.9979	0.9900	0.9651	0.9063	0.7976	0.6364	0.4438	0.2592	0.1201	0.0408	0.0089	0.0010	0.0000	0.0000
	14	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9995	0.9970	0.9872	0.9589	0.8950	0.7797	0.6116	0.4140	0.2291	0.0963	0.0273	0.0042	0.0002	0.0000
	15	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9992	0.9960	0.9847	0.9534	0.8848	0.7627	0.5864	0.3819	0.1963	0.0715	0.0152	0.0012	0.0000
	16	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9998	0.9990	0.9952	0.9827	0.9490	0.8760	0.7466	0.5601	0.3463	0.1598	0.0463	0.0058	0.0001
	17	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9998	0.9988	0.9947	0.9814	0.9460	0.8691	0.7312	0.5315	0.3053	0.1189	0.0226	0.0008
	18	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9998	0.9987	0.9945	0.9810	0.9449	0.8644	0.7168	0.4993	0.2560	0.0731	0.0049
	19	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9998	0.9988	0.9948	0.9819	0.9462	0.8630	0.7035	0.4604	0.1927	0.0258
	20	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9998	0.9990	0.9957	0.9843	0.9508	0.8668	0.6920	0.4080	0.1052
	21	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9993	0.9970	0.9884	0.9602	0.8796	0.6849	0.3206
	22	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9997	0.9987	0.9941	0.9762	0.9114	0.6926
	23	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
24	0	0.2920	0.0798	0.0202	0.0047	0.0010	0.0002	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	1	0.6608	0.2925	0.1059	0.0331	0.0090	0.0022	0.0005	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	2	0.8841	0.5643	0.2798	0.1145	0.0398	0.0119	0.0030	0.0007	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	3	0.9702	0.7857	0.5049	0.2639	0.1150	0.0424	0.0133	0.0035	0.0008	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	4	0.9940	0.9149	0.7134	0.4599	0.2466	0.1111	0.0422	0.0134	0.0036	0.0008	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	5	0.9990	0.9723	0.8606	0.6559	0.4222	0.2288	0.1044	0.0400	0.0127	0.0033	0.0007	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	6	0.9999	0.9925	0.9428	0.8111	0.6074	0.3886	0.2106	0.0960	0.0364	0.0113	0.0028	0.0005	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	7	1.0000	0.9983	0.9801	0.9108	0.7662	0.5647	0.3575	0.1919	0.0863	0.0320	0.0095	0.0022	0.0004	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	8	1.0000	0.9997	0.9941	0.9638	0.8787	0.7250	0.5257	0.3279	0.1730	0.0758	0.0269	0.0075	0.0016	0.0002	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	9	1.0000	0.9999	0.9985	0.9874	0.9453	0.8472	0.6866	0.4891	0.2991	0.1537	0.0648	0.0217	0.0055	0.0010	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	10	1.0000	1.0000	0.9997	0.9962	0.9787	0.9258	0.8167	0.6502	0.4539	0.2706	0.1341	0.0535	0.0164	0.0036	0.0005	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	11	1.0000	1.0000	0.9999	0.9990	0.9928	0.9686	0.9058	0.7870	0.6151	0.4194	0.2420	0.1143	0.0423	0.0115	0.0021	0.0002	0.0000	0.0000	0.0000
	12	1.0000	1.0000	1.0000	0.9998	0.9979	0.9885	0.9577	0.8857	0.7580	0.5806	0.3849	0.2130	0.0942	0.0314	0.0072	0.0010	0.0001	0.0000	0.0000
	13	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9995	0.9964	0.9836	0.9465	0.8659	0.7294	0.5461	0.3498	0.1833	0.0742	0.0213	0.0038	0.0003	0.0000	0.0000
	14	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9990	0.9945	0.9783	0.9352	0.8463	0.7009	0.5109	0.3134	0.1528	0.0547	0.0126	0.0015	0.0001	0.0000
	15	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9998	0.9984	0.9925	0.9731	0.9242	0.8270	0.6721	0.4743	0.2750	0.1213	0.0362	0.0059	0.0003	0.0000
	16	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9996	0.9978	0.9905	0.9680	0.9137	0.8081	0.6425	0.4353	0.2338	0.0892	0.0199	0.0017	0.0000
	17	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9995	0.9972	0.9887	0.9636	0.9040	0.7894	0.6114	0.3926	0.1889	0.0572	0.0075	0.0001

$$B(x,n,p)=\sum_{k=0}^{x} C_0^k p^k (1-p)^{n-k} \quad \textbf{\textit{de } n = 24 \textit{ a } n = 25}$$

n	x	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40	0.45	0.50	0.55	0.60	0.65	0.70	0.75	0.80	0.85	0.90	0.95
24	18	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9993	0.9967	0.9873	0.9600	0.8956	0.7712	0.5778	0.3441	0.1394	0.0277	0.0010
	19	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9992	0.9964	0.9866	0.9578	0.8889	0.7534	0.5401	0.2866	0.0851	0.0060
	20	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9992	0.9965	0.9867	0.9576	0.8850	0.7361	0.4951	0.2143	0.0298
	21	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9993	0.9970	0.9881	0.9602	0.8855	0.7202	0.4357	0.1159
	22	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9995	0.9978	0.9910	0.9669	0.8941	0.7075	0.3392
	23	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9998	0.9990	0.9953	0.9798	0.9202	0.7080
	24	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
25	0	0.2774	0.0718	0.0172	0.0038	0.0008	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	1	0.6424	0.2712	0.0931	0.0274	0.0070	0.0016	0.0003	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	2	0.8729	0.5371	0.2537	0.0982	0.0321	0.0090	0.0021	0.0004	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	3	0.9659	0.7636	0.4711	0.2340	0.0962	0.0332	0.0097	0.0024	0.0005	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	4	0.9928	0.9020	0.6821	0.4207	0.2137	0.0905	0.0320	0.0095	0.0023	0.0005	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	5	0.9988	0.9666	0.8385	0.6167	0.3783	0.1935	0.0826	0.0294	0.0086	0.0020	0.0004	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	6	0.9998	0.9905	0.9305	0.7800	0.5611	0.3407	0.1734	0.0736	0.0258	0.0073	0.0016	0.0003	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	7	1.0000	0.9977	0.9745	0.8909	0.7265	0.5118	0.3061	0.1536	0.0639	0.0216	0.0058	0.0012	0.0002	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	8	1.0000	0.9995	0.9920	0.9532	0.8506	0.6769	0.4668	0.2735	0.1340	0.0539	0.0174	0.0043	0.0008	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	9	1.0000	0.9999	0.9979	0.9827	0.9287	0.8106	0.6303	0.4246	0.2424	0.1148	0.0440	0.0132	0.0029	0.0005	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	10	1.0000	1.0000	0.9995	0.9944	0.9703	0.9022	0.7712	0.5858	0.3843	0.2122	0.0960	0.0344	0.0093	0.0018	0.0002	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	11	1.0000	1.0000	0.9999	0.9985	0.9893	0.9558	0.8746	0.7323	0.5426	0.3450	0.1827	0.0778	0.0255	0.0060	0.0009	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000
	12	1.0000	1.0000	1.0000	0.9996	0.9966	0.9825	0.9396	0.8462	0.6937	0.5000	0.3063	0.1538	0.0604	0.0175	0.0034	0.0004	0.0000	0.0000	0.0000
	13	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9991	0.9940	0.9745	0.9222	0.8173	0.6550	0.4574	0.2677	0.1254	0.0442	0.0107	0.0015	0.0001	0.0000	0.0000
	14	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9998	0.9982	0.9907	0.9656	0.9040	0.7878	0.6157	0.4142	0.2288	0.0978	0.0297	0.0056	0.0005	0.0000	0.0000
	15	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9995	0.9971	0.9868	0.9560	0.8852	0.7576	0.5754	0.3697	0.1894	0.0713	0.0173	0.0021	0.0001	0.0000
	16	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9992	0.9957	0.9826	0.9461	0.8660	0.7265	0.5332	0.3231	0.1494	0.0468	0.0080	0.0005	0.0000
	17	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9998	0.9988	0.9942	0.9784	0.9361	0.8464	0.6939	0.4882	0.2735	0.1091	0.0255	0.0023	0.0000
	18	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9997	0.9984	0.9927	0.9742	0.9264	0.8266	0.6593	0.4389	0.2200	0.0695	0.0095	0.0002
	19	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9996	0.9980	0.9914	0.9706	0.9174	0.8065	0.6217	0.3833	0.1615	0.0334	0.0012
	20	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9995	0.9977	0.9905	0.9680	0.9095	0.7863	0.5793	0.3179	0.0980	0.0072
	21	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9995	0.9976	0.9903	0.9668	0.9038	0.7660	0.5289	0.2364	0.0341
	22	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9996	0.9979	0.9910	0.9679	0.9018	0.7463	0.4629	0.1271
	23	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9997	0.9984	0.9930	0.9726	0.9069	0.7288	0.3576
	24	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9992	0.9962	0.9828	0.9282	0.7226
	25	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

A.2 Probabilidades y percentiles normales

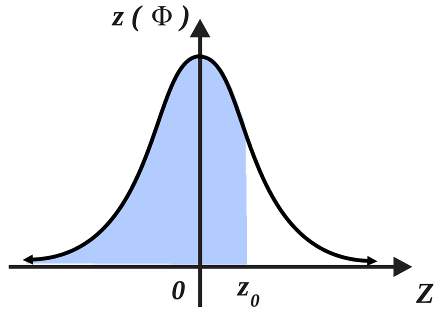


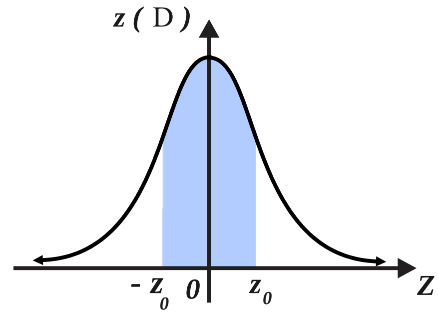
$- \infty < z < 1.59$

z	Φ(−z)	Φ(z)	D(z)	z	Φ(−z)	Φ(z)	D(z)	z	Φ(−z)	Φ(z)	D(z)	z	Φ(−z)	Φ(z)	D(z)
0.00	0.5000	0.5000	0.0000	**0.40**	0.3446	0.6554	0.3108	**0.80**	0.2119	0.7881	0.5763	**1.20**	0.1151	0.8849	0.7699
0.01	0.4960	0.5040	0.0080	**0.41**	0.3409	0.6591	0.3182	**0.81**	0.2090	0.7910	0.5821	**1.21**	0.1131	0.8869	0.7737
0.02	0.4920	0.5080	0.0160	**0.42**	0.3372	0.6628	0.3255	**0.82**	0.2061	0.7939	0.5878	**1.22**	0.1112	0.8888	0.7775
0.03	0.4880	0.5120	0.0239	**0.43**	0.3336	0.6664	0.3328	**0.83**	0.2033	0.7967	0.5935	**1.23**	0.1093	0.8907	0.7813
0.04	0.4840	0.5160	0.0319	**0.44**	0.3300	0.6700	0.3401	**0.84**	0.2005	0.7995	0.5991	**1.24**	0.1075	0.8925	0.7850
0.05	0.4801	0.5199	0.0399	**0.45**	0.3264	0.6736	0.3473	**0.85**	0.1977	0.8023	0.6047	**1.25**	0.1056	0.8944	0.7887
0.06	0.4761	0.5239	0.0478	**0.46**	0.3228	0.6772	0.3545	**0.86**	0.1949	0.8051	0.6102	**1.26**	0.1038	0.8962	0.7923
0.07	0.4721	0.5279	0.0558	**0.47**	0.3192	0.6808	0.3616	**0.87**	0.1922	0.8078	0.6157	**1.27**	0.1020	0.8980	0.7959
0.08	0.4681	0.5319	0.0638	**0.48**	0.3156	0.6844	0.3688	**0.88**	0.1894	0.8106	0.6211	**1.28**	0.1003	0.8997	0.7995
0.09	0.4641	0.5359	0.0717	**0.49**	0.3121	0.6879	0.3759	**0.89**	0.1867	0.8133	0.6265	**1.29**	0.0985	0.9015	0.8029
0.10	0.4602	0.5398	0.0797	**0.50**	0.3085	0.6915	0.3829	**0.90**	0.1841	0.8159	0.6319	**1.30**	0.0968	0.9032	0.8064
0.11	0.4562	0.5438	0.0876	**0.51**	0.3050	0.6950	0.3899	**0.91**	0.1814	0.8186	0.6372	**1.31**	0.0951	0.9049	0.8098
0.12	0.4522	0.5478	0.0955	**0.52**	0.3015	0.6985	0.3969	**0.92**	0.1788	0.8212	0.6424	**1.32**	0.0934	0.9066	0.8132
0.13	0.4483	0.5517	0.1034	**0.53**	0.2981	0.7019	0.4039	**0.93**	0.1762	0.8238	0.6476	**1.33**	0.0918	0.9082	0.8165
0.14	0.4443	0.5557	0.1113	**0.54**	0.2946	0.7054	0.4108	**0.94**	0.1736	0.8264	0.6528	**1.34**	0.0901	0.9099	0.8198
0.15	0.4404	0.5596	0.1192	**0.55**	0.2912	0.7088	0.4177	**0.95**	0.1711	0.8289	0.6579	**1.35**	0.0885	0.9115	0.8230
0.16	0.4364	0.5636	0.1271	**0.56**	0.2877	0.7123	0.4245	**0.96**	0.1685	0.8315	0.6629	**1.36**	0.0869	0.9131	0.8262
0.17	0.4325	0.5675	0.1350	**0.57**	0.2843	0.7157	0.4313	**0.97**	0.1660	0.8340	0.6680	**1.37**	0.0853	0.9147	0.8293
0.18	0.4286	0.5714	0.1428	**0.58**	0.2810	0.7190	0.4381	**0.98**	0.1635	0.8365	0.6729	**1.38**	0.0838	0.9162	0.8324
0.19	0.4247	0.5753	0.1507	**0.59**	0.2776	0.7224	0.4448	**0.99**	0.1611	0.8389	0.6778	**1.39**	0.0823	0.9177	0.8355
0.20	0.4207	0.5793	0.1585	**0.60**	0.2743	0.7257	0.4515	**1.00**	0.1587	0.8413	0.6827	**1.40**	0.0808	0.9192	0.8385
0.21	0.4168	0.5832	0.1663	**0.61**	0.2709	0.7291	0.4581	**1.01**	0.1562	0.8438	0.6875	**1.41**	0.0793	0.9207	0.8415
0.22	0.4129	0.5871	0.1741	**0.62**	0.2676	0.7324	0.4647	**1.02**	0.1539	0.8461	0.6923	**1.42**	0.0778	0.9222	0.8444
0.23	0.4090	0.5910	0.1819	**0.63**	0.2643	0.7357	0.4713	**1.03**	0.1515	0.8485	0.6970	**1.43**	0.0764	0.9236	0.8473
0.24	0.4052	0.5948	0.1897	**0.64**	0.2611	0.7389	0.4778	**1.04**	0.1492	0.8508	0.7017	**1.44**	0.0749	0.9251	0.8501
0.25	0.4013	0.5987	0.1974	**0.65**	0.2578	0.7422	0.4843	**1.05**	0.1469	0.8531	0.7063	**1.45**	0.0735	0.9265	0.8529
0.26	0.3974	0.6026	0.2051	**0.66**	0.2546	0.7454	0.4907	**1.06**	0.1446	0.8554	0.7109	**1.46**	0.0721	0.9279	0.8557
0.27	0.3936	0.6064	0.2128	**0.67**	0.2514	0.7486	0.4971	**1.07**	0.1423	0.8577	0.7154	**1.47**	0.0708	0.9292	0.8584
0.28	0.3897	0.6103	0.2205	**0.68**	0.2483	0.7517	0.5035	**1.08**	0.1401	0.8599	0.7199	**1.48**	0.0694	0.9306	0.8611
0.29	0.3859	0.6141	0.2282	**0.69**	0.2451	0.7549	0.5098	**1.09**	0.1379	0.8621	0.7243	**1.49**	0.0681	0.9319	0.8638
0.30	0.3821	0.6179	0.2358	**0.70**	0.2420	0.7580	0.5161	**1.10**	0.1357	0.8643	0.7287	**1.50**	0.0668	0.9332	0.8664
0.31	0.3783	0.6217	0.2434	**0.71**	0.2389	0.7611	0.5223	**1.11**	0.1335	0.8665	0.7330	**1.51**	0.0655	0.9345	0.8690
0.32	0.3745	0.6255	0.2510	**0.72**	0.2358	0.7642	0.5285	**1.12**	0.1314	0.8686	0.7373	**1.52**	0.0643	0.9357	0.8715
0.33	0.3707	0.6293	0.2586	**0.73**	0.2327	0.7673	0.5346	**1.13**	0.1292	0.8708	0.7415	**1.53**	0.0630	0.9370	0.8740
0.34	0.3669	0.6331	0.2661	**0.74**	0.2296	0.7704	0.5407	**1.14**	0.1271	0.8729	0.7457	**1.54**	0.0618	0.9382	0.8764
0.35	0.3632	0.6368	0.2737	**0.75**	0.2266	0.7734	0.5467	**1.15**	0.1251	0.8749	0.7499	**1.55**	0.0606	0.9394	0.8789
0.36	0.3594	0.6406	0.2812	**0.76**	0.2236	0.7764	0.5527	**1.16**	0.1230	0.8770	0.7540	**1.56**	0.0594	0.9406	0.8812
0.37	0.3557	0.6443	0.2886	**0.77**	0.2206	0.7794	0.5587	**1.17**	0.1210	0.8790	0.7580	**1.57**	0.0582	0.9418	0.8836
0.38	0.3520	0.6480	0.2961	**0.78**	0.2177	0.7823	0.5646	**1.18**	0.1190	0.8810	0.7620	**1.58**	0.0571	0.9429	0.8859
0.39	0.3483	0.6517	0.3035	**0.79**	0.2148	0.7852	0.5705	**1.19**	0.1170	0.8830	0.7660	**1.59**	0.0559	0.9441	0.8882

$-\infty < z < 3.59 \mid z > 1.60$

z	$\Phi(-z)$	$\Phi(z)$	$D(z)$	z	$\Phi(-z)$	$\Phi(z)$	$D(z)$	z	$\Phi(-z)$	$\Phi(z)$	$D(z)$	z	$\Phi(-z)$	$\Phi(z)$	$D(z)$
1.60	0.0548	0.9452	0.8904	**2.10**	0.0179	0.9821	0.9643	**2.60**	0.0047	0.9953	0.9907	**3.10**	0.0010	0.9990	0.9981
1.61	0.0537	0.9463	0.8926	**2.11**	0.0174	0.9826	0.9651	**2.61**	0.0045	0.9955	0.9909	**3.11**	0.0009	0.9991	0.9981
1.62	0.0526	0.9474	0.8948	**2.12**	0.0170	0.9830	0.9660	**2.62**	0.0044	0.9956	0.9912	**3.12**	0.0009	0.9991	0.9982
1.63	0.0516	0.9484	0.8969	**2.13**	0.0166	0.9834	0.9668	**2.63**	0.0043	0.9957	0.9915	**3.13**	0.0009	0.9991	0.9983
1.64	0.0505	0.9495	0.8990	**2.14**	0.0162	0.9838	0.9676	**2.64**	0.0041	0.9959	0.9917	**3.14**	0.0008	0.9992	0.9983
1.65	0.0495	0.9505	0.9011	**2.15**	0.0158	0.9842	0.9684	**2.65**	0.0040	0.9960	0.9920	**3.15**	0.0008	0.9992	0.9984
1.66	0.0485	0.9515	0.9031	**2.16**	0.0154	0.9846	0.9692	**2.66**	0.0039	0.9961	0.9922	**3.16**	0.0008	0.9992	0.9984
1.67	0.0475	0.9525	0.9051	**2.17**	0.0150	0.9850	0.9700	**2.67**	0.0038	0.9962	0.9924	**3.17**	0.0008	0.9992	0.9985
1.68	0.0465	0.9535	0.9070	**2.18**	0.0146	0.9854	0.9707	**2.68**	0.0037	0.9963	0.9926	**3.18**	0.0007	0.9993	0.9985
1.69	0.0455	0.9545	0.9090	**2.19**	0.0143	0.9857	0.9715	**2.69**	0.0036	0.9964	0.9929	**3.19**	0.0007	0.9993	0.9986
1.70	0.0446	0.9554	0.9109	**2.20**	0.0139	0.9861	0.9722	**2.70**	0.0035	0.9965	0.9931	**3.20**	0.0007	0.9993	0.9986
1.71	0.0436	0.9564	0.9127	**2.21**	0.0136	0.9864	0.9729	**2.71**	0.0034	0.9966	0.9933	**3.21**	0.0007	0.9993	0.9987
1.72	0.0427	0.9573	0.9146	**2.22**	0.0132	0.9868	0.9736	**2.72**	0.0033	0.9967	0.9935	**3.22**	0.0006	0.9994	0.9987
1.73	0.0418	0.9582	0.9164	**2.23**	0.0129	0.9871	0.9743	**2.73**	0.0032	0.9968	0.9937	**3.23**	0.0006	0.9994	0.9988
1.74	0.0409	0.9591	0.9181	**2.24**	0.0125	0.9875	0.9749	**2.74**	0.0031	0.9969	0.9939	**3.24**	0.0006	0.9994	0.9988
1.75	0.0401	0.9599	0.9199	**2.25**	0.0122	0.9878	0.9756	**2.75**	0.0030	0.9970	0.9940	**3.25**	0.0006	0.9994	0.9988
1.76	0.0392	0.9608	0.9216	**2.26**	0.0119	0.9881	0.9762	**2.76**	0.0029	0.9971	0.9942	**3.26**	0.0006	0.9994	0.9989
1.77	0.0384	0.9616	0.9233	**2.27**	0.0116	0.9884	0.9768	**2.77**	0.0028	0.9972	0.9944	**3.27**	0.0005	0.9995	0.9989
1.78	0.0375	0.9625	0.9249	**2.28**	0.0113	0.9887	0.9774	**2.78**	0.0027	0.9973	0.9946	**3.28**	0.0005	0.9995	0.9990
1.79	0.0367	0.9633	0.9265	**2.29**	0.0110	0.9890	0.9780	**2.79**	0.0026	0.9974	0.9947	**3.29**	0.0005	0.9995	0.9990
1.80	0.0359	0.9641	0.9281	**2.30**	0.0107	0.9893	0.9786	**2.80**	0.0026	0.9974	0.9949	**3.30**	0.0005	0.9995	0.9990
1.81	0.0351	0.9649	0.9297	**2.31**	0.0104	0.9896	0.9791	**2.81**	0.0025	0.9975	0.9950	**3.31**	0.0005	0.9995	0.9991
1.82	0.0344	0.9656	0.9312	**2.32**	0.0102	0.9898	0.9797	**2.82**	0.0024	0.9976	0.9952	**3.32**	0.0005	0.9995	0.9991
1.83	0.0336	0.9664	0.9328	**2.33**	0.0099	0.9901	0.9802	**2.83**	0.0023	0.9977	0.9953	**3.33**	0.0004	0.9996	0.9991
1.84	0.0329	0.9671	0.9342	**2.34**	0.0096	0.9904	0.9807	**2.84**	0.0023	0.9977	0.9955	**3.34**	0.0004	0.9996	0.9992
1.85	0.0322	0.9678	0.9357	**2.35**	0.0094	0.9906	0.9812	**2.85**	0.0022	0.9978	0.9956	**3.35**	0.0004	0.9996	0.9992
1.86	0.0314	0.9686	0.9371	**2.36**	0.0091	0.9909	0.9817	**2.86**	0.0021	0.9979	0.9958	**3.36**	0.0004	0.9996	0.9992
1.87	0.0307	0.9693	0.9385	**2.37**	0.0089	0.9911	0.9822	**2.87**	0.0021	0.9979	0.9959	**3.37**	0.0004	0.9996	0.9992
1.88	0.0301	0.9699	0.9399	**2.38**	0.0087	0.9913	0.9827	**2.88**	0.0020	0.9980	0.9960	**3.38**	0.0004	0.9996	0.9993
1.89	0.0294	0.9706	0.9412	**2.39**	0.0084	0.9916	0.9832	**2.89**	0.0019	0.9981	0.9961	**3.39**	0.0003	0.9997	0.9993
1.90	0.0287	0.9713	0.9426	**2.40**	0.0082	0.9918	0.9836	**2.90**	0.0019	0.9981	0.9963	**3.40**	0.0003	0.9997	0.9993
1.91	0.0281	0.9719	0.9439	**2.41**	0.0080	0.9920	0.9840	**2.91**	0.0018	0.9982	0.9964	**3.41**	0.0003	0.9997	0.9994
1.92	0.0274	0.9726	0.9451	**2.42**	0.0078	0.9922	0.9845	**2.92**	0.0018	0.9982	0.9965	**3.42**	0.0003	0.9997	0.9994
1.93	0.0268	0.9732	0.9464	**2.43**	0.0075	0.9925	0.9849	**2.93**	0.0017	0.9983	0.9966	**3.43**	0.0003	0.9997	0.9994
1.94	0.0262	0.9738	0.9476	**2.44**	0.0073	0.9927	0.9853	**2.94**	0.0016	0.9984	0.9967	**3.44**	0.0003	0.9997	0.9994
1.95	0.0256	0.9744	0.9488	**2.45**	0.0071	0.9929	0.9857	**2.95**	0.0016	0.9984	0.9968	**3.45**	0.0003	0.9997	0.9994
1.96	0.0250	0.9750	0.9500	**2.46**	0.0069	0.9931	0.9861	**2.96**	0.0015	0.9985	0.9969	**3.46**	0.0003	0.9997	0.9995
1.97	0.0244	0.9756	0.9512	**2.47**	0.0068	0.9932	0.9865	**2.97**	0.0015	0.9985	0.9970	**3.47**	0.0003	0.9997	0.9995
1.98	0.0239	0.9761	0.9523	**2.48**	0.0066	0.9934	0.9869	**2.98**	0.0014	0.9986	0.9971	**3.48**	0.0003	0.9997	0.9995
1.99	0.0233	0.9767	0.9534	**2.49**	0.0064	0.9936	0.9872	**2.99**	0.0014	0.9986	0.9972	**3.49**	0.0002	0.9998	0.9995
2.00	0.0228	0.9772	0.9545	**2.50**	0.0062	0.9938	0.9876	**3.00**	0.0013	0.9987	0.9973	**3.50**	0.0002	0.9998	0.9995
2.01	0.0222	0.9778	0.9556	**2.51**	0.0060	0.9940	0.9879	**3.01**	0.0013	0.9987	0.9974	**3.51**	0.0002	0.9998	0.9996
2.02	0.0217	0.9783	0.9566	**2.52**	0.0059	0.9941	0.9883	**3.02**	0.0013	0.9987	0.9975	**3.52**	0.0002	0.9998	0.9996
2.03	0.0212	0.9788	0.9576	**2.53**	0.0057	0.9943	0.9886	**3.03**	0.0012	0.9988	0.9976	**3.53**	0.0002	0.9998	0.9996
2.04	0.0207	0.9793	0.9586	**2.54**	0.0055	0.9945	0.9889	**3.04**	0.0012	0.9988	0.9976	**3.54**	0.0002	0.9998	0.9996
2.05	0.0202	0.9798	0.9596	**2.55**	0.0054	0.9946	0.9892	**3.05**	0.0011	0.9989	0.9977	**3.55**	0.0002	0.9998	0.9996
2.06	0.0197	0.9803	0.9606	**2.56**	0.0052	0.9948	0.9895	**3.06**	0.0011	0.9989	0.9978	**3.56**	0.0002	0.9998	0.9996
2.07	0.0192	0.9808	0.9615	**2.57**	0.0051	0.9949	0.9898	**3.07**	0.0011	0.9989	0.9979	**3.57**	0.0002	0.9998	0.9996
2.08	0.0188	0.9812	0.9625	**2.58**	0.0049	0.9951	0.9901	**3.08**	0.0010	0.9990	0.9979	**3.58**	0.0002	0.9998	0.9997
2.09	0.0183	0.9817	0.9634	**2.59**	0.0048	0.9952	0.9904	**3.09**	0.0010	0.9990	0.9980	**3.59**	0.0002	0.9998	0.9997





$0 < z(\Phi) < 29.9$

%	z(Φ)	z(D)	%	z(Φ)	z(D)	%	z(Φ)	z(D)	%	z(Φ)	z(D)	%	z(Φ)	z(D)	%	z(Φ)	z(D)
0.0	−∞	0	**5.0**	-1.645	0.063	**10.0**	-1.282	0.126	**15.0**	-1.036	0.189	**20.0**	-0.842	0.253	**25.0**	-0.674	0.319
0.1	-3.090	0.001	**5.1**	-1.635	0.064	**10.1**	-1.276	0.127	**15.1**	-1.032	0.190	**20.1**	-0.838	0.255	**25.1**	-0.671	0.320
0.2	-2.878	0.003	**5.2**	-1.626	0.065	**10.2**	-1.270	0.128	**15.2**	-1.028	0.192	**20.2**	-0.834	0.256	**25.2**	-0.668	0.321
0.3	-2.748	0.004	**5.3**	-1.616	0.066	**10.3**	-1.265	0.129	**15.3**	-1.024	0.193	**20.3**	-0.831	0.257	**25.3**	-0.665	0.323
0.4	-2.652	0.005	**5.4**	-1.607	0.068	**10.4**	-1.259	0.131	**15.4**	-1.019	0.194	**20.4**	-0.827	0.259	**25.4**	-0.662	0.324
0.5	-2.576	0.006	**5.5**	-1.598	0.069	**10.5**	-1.254	0.132	**15.5**	-1.015	0.196	**20.5**	-0.824	0.260	**25.5**	-0.659	0.325
0.6	-2.512	0.008	**5.6**	-1.589	0.070	**10.6**	-1.248	0.133	**15.6**	-1.011	0.197	**20.6**	-0.820	0.261	**25.6**	-0.656	0.327
0.7	-2.457	0.009	**5.7**	-1.580	-0.071	**10.7**	-1.243	0.135	**15.7**	-1.007	0.198	**20.7**	-0.817	0.262	**25.7**	-0.653	0.328
0.8	-2.409	0.010	**5.8**	-1.572	0.073	**10.8**	-1.237	0.136	**15.8**	-1.003	0.199	**20.8**	-0.813	0.264	**25.8**	-0.650	0.329
0.9	-2.366	0.011	**5.9**	-1.563	0.074	**10.9**	-1.232	0.137	**15.9**	-0.999	0.201	**20.9**	-0.810	0.265	**25.9**	-0.646	0.331
1.0	-2.326	0.013	**6.0**	-1.555	0.075	**11.0**	-1.227	0.138	**16.0**	-0.994	0.202	**21.0**	-0.806	0.266	**26.0**	-0.643	0.332
1.1	-2.290	0.014	**6.1**	-1.546	0.077	**11.1**	-1.221	0.140	**16.1**	-0.990	0.203	**21.1**	-0.803	0.268	**26.1**	-0.640	0.333
1.2	-2.257	0.015	**6.2**	-1.538	0.078	**11.2**	-1.216	0.141	**16.2**	-0.986	0.204	**21.2**	-0.800	0.269	**26.2**	-0.637	0.335
1.3	-2.226	0.016	**6.3**	-1.530	0.079	**11.3**	-1.211	0.142	**16.3**	-0.982	0.206	**21.3**	-0.796	0.270	**26.3**	-0.634	0.336
1.4	-2.197	0.018	**6.4**	-1.522	0.080	**11.4**	-1.206	0.143	**16.4**	-0.978	0.207	**21.4**	-0.793	0.272	**26.4**	-0.631	0.337
1.5	-2.170	0.019	**6.5**	-1.514	0.082	**11.5**	-1.200	0.145	**16.5**	-0.974	0.208	**21.5**	-0.789	0.273	**26.5**	-0.628	0.338
1.6	-2.144	0.020	**6.6**	-1.506	0.083	**11.6**	-1.195	0.146	**16.6**	-0.970	0.210	**21.6**	-0.786	0.274	**26.6**	-0.625	0.340
1.7	-2.120	0.021	**6.7**	-1.499	0.084	**11.7**	-1.190	0.147	**16.7**	-0.966	0.211	**21.7**	-0.782	0.275	**26.7**	-0.622	0.341
1.8	-2.097	0.023	**6.8**	-1.491	0.085	**11.8**	-1.185	0.148	**16.8**	-0.962	0.212	**21.8**	-0.779	0.277	**26.8**	-0.619	0.342
1.9	-2.075	0.024	**6.9**	-1.483	0.087	**11.9**	-1.180	0.150	**16.9**	-0.958	0.213	**21.9**	-0.776	0.278	**26.9**	-0.616	0.344
2.0	-2.054	0.025	**7.0**	-1.476	0.088	**12.0**	-1.175	0.151	**17.0**	-0.954	0.215	**22.0**	-0.772	0.279	**27.0**	-0.613	0.345
2.1	-2.034	0.026	**7.1**	-1.468	0.089	**12.1**	-1.170	0.152	**17.1**	-0.950	0.216	**22.1**	-0.769	0.281	**27.1**	-0.610	0.346
2.2	-2.014	0.028	**7.2**	-1.461	0.090	**12.2**	-1.165	0.154	**17.2**	-0.946	0.217	**22.2**	-0.765	0.282	**27.2**	-0.607	0.348
2.3	-1.995	0.029	**7.3**	-1.454	0.092	**12.3**	-1.160	0.155	**17.3**	-0.942	0.219	**22.3**	-0.762	0.283	**27.3**	-0.604	0.349
2.4	-1.977	0.030	**7.4**	-1.447	0.093	**12.4**	-1.155	0.156	**17.4**	-0.938	0.220	**22.4**	-0.759	0.285	**27.4**	-0.601	0.350
2.5	-1.960	0.031	**7.5**	-1.440	0.094	**12.5**	-1.150	0.157	**17.5**	-0.935	0.221	**22.5**	-0.755	0.286	**27.5**	-0.598	0.352
2.6	-1.943	0.033	**7.6**	-1.433	0.095	**12.6**	-1.146	0.159	**17.6**	-0.931	0.222	**22.6**	-0.752	0.287	**27.6**	-0.595	0.353
2.7	-1.927	0.034	**7.7**	-1.426	0.097	**12.7**	-1.141	0.160	**17.7**	-0.927	0.224	**22.7**	-0.749	0.288	**27.7**	-0.592	0.354
2.8	-1.911	0.035	**7.8**	-1.419	0.098	**12.8**	-1.136	0.161	**17.8**	-0.923	0.225	**22.8**	-0.745	0.290	**27.8**	-0.589	0.356
2.9	-1.896	0.036	**7.9**	-1.412	0.099	**12.9**	-1.131	0.162	**17.9**	-0.919	0.226	**22.9**	-0.742	0.291	**27.9**	-0.586	0.357
3.0	-1.881	0.038	**8.0**	-1.405	0.100	**13.0**	-1.126	0.164	**18.0**	-0.915	0.228	**23.0**	-0.739	0.292	**28.0**	-0.583	0.358
3.1	-1.866	0.039	**8.1**	-1.398	0.102	**13.1**	-1.122	0.165	**18.1**	-0.912	0.229	**23.1**	-0.736	0.294	**28.1**	-0.580	0.360
3.2	-1.852	0.040	**8.2**	-1.392	0.103	**13.2**	-1.117	0.166	**18.2**	-0.908	0.230	**23.2**	-0.732	0.295	**28.2**	-0.577	0.361
3.3	-1.838	0.041	**8.3**	-1.385	0.104	**13.3**	-1.112	0.167	**18.3**	-0.904	0.231	**23.3**	-0.729	0.296	**28.3**	-0.574	0.362
3.4	-1.825	0.043	**8.4**	-1.379	0.105	**13.4**	-1.108	0.169	**18.4**	-0.900	0.233	**23.4**	-0.726	0.298	**28.4**	-0.571	0.364
3.5	-1.812	0.044	**8.5**	-1.372	0.107	**13.5**	-1.103	0.170	**18.5**	-0.896	0.234	**23.5**	-0.722	0.299	**28.5**	-0.568	0.365
3.6	-1.799	0.045	**8.6**	-1.366	0.108	**13.6**	-1.098	0.171	**18.6**	-0.893	0.235	**23.6**	-0.719	0.300	**28.6**	-0.565	0.366
3.7	-1.787	0.046	**8.7**	-1.359	0.109	**13.7**	-1.094	0.173	**18.7**	-0.889	0.237	**23.7**	-0.716	0.302	**28.7**	-0.562	0.368
3.8	-1.774	0.048	**8.8**	-1.353	0.111	**13.8**	-1.089	0.174	**18.8**	-0.885	0.238	**23.8**	-0.713	0.303	**28.8**	-0.559	0.369
3.9	-1.762	0.049	**8.9**	-1.347	0.112	**13.9**	-1.085	0.175	**18.9**	-0.882	0.239	**23.9**	-0.710	0.304	**28.9**	-0.556	0.371
4.0	-1.751	0.050	**9.0**	-1.341	0.113	**14.0**	-1.080	0.176	**19.0**	-0.878	0.240	**24.0**	-0.706	0.305	**29.0**	-0.553	0.372
4.1	-1.739	0.051	**9.1**	-1.335	0.114	**14.1**	-1.076	0.178	**19.1**	-0.874	0.242	**24.1**	-0.703	0.307	**29.1**	-0.550	0.373
4.2	-1.728	0.053	**9.2**	-1.329	0.116	**14.2**	-1.071	0.179	**19.2**	-0.871	0.243	**24.2**	-0.700	0.308	**29.2**	-0.548	0.375
4.3	-1.717	0.054	**9.3**	-1.323	0.117	**14.3**	-1.067	0.180	**19.3**	-0.867	0.244	**24.3**	-0.697	0.309	**29.3**	-0.545	0.376
4.4	-1.706	0.055	**9.4**	-1.317	0.118	**14.4**	-1.063	0.181	**19.4**	-0.863	0.246	**24.4**	-0.693	0.311	**29.4**	-0.542	0.377
4.5	-1.695	0.056	**9.5**	-1.311	0.119	**14.5**	-1.058	0.183	**19.5**	-0.860	0.247	**24.5**	-0.690	0.312	**29.5**	-0.539	0.379
4.6	-1.685	0.058	**9.6**	-1.305	0.121	**14.6**	-1.054	0.184	**19.6**	-0.856	0.248	**24.6**	-0.687	0.313	**29.6**	-0.536	0.380
4.7	-1.675	0.059	**9.7**	-1.299	0.122	**14.7**	-1.049	0.185	**19.7**	-0.852	0.249	**24.7**	-0.684	0.315	**29.7**	-0.533	0.381
4.8	-1.665	0.060	**9.8**	-1.293	0.123	**14.8**	-1.045	0.187	**19.8**	-0.849	0.251	**24.8**	-0.681	0.316	**29.8**	-0.530	0.383
4.9	-1.655	0.061	**9.9**	-1.287	0.124	**14.9**	-1.041	0.188	**19.9**	-0.845	0.252	**24.9**	-0.678	0.317	**29.9**	-0.527	0.384

$30 < z(\Phi) < 65.9$

%	$z(\Phi)$	$z(D)$	%	$z(\Phi)$	$z(D)$	%	$z(\Phi)$	$z(D)$	%	$z(\Phi)$	$z(D)$	%	$z(\Phi)$	$z(D)$	%	$z(\Phi)$	$z(D)$
30.0	-0.524	0.385	**36.0**	-0.358	0.468	**42.0**	-0.202	0.553	**48.0**	-0.050	0.643	**54.0**	0.100	0.739	**60.0**	0.253	0.842
30.1	-0.522	0.387	**36.1**	-0.356	0.469	**42.1**	-0.199	0.555	**48.1**	-0.048	0.645	**54.1**	0.103	0.740	**60.1**	0.256	0.843
30.2	-0.519	0.388	**36.2**	-0.353	0.470	**42.2**	-0.197	0.556	**48.2**	-0.045	0.646	**54.2**	0.105	0.742	**60.2**	0.259	0.845
30.3	-0.516	0.389	**36.3**	-0.350	0.472	**42.3**	-0.194	0.558	**48.3**	-0.043	0.648	**54.3**	0.108	0.744	**60.3**	0.261	0.847
30.4	-0.513	0.391	**36.4**	-0.348	0.473	**42.4**	-0.192	0.559	**48.4**	-0.040	0.650	**54.4**	0.111	0.745	**60.4**	0.264	0.849
30.5	-0.510	0.392	**36.5**	-0.345	0.475	**42.5**	-0.189	0.561	**48.5**	-0.038	0.651	**54.5**	0.113	0.747	**60.5**	0.266	0.851
30.6	-0.507	0.393	**36.6**	-0.342	0.476	**42.6**	-0.187	0.562	**48.6**	-0.035	0.653	**54.6**	0.116	0.749	**60.6**	0.269	0.852
30.7	-0.504	0.395	**36.7**	-0.340	0.478	**42.7**	-0.184	0.564	**48.7**	-0.033	0.654	**54.7**	0.118	0.750	**60.7**	0.272	0.854
30.8	-0.502	0.396	**36.8**	-0.337	0.479	**42.8**	-0.181	0.565	**48.8**	-0.030	0.656	**54.8**	0.121	0.752	**60.8**	0.274	0.856
30.9	-0.499	0.397	**36.9**	-0.335	0.480	**42.9**	-0.179	0.567	**48.9**	-0.028	0.657	**54.9**	0.123	0.754	**60.9**	0.277	0.858
31.0	-0.496	0.399	**37.0**	-0.332	0.482	**43.0**	-0.176	0.568	**49.0**	-0.025	0.659	**55.0**	0.126	0.755	**61.0**	0.279	0.860
31.1	-0.493	0.400	**37.1**	-0.329	0.483	**43.1**	-0.174	0.570	**49.1**	-0.023	0.660	**55.1**	0.128	0.757	**61.1**	0.282	0.861
31.2	-0.490	0.402	**37.2**	-0.327	0.485	**43.2**	-0.171	0.571	**49.2**	-0.020	0.662	**55.2**	0.131	0.759	**61.2**	0.285	0.863
31.3	-0.487	0.403	**37.3**	-0.324	0.486	**43.3**	-0.169	0.572	**49.3**	-0.018	0.664	**55.3**	0.133	0.760	**61.3**	0.287	0.865
31.4	-0.485	0.404	**37.4**	-0.321	0.487	**43.4**	-0.166	0.574	**49.4**	-0.015	0.665	**55.4**	0.136	0.762	**61.4**	0.290	0.867
31.5	-0.482	0.406	**37.5**	-0.319	0.489	**43.5**	-0.164	0.575	**49.5**	-0.013	0.667	**55.5**	0.138	0.764	**61.5**	0.292	0.869
31.6	-0.479	0.407	**37.6**	-0.316	0.490	**43.6**	-0.161	0.577	**49.6**	-0.010	0.668	**55.6**	0.141	0.765	**61.6**	0.295	0.871
31.7	-0.476	0.408	**37.7**	-0.313	0.492	**43.7**	-0.159	0.578	**49.7**	-0.008	0.670	**55.7**	0.143	0.767	**61.7**	0.298	0.872
31.8	-0.473	0.410	**37.8**	-0.311	0.493	**43.8**	-0.156	0.580	**49.8**	-0.005	0.671	**55.8**	0.146	0.769	**61.8**	0.300	0.874
31.9	-0.470	0.411	**37.9**	-0.308	0.494	**43.9**	-0.154	0.581	**49.9**	-0.003	0.673	**55.9**	0.148	0.771	**61.9**	0.303	0.876
32.0	-0.468	0.412	**38.0**	-0.305	0.496	**44.0**	-0.151	0.583	**50.0**	0.000	0.674	**56.0**	0.151	0.772	**62.0**	0.305	0.878
32.1	-0.465	0.414	**38.1**	-0.303	0.497	**44.1**	-0.148	0.584	**50.1**	0.003	0.676	**56.1**	0.154	0.774	**62.1**	0.308	0.880
32.2	-0.462	0.415	**38.2**	-0.300	0.499	**44.2**	-0.146	0.586	**50.2**	0.005	0.678	**56.2**	0.156	0.776	**62.2**	0.311	0.882
32.3	-0.459	0.417	**38.3**	-0.298	0.500	**44.3**	-0.143	0.587	**50.3**	0.008	0.679	**56.3**	0.159	0.777	**62.3**	0.313	0.883
32.4	-0.457	0.418	**38.4**	-0.295	0.502	**44.4**	-0.141	0.589	**50.4**	0.010	0.681	**56.4**	0.161	0.779	**62.4**	0.316	0.885
32.5	-0.454	0.419	**38.5**	-0.292	0.503	**44.5**	-0.138	0.590	**50.5**	0.013	0.682	**56.5**	0.164	0.781	**62.5**	0.319	0.887
32.6	-0.451	0.421	**38.6**	-0.290	0.504	**44.6**	-0.136	0.592	**50.6**	0.015	0.684	**56.6**	0.166	0.782	**62.6**	0.321	0.889
32.7	-0.448	0.422	**38.7**	-0.287	0.506	**44.7**	-0.133	0.593	**50.7**	0.018	0.686	**56.7**	0.169	0.784	**62.7**	0.324	0.891
32.8	-0.445	0.423	**38.8**	-0.285	0.507	**44.8**	-0.131	0.595	**50.8**	0.020	0.687	**56.8**	0.171	0.786	**62.8**	0.327	0.893
32.9	-0.443	0.425	**38.9**	-0.282	0.509	**44.9**	-0.128	0.596	**50.9**	0.023	0.689	**56.9**	0.174	0.787	**62.9**	0.329	0.895
33.0	-0.440	0.426	**39.0**	-0.279	0.510	**45.0**	-0.126	0.598	**51.0**	0.025	0.690	**57.0**	0.176	0.789	**63.0**	0.332	0.896
33.1	-0.437	0.428	**39.1**	-0.277	0.512	**45.1**	-0.123	0.599	**51.1**	0.028	0.692	**57.1**	0.179	0.791	**63.1**	0.335	0.898
33.2	-0.434	0.429	**39.2**	-0.274	0.513	**45.2**	-0.121	0.601	**51.2**	0.030	0.693	**57.2**	0.181	0.793	**63.2**	0.337	0.900
33.3	-0.432	0.430	**39.3**	-0.272	0.514	**45.3**	-0.118	0.602	**51.3**	0.033	0.695	**57.3**	0.184	0.794	**63.3**	0.340	0.902
33.4	-0.429	0.432	**39.4**	-0.269	0.516	**45.4**	-0.116	0.604	**51.4**	0.035	0.697	**57.4**	0.187	0.796	**63.4**	0.342	0.904
33.5	-0.426	0.433	**39.5**	-0.266	0.517	**45.5**	-0.113	0.605	**51.5**	0.038	0.698	**57.5**	0.189	0.798	**63.5**	0.345	0.906
33.6	-0.423	0.434	**39.6**	-0.264	0.519	**45.6**	-0.111	0.607	**51.6**	0.040	0.700	**57.6**	0.192	0.800	**63.6**	0.348	0.908
33.7	-0.421	0.436	**39.7**	-0.261	0.520	**45.7**	-0.108	0.608	**51.7**	0.043	0.701	**57.7**	0.194	0.801	**63.7**	0.350	0.910
33.8	-0.418	0.437	**39.8**	-0.259	0.522	**45.8**	-0.105	0.610	**51.8**	0.045	0.703	**57.8**	0.197	0.803	**63.8**	0.353	0.912
33.9	-0.415	0.439	**39.9**	-0.256	0.523	**45.9**	-0.103	0.611	**51.9**	0.048	0.705	**57.9**	0.199	0.805	**63.9**	0.356	0.913
34.0	-0.412	0.440	**40.0**	-0.253	0.524	**46.0**	-0.100	0.613	**52.0**	0.050	0.706	**58.0**	0.202	0.806	**64.0**	0.358	0.915
34.1	-0.410	0.441	**40.1**	-0.251	0.526	**46.1**	-0.098	0.614	**52.1**	0.053	0.708	**58.1**	0.204	0.808	**64.1**	0.361	0.917
34.2	-0.407	0.443	**40.2**	-0.248	0.527	**46.2**	-0.095	0.616	**52.2**	0.055	0.710	**58.2**	0.207	0.810	**64.2**	0.364	0.919
34.3	-0.404	0.444	**40.3**	-0.246	0.529	**46.3**	-0.093	0.617	**52.3**	0.058	0.711	**58.3**	0.210	0.812	**64.3**	0.366	0.921
34.4	-0.402	0.445	**40.4**	-0.243	0.530	**46.4**	-0.090	0.619	**52.4**	0.060	0.713	**58.4**	0.212	0.813	**64.4**	0.369	0.923
34.5	-0.399	0.447	**40.5**	-0.240	0.532	**46.5**	-0.088	0.620	**52.5**	0.063	0.714	**58.5**	0.215	0.815	**64.5**	0.372	0.925
34.6	-0.396	0.448	**40.6**	-0.238	0.533	**46.6**	-0.085	0.622	**52.6**	0.065	0.716	**58.6**	0.217	0.817	**64.6**	0.375	0.927
34.7	-0.393	0.450	**40.7**	-0.235	0.534	**46.7**	-0.083	0.623	**52.7**	0.068	0.718	**58.7**	0.220	0.819	**64.7**	0.377	0.929
34.8	-0.391	0.451	**40.8**	-0.233	0.536	**46.8**	-0.080	0.625	**52.8**	0.070	0.719	**58.8**	0.222	0.820	**64.8**	0.380	0.931
34.9	-0.388	0.452	**40.9**	-0.230	0.537	**46.9**	-0.078	0.626	**52.9**	0.073	0.721	**58.9**	0.225	0.822	**64.9**	0.383	0.933
35.0	-0.385	0.454	**41.0**	-0.228	0.539	**47.0**	-0.075	0.628	**53.0**	0.075	0.722	**59.0**	0.228	0.824	**65.0**	0.385	0.935
35.1	-0.383	0.455	**41.1**	-0.225	0.540	**47.1**	-0.073	0.630	**53.1**	0.078	0.724	**59.1**	0.230	0.826	**65.1**	0.388	0.937
35.2	-0.380	0.457	**41.2**	-0.222	0.542	**47.2**	-0.070	0.631	**53.2**	0.080	0.726	**59.2**	0.233	0.827	**65.2**	0.391	0.938
35.3	-0.377	0.458	**41.3**	-0.220	0.543	**47.3**	-0.068	0.633	**53.3**	0.083	0.727	**59.3**	0.235	0.829	**65.3**	0.393	0.940
35.4	-0.375	0.459	**41.4**	-0.217	0.545	**47.4**	-0.065	0.634	**53.4**	0.085	0.729	**59.4**	0.238	0.831	**65.4**	0.396	0.942
35.5	-0.372	0.461	**41.5**	-0.215	0.546	**47.5**	-0.063	0.636	**53.5**	0.088	0.731	**59.5**	0.240	0.833	**65.5**	0.399	0.944
35.6	-0.369	0.462	**41.6**	-0.212	0.548	**47.6**	-0.060	0.637	**53.6**	0.090	0.732	**59.6**	0.243	0.834	**65.6**	0.402	0.946
35.7	-0.366	0.464	**41.7**	-0.210	0.549	**47.7**	-0.058	0.639	**53.7**	0.093	0.734	**59.7**	0.246	0.836	**65.7**	0.404	0.948
35.8	-0.364	0.465	**41.8**	-0.207	0.550	**47.8**	-0.055	0.640	**53.8**	0.095	0.736	**59.8**	0.248	0.838	**65.8**	0.407	0.950
35.9	-0.361	0.466	**41.9**	-0.204	0.552	**47.9**	-0.053	0.642	**53.9**	0.098	0.737	**59.9**	0.251	0.840	**65.9**	0.410	0.952

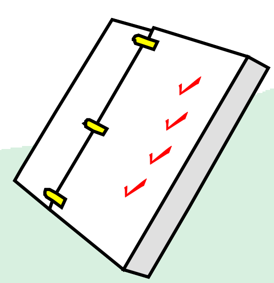
$66 < z(\Phi) < 99.9$

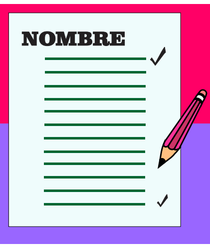
%	$z(\Phi)$	$z(D)$	%	$z(\Phi)$	$z(D)$	%	$z(\Phi)$	$z(D)$	%	$z(\Phi)$	$z(D)$	%	$z(\Phi)$	$z(D)$	%	$z(\Phi)$	$z(D)$
66.0	0.412	0.954	**72.0**	0.583	1.080	**78.0**	0.772	1.227	**84.0**	0.994	1.405	**90.0**	1.282	1.645	**96.0**	1.751	2.054
66.1	0.415	0.956	**72.1**	0.586	1.083	**78.1**	0.776	1.229	**84.1**	0.999	1.408	**90.1**	1.287	1.650	**96.1**	1.762	2.064
66.2	0.418	0.958	**72.2**	0.589	1.085	**78.2**	0.779	1.232	**84.2**	1.003	1.412	**90.2**	1.293	1.655	**96.2**	1.774	2.075
66.3	0.421	0.960	**72.3**	0.592	1.087	**78.3**	0.782	1.235	**84.3**	1.007	1.415	**90.3**	1.299	1.660	**96.3**	1.787	2.086
66.4	0.423	0.962	**72.4**	0.595	1.089	**78.4**	0.786	1.237	**84.4**	1.011	1.419	**90.4**	1.305	1.665	**96.4**	1.799	2.097
66.5	0.426	0.964	**72.5**	0.598	1.092	**78.5**	0.789	1.240	**84.5**	1.015	1.422	**90.5**	1.311	1.670	**96.5**	1.812	2.108
66.6	0.429	0.966	**72.6**	0.601	1.094	**78.6**	0.793	1.243	**84.6**	1.019	1.426	**90.6**	1.317	1.675	**96.6**	1.825	2.120
66.7	0.432	0.968	**72.7**	0.604	1.096	**78.7**	0.796	1.245	**84.7**	1.024	1.429	**90.7**	1.323	1.680	**96.7**	1.838	2.132
66.8	0.434	0.970	**72.8**	0.607	1.098	**78.8**	0.800	1.248	**84.8**	1.028	1.433	**90.8**	1.329	1.685	**96.8**	1.852	2.144
66.9	0.437	0.972	**72.9**	0.610	1.101	**78.9**	0.803	1.251	**84.9**	1.032	1.436	**90.9**	1.335	1.690	**96.9**	1.866	2.157
67.0	0.440	0.974	**73.0**	0.613	1.103	**79.0**	0.806	1.254	**85.0**	1.036	1.440	**91.0**	1.341	1.695	**97.0**	1.881	2.170
67.1	0.443	0.976	**73.1**	0.616	1.105	**79.1**	0.810	1.256	**85.1**	1.041	1.443	**91.1**	1.347	1.701	**97.1**	1.896	2.183
67.2	0.445	0.978	**73.2**	0.619	1.108	**79.2**	0.813	1.259	**85.2**	1.045	1.447	**91.2**	1.353	1.706	**97.2**	1.911	2.197
67.3	0.448	0.980	**73.3**	0.622	1.110	**79.3**	0.817	1.262	**85.3**	1.049	1.450	**91.3**	1.359	1.711	**97.3**	1.927	2.212
67.4	0.451	0.982	**73.4**	0.625	1.112	**79.4**	0.820	1.265	**85.4**	1.054	1.454	**91.4**	1.366	1.717	**97.4**	1.943	2.226
67.5	0.454	0.984	**73.5**	0.628	1.115	**79.5**	0.824	1.267	**85.5**	1.058	1.457	**91.5**	1.372	1.722	**97.5**	1.960	2.241
67.6	0.457	0.986	**73.6**	0.631	1.117	**79.6**	0.827	1.270	**85.6**	1.063	1.461	**91.6**	1.379	1.728	**97.6**	1.977	2.257
67.7	0.459	0.988	**73.7**	0.634	1.119	**79.7**	0.831	1.273	**85.7**	1.067	1.465	**91.7**	1.385	1.734	**97.7**	1.995	2.273
67.8	0.462	0.990	**73.8**	0.637	1.122	**79.8**	0.834	1.276	**85.8**	1.071	1.468	**91.8**	1.392	1.739	**97.8**	2.014	2.290
67.9	0.465	0.992	**73.9**	0.640	1.124	**79.9**	0.838	1.279	**85.9**	1.076	1.472	**91.9**	1.398	1.745	**97.9**	2.034	2.308
68.0	0.468	0.994	**74.0**	0.643	1.126	**80.0**	0.842	1.282	**86.0**	1.080	1.476	**92.0**	1.405	1.751	**98.0**	2.054	2.326
68.1	0.470	0.997	**74.1**	0.646	1.129	**80.1**	0.845	1.284	**86.1**	1.085	1.480	**92.1**	1.412	1.757	**98.1**	2.075	2.346
68.2	0.473	0.999	**74.2**	0.650	1.131	**80.2**	0.849	1.287	**86.2**	1.089	1.483	**92.2**	1.419	1.762	**98.2**	2.097	2.366
68.3	0.476	1.001	**74.3**	0.653	1.134	**80.3**	0.852	1.290	**86.3**	1.094	1.487	**92.3**	1.426	1.768	**98.3**	2.120	2.387
68.4	0.479	1.003	**74.4**	0.656	1.136	**80.4**	0.856	1.293	**86.4**	1.098	1.491	**92.4**	1.433	1.774	**98.4**	2.144	2.409
68.5	0.482	1.005	**74.5**	0.659	1.138	**80.5**	0.860	1.296	**86.5**	1.103	1.495	**92.5**	1.440	1.780	**98.5**	2.170	2.432
68.6	0.485	1.007	**74.6**	0.662	1.141	**80.6**	0.863	1.299	**86.6**	1.108	1.499	**92.6**	1.447	1.787	**98.6**	2.197	2.457
68.7	0.487	1.009	**74.7**	0.665	1.143	**80.7**	0.867	1.302	**86.7**	1.112	1.502	**92.7**	1.454	1.793	**98.7**	2.226	2.484
68.8	0.490	1.011	**74.8**	0.668	1.146	**80.8**	0.871	1.305	**86.8**	1.117	1.506	**92.8**	1.461	1.799	**98.8**	2.257	2.512
68.9	0.493	1.013	**74.9**	0.671	1.148	**80.9**	0.874	1.308	**86.9**	1.122	1.510	**92.9**	1.468	1.805	**98.9**	2.290	2.543
69.0	0.496	1.015	**75.0**	0.674	1.150	**81.0**	0.878	1.311	**87.0**	1.126	1.514	**93.0**	1.476	1.812	**99.0**	2.326	2.576
69.1	0.499	1.017	**75.1**	0.678	1.153	**81.1**	0.882	1.314	**87.1**	1.131	1.518	**93.1**	1.483	1.818	**99.1**	2.366	2.612
69.2	0.502	1.019	**75.2**	0.681	1.155	**81.2**	0.885	1.317	**87.2**	1.136	1.522	**93.2**	1.491	1.825	**99.2**	2.409	2.652
69.3	0.504	1.022	**75.3**	0.684	1.158	**81.3**	0.889	1.320	**87.3**	1.141	1.526	**93.3**	1.499	1.832	**99.3**	2.457	2.697
69.4	0.507	1.024	**75.4**	0.687	1.160	**81.4**	0.893	1.323	**87.4**	1.146	1.530	**93.4**	1.506	1.838	**99.4**	2.512	2.748
69.5	0.510	1.026	**75.5**	0.690	1.163	**81.5**	0.896	1.326	**87.5**	1.150	1.534	**93.5**	1.514	1.845	**99.5**	2.576	2.807
69.6	0.513	1.028	**75.6**	0.693	1.165	**81.6**	0.900	1.329	**87.6**	1.155	1.538	**93.6**	1.522	1.852	**99.6**	2.652	2.878
69.7	0.516	1.030	**75.7**	0.697	1.168	**81.7**	0.904	1.332	**87.7**	1.160	1.542	**93.7**	1.530	1.859	**99.7**	2.748	2.968
69.8	0.519	1.032	**75.8**	0.700	1.170	**81.8**	0.908	1.335	**87.8**	1.165	1.546	**93.8**	1.538	1.866	**99.8**	2.878	3.090
69.9	0.522	1.034	**75.9**	0.703	1.172	**81.9**	0.912	1.338	**87.9**	1.170	1.551	**93.9**	1.546	1.873	**99.9**	3.090	3.290
70.0	0.524	1.036	**76.0**	0.706	1.175	**82.0**	0.915	1.341	**88.0**	1.175	1.555	**94.0**	1.555	1.881			
70.1	0.527	1.039	**76.1**	0.710	1.177	**82.1**	0.919	1.344	**88.1**	1.180	1.559	**94.1**	1.563	1.888			
70.2	0.530	1.041	**76.2**	0.713	1.180	**82.2**	0.923	1.347	**88.2**	1.185	1.563	**94.2**	1.572	1.896			
70.3	0.533	1.043	**76.3**	0.716	1.183	**82.3**	0.927	1.350	**88.3**	1.190	1.567	**94.3**	1.580	1.903			
70.4	0.536	1.045	**76.4**	0.719	1.185	**82.4**	0.931	1.353	**88.4**	1.195	1.572	**94.4**	1.589	1.911			
70.5	0.539	1.047	**76.5**	0.722	1.188	**82.5**	0.935	1.356	**88.5**	1.200	1.576	**94.5**	1.598	1.919			
70.6	0.542	1.049	**76.6**	0.726	1.190	**82.6**	0.938	1.359	**88.6**	1.206	1.580	**94.6**	1.607	1.927			
70.7	0.545	1.052	**76.7**	0.729	1.193	**82.7**	0.942	1.363	**88.7**	1.211	1.585	**94.7**	1.616	1.935			
70.8	0.548	1.054	**76.8**	0.732	1.195	**82.8**	0.946	1.366	**88.8**	1.216	1.589	**94.8**	1.626	1.943			
70.9	0.550	1.056	**76.9**	0.736	1.198	**82.9**	0.950	1.369	**88.9**	1.221	1.594	**94.9**	1.635	1.951			
71.0	0.553	1.058	**77.0**	0.739	1.200	**83.0**	0.954	1.372	**89.0**	1.227	1.598	**95.0**	1.645	1.960			
71.1	0.556	1.060	**77.1**	0.742	1.203	**83.1**	0.958	1.375	**89.1**	1.232	1.603	**95.1**	1.655	1.969			
71.2	0.559	1.063	**77.2**	0.745	1.206	**83.2**	0.962	1.379	**89.2**	1.237	1.607	**95.2**	1.665	1.977			
71.3	0.562	1.065	**77.3**	0.749	1.208	**83.3**	0.966	1.382	**89.3**	1.243	1.612	**95.3**	1.675	1.986			
71.4	0.565	1.067	**77.4**	0.752	1.211	**83.4**	0.970	1.385	**89.4**	1.248	1.616	**95.4**	1.685	1.995			
71.5	0.568	1.069	**77.5**	0.755	1.213	**83.5**	0.974	1.388	**89.5**	1.254	1.621	**95.5**	1.695	2.005			
71.6	0.571	1.071	**77.6**	0.759	1.216	**83.6**	0.978	1.392	**89.6**	1.259	1.626	**95.6**	1.706	2.014			
71.7	0.574	1.074	**77.7**	0.762	1.219	**83.7**	0.982	1.395	**89.7**	1.265	1.630	**95.7**	1.717	2.024			
71.8	0.577	1.076	**77.8**	0.765	1.221	**83.8**	0.986	1.398	**89.8**	1.270	1.635	**95.8**	1.728	2.034			
71.9	0.580	1.078	**77.9**	0.769	1.224	**83.9**	0.990	1.402	**89.9**	1.276	1.640	**95.9**	1.739	2.044			

APÉNDICE B. SOLUCIONES

B.1 Soluciones a problemas propuestos

B.2 Soluciones a autoevaluaciones





B.1 SOLUCIONES A PROBLEMAS PROPUESTOS

UNIDAD 1

1. a. $X=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\cdots,100$. **b.** $Y=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\cdots,30$. **c.** $Z=0,\ 2,\ 4$.

2. $S=\left\{\begin{array}{c}(D,D,D),(D,D,E),(D,E,D),(E,D,D)\\(E,E,D),(E,D,E),(D,E,E),(E,E,E)\end{array}\right\}$. **a.** $X=0,\ 1,\ 2,\ 3$. **b.** $Y=0,\ 1,\ 2,\ 3$.

3. a. $X=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\cdots,\ n$. **b.** $S=\{I\ ,\ DI\ ,\ FI\ ,\ DFI\ ,\ FDI\ ,\cdots\}$ $X(I)=1,\ X(DI)=2,\ X(FI)=2,\ X(DFI)=3,\ X(FDI)=3$.

4. a. $X=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10$. **b.** $Y=-6,\ -5,\ -4,\ -3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4$. **5. a.** $X=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4$. **b.** $Y=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4$.

6. a. $X=2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10,\ 11,\ 12$. **b.** $Y=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6$.
c. $Z=-4,\ -3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,7,\ 8,\ 9,\ 10,\ 11$.

7. $S=\left\{\begin{array}{c}(1,1,1),(1,1,2),(1,2,1),(2,1,1)\\(2,2,1),(2,1,2),(1,2,2),(2,2,2)\end{array}\right\}$ **a.** $X=3,\ 4,\ 5,\ 6$. **b.** $Y=1,\ 2$. **c.** $Z=0,\ 1,\ 2,\ 3$.

8. a.

x	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$f_X(x)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

b.

x	1	2	3	4	5	6
$f_X(x)$	$\frac{11}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{1}{36}$

9. a. d.

10.

a.

x	3	4	5	6
$f_X(x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

$$f_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{8} & x=3,\ 6\\ \frac{3}{8} & x=4,\ 5\end{cases}.$$

b.

y	1	2
$f_Y(y)$	$\frac{7}{8}$	$\frac{1}{8}$

$$f_Y(y)=\begin{cases}\frac{7}{8} & y=1\\ \frac{1}{8} & y=2\end{cases}.$$

c.

z	0	1	2	3
$f_Z(z)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

$$f_Z(z)=\begin{cases}\frac{1}{8} & z=0,\ 3\\ \frac{3}{8} & z=1,\ 2\end{cases}$$

11. a. $f_X(x)=\dfrac{C_x^3C_{3-x}^3}{C_3^6}$ **si** $X=0,\ 1,\ 2,\ 3$.

12. a. $f_X(x)=\dfrac{C_x^6 C_{4-x}^4}{C_3^{10}} \quad X=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6$. **b.** $F(x)=\begin{cases} 0 & Y<0 \\ \frac{1}{20} & 0\le Y<1 \\ \frac{10}{20} & 1\le Y<2 \\ \frac{19}{20} & 2\le X<3 \\ 1 & 3\le X \end{cases}$. **b.** $F(x)=\displaystyle\sum_{k=0}^{x}\frac{C_k^6 C_{3-k}^4}{C_3^{10}}$.

13.

a.

$$f_X(x)=\begin{cases} 0.28 & x=-2 \\ 0.55 & x=1 \\ 0.13 & x=3 \\ 0.04 & x=5 \end{cases} \text{ y}$$

$$F(x)=\begin{cases} 0 & X<-2 \\ 0.28 & -2\le X<1 \\ 0.83 & 1\le X<3 \\ 0.96 & 3\le X<5 \\ 1 & 5\le X \end{cases}$$

b.

$$f_X(x)=\begin{cases} 0.1 & x=-2 \\ 0.5 & x=-1 \\ 0{,}2 & x=0 \\ 0.1 & x=1 \\ 0.1 & x=2 \end{cases}$$

$$F(x)=\begin{cases} 0 & X<-2 \\ 0.1 & -2\le X<-1 \\ 0.6 & -1\le X<0 \\ 0.8 & 0\le X<1 \\ 0.9 & 1\le X<2 \\ 1 & 2\le X \end{cases}$$

c.

$$g_X(x)=\begin{cases} \frac{1}{6} & x=1 \\ \frac{3}{6} & x=3 \\ 0 & x=4 \\ \frac{2}{6} & x=5 \end{cases}$$

$$G(x)=\begin{cases} 0 & X<1 \\ \frac{1}{6} & 1\le X<3 \\ \frac{4}{6} & 3\le X<4 \\ \frac{4}{6} & 4\le X<5 \\ 1 & 5\le X \end{cases}.$$

d.

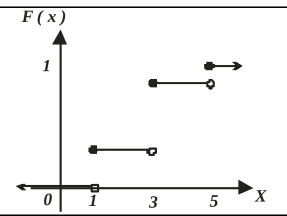
$$g_X(x)=\begin{cases} 0.3 & x=0 \\ 0.3 & x=1 \\ 0{,}2 & x=3 \\ 0 & x=4 \\ 0.2 & x=5 \end{cases}$$

$$G(x)=\begin{cases} 0 & X<0 \\ 0.3 & 0\le X<1 \\ 0.6 & 1\le X<3 \\ 0{,}8 & 3\le X<4 \\ 0.8 & 4\le X<5 \\ 1 & 5\le X \end{cases}.$$

14.

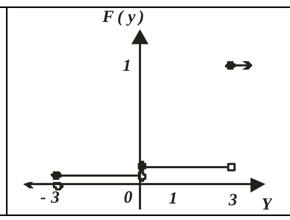
a.

$$F(x)=\begin{cases} 0 & X<1 \\ 0.3 & 1\le X<3 \\ 0.8 & 3\le X<5 \\ 0.1 & 5\le X \end{cases}$$



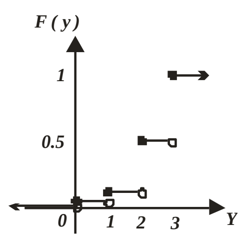
b.

$$F(y)=\begin{cases} 0 & Y<-3 \\ 0.12 & -3\le Y<0 \\ 0.18 & 0\le Y<3 \\ 1 & 3\le Y \end{cases}$$



c.

$$F(y)=\begin{cases} 0 & Y<0 \\ \frac{1}{18} & 0\le Y<1 \\ \frac{3}{18} & 1\le Y<2 \\ \frac{10}{18} & 2\le Y<3 \\ 1 & 3\le Y \end{cases}$$



15.

a.

x	0	1	2	3
$f_X(x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

b.

$$F(x)=\begin{cases} 0 & X<0 \\ \frac{1}{8} & 0\le X<1 \\ \frac{4}{8} & 1\le X<2 \\ \frac{7}{8} & 2\le X<3 \\ 1 & 3\le X \end{cases}.$$

16.

a.

X	0	3
$f_X(x)$	0.5	0.5

b. 0.5 .
c. 0 .
d. 0.5 .
e. 0.5 .
f. 0.5 .

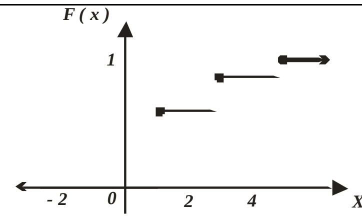
17.

a. 0.4 .
b. 0.4 .
c. 0.4 .
d. 0.4 .
e. 0.4 .
f. 0.4 .
g. 1 .
h. 0.8 .

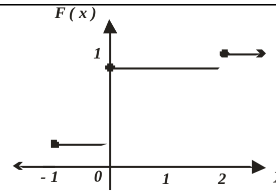
18.

$$f_Z(x)=\begin{cases} 0.4 & =-3 \\ 0.5 & z=-1 \\ 0.1 & z=0 \end{cases}.$$

19.
a. $K=0.2$.
b.
$$F(x)=\begin{cases}0 & X<1\\ 0.6 & 1\le X<3\\ 0.8 & 3\le X<5\\ 1 & 5\le X\end{cases}.$$



20.
a. $K=0.2$.
b.
$$F(x)=\begin{cases}0 & X<-1\\ 0.2 & -1\le X<0\\ 0.8 & 0\le X<2\\ 1 & 2\le X\end{cases}.$$



21. a. $K=4$.**b.** $V[X]=27$, $DE[X]=\sqrt{27}$. **22. a.** $K=0.30$. **b.** $V[X]=1.05$, $DE[X]=1.0247$. **23. a.** $E[X]=3.24$. **b.** $V[X]=0.6224$, $DE[X]=0.7889$. **24. a.** $E[X]=30$. **b.** $V[X]=100$, $DE[X]=10$.

25. a.
$$F(x)=\begin{cases}0 & X<1\\ \frac{4}{10} & 1\le X<2\\ \frac{7}{10} & 2\le X<3\\ \frac{9}{10} & 3\le X<4\\ 1 & 4\le X\end{cases}.$$
b. $V[X]=1$, $DE[X]=1$.

26. a.
$$F(x)=\begin{cases}0 & X<1\\ \frac{1}{10} & 1\le X<2\\ \frac{3}{10} & 2\le X<3\\ \frac{6}{10} & 3\le X<4\\ 1 & 4\le X\end{cases}.$$
b. $V[X]=1$, $DE[X]=1$.

27. a. $E[X]=0.8$
b. $V[X]=0.64$, $DE[X]=0.8$.

28. $E[X]=5$, no jugar.
29. $E[X]=25$, jugar.
30. $E[X]=-\frac{5}{36}$, no jugar.
31. $E[X]=0$, no se pierde, no se gana.

32. a. -7. **b.** -5. **c.** $\frac{3}{2}$. **d.** $\frac{5}{3}$. **33. a.** -14. **b.** 12.7. **c.** -0.76. **d.** -1.76. **34. a.** 1.6. **b.** 8.4. **c.** 0.024. **b.** 8.4. **35. a.** $\frac{29}{48}$. **c.** $\frac{1484}{300}$. **b.** $\frac{11}{192}$. **d.** $\frac{1436}{300}$. **37. a.** 0.6. **b.** 0.2. **c.** 0.2. **d.** 0.8. **38. a.** $\frac{7}{16}$. **b.** $\frac{1}{4}$. **c.** $\frac{8}{16}$. **d.** $\frac{15}{16}$. **39. a.** $A=\frac{1}{2}$. **b.** $\frac{1}{25}$. **c.** $\frac{24}{25}$. **d.** $\frac{1}{100}$.

SECCIÓN 1.2

1. a. 0.2185. **b.** 0.0449. **c.** 0.9964. **d.** 0.9994. **e.** 0.3598. **f.** 0.6813. **g.** 0.
2. a. 0. **b.** 0. **c.** 0.1201. **d.** 0.7312. **e.** 0.0072. **f.** 0.8269. **g.** 0.4399. **h.** 0.9786.
3. a. $b(x,6,0.2)=C_x^6(0.2)^x(0.8)^{6-x}$ **b.** $b(x,3,0.4)=C_x^3(0.4)^x(0.6)^{3-x}$.
c. $b(x,8,0.2)=C_x^8(0.2)^x(0.8)^{8-x}$. **d.** $b(x,10,0.4)=C_x^{10}(0.4)^x(0.6)^{10-x}$.
4. a. $b(x,7,0.2)=C_x^7(0.2)^x(0.8)^{7-x}$. **b.** $b(x,12,0.2)=C_x^{12}(0.2)^x(0.8)^{12-x}$.
c. $B(x,4,0.2)=C_x^4(0.2)^4(0.6)^{4-x}$. **d.** $b(x,12,0.2)=C_x^{12}(0.2)^x(0.8)^{12-x}$
d. $B(x,8,0.2)=C_x^8(0.2)^x(0.8)^{8-x}$. **5. a.** 0.0015. **b.** 0.03487. **c.** 0.9999. **d.** 0.0016. **6. a.** 0.0212. **b.** 0.0250. **c.** 0.0994. **d.** 0.9006. **e.** 0.5026. **7. a.** 0.0000. **b.** 0.5487. **8. a.** 0.0000. **b.** 1.0000. **c.** 0.8702. **d.** 0.0000. **9. a.** 0.3277. **b.** 0.2592. **c.** 0.5282. **11. a.** 0.1681. **b.** 0.5282.
12. a.

X	0	1	2	3
$f_X(x)$	0.008	0.096	0.384	0.512

b. 0.9920. **13. a.** 0.0282. **b.** 0.2001. **c.** 0.0016. **d.** 0.3828. **e.** 0.8497. **14. a.** 0.0000. **b.** 0.0007. **c.** 0.9999. **d.** 0.8287. **e.** 0.0042. **15. a.** $E[X]=12$ y $V[X]=4.8$. **b.** $E[X]=17$ y $V[X]=2.55$. **c.** $E[X]=12$ y $V[X]=8.4$. **16.** $E[X]=3$ y $DE[X]=\sqrt{2.7}$. **17.** $f_X(x)=C_x^{20}(0.5)^x(0.5)^{20-x}$, $X=0,\cdots,20$. **18.** 1. **19. a.** 0.0031. **b.** 0.0002. **c.** 0.9997. **d.** 15 y 6 respectivamente. **20. a.** 0.1181. **b.** 0.2066. **c.** 0.4032. **d.** 9 y 3.6 respectivamente. **21. a.** 1.0. **b.** 1.2. **c.** 7.2. **d.** 1. **e.** 1.0. **22. a.** 0.1762. **b.** 0.0000. **c.** 8.5. **d.** 1.35. **24. a.** 99. **b.** 116 o 117. **25. a.** 0.3280. **b.** 1.0000. **c.** 3. **26.** $f_X(x)=C_x^{25}(0.4)^x(0.6)^{25-x}$, $X=0,\cdots,25$. **27. a.** 0.0027. **b.** 0.9973. **c.** 0.6157 **d.** 0.3655. **e.** 0.6273.**f.** 0.1977. **g.** 0.7422.**h.** 0.2661. **i.** 0.4647. **28. a.** 0.4649. **b.** 0.2204. **c.** 0.0228. **d.** 0.8643. **e.** 0.1822. **f.** 0.1151. **29. a.** 0.0668. **b.** 0.0062. **c.** 1. **d.** 0.9861. **e.** 1. **f.** 1. **30. a.** -1.8119. **b.** 2.0537. **c.** -0.7892. **d.** 0.3319. **e.** $p(-z_0<Z<z_0)=0.775$. **f.** $p(-z_0<Z<z_0)=0.18$. **g.** -3.0902. **h.** -4.2667. **i.** -5.212. **31. a.** -1.150. **b.** 1.405. **c.** -1.254. **d.** 0.994. **e.** 0.454. **f.** 1.405. **g.** 3.090. **h.** -3.090. **i.** 0. **32. a.** -0.311. **b.** 1.563. **c.** 0.573. **d.** -0.412. **e.** -1.655. **f.** -0.196. **33. a.** 0.440.**b.** 1.46. **c.** 0.283. **d.** -1.838. **e.** -0.385. **f.** 1.175. **34. a.** -36.5. **b.** -21.55. **c.** -33.416. **d.** -40.548. **35. a.** $x_0=3.456$. **b.** $x_0=-0.58$. **c.** $x_0=1.498$. **d.** $x_0=4.39$.**36. a.** 0.8962. **b.** 0.02870. **c.** 0.6030. **37. a.** 19.77. **b.** 55.86. **c.** 1.22. **38. a.** 64.80. **b.** 51.99. **c.** 54.38. **39. a.** 84.13. **b.** 55.85. **c.** 40.13. **40. a.** 0. **b.** 0.6827. **c.** 15.0311 centímetros. **41. a.** 18. **b.** 526. **c.** 528. **d.** 26. **42. a.** 0.00475. **b.** 0.7486. **c.** 0.6711. **43. a.** 0.0047. **b.** 0.1496. **c.** 0.0537. **44. a.** Aprox. 7:14. **b.** Aprox. 7:17. **45. a.** Aprox. 2.67 años. **b.** Aprox. 6.65 años. **46.** 347.55 gramos. **47. a.** 2.57 gramos. **b.** 0.974 gramos. **48. a.** 0.9051. **b.** $\sigma=0.423$ centímetros. **49. a.** 8.674 kilogramos. **b.** 6.674 kilogramos. **50. a.** 0.82%. **b.** 563.12. **c.** 403.88. **51.** $\sigma=6.079$. **52.** $\mu=10.035$, $\sigma=0.1413$. **53.** $\mu=243.334$, $\sigma=26.343$.

SECCIÓN 2.1

1. a. $\hat{\mu}=4.12$, $\hat{\sigma}=1.65517$. **b.** $\hat{p}=0.70$. **2. a.** $\hat{\mu}=166.6$, $\hat{\sigma}=3.04$. **b.** $\hat{p}=\frac{1}{3}$. **3. a.** $\hat{p}=\frac{1}{4}$, **b.** $\hat{p}=\frac{3}{20}$.

4. $\left\{\begin{array}{l}(2,2),(2,4),(2,6),(2,8),(2,10)\\(4,2),(4,4),(4,6),(4,8),(4,10)\\(6,2),(6,4),(6,6),(6,8),(6,10)\\(8,2),(8,4),(8,6),(8,8),(8,10)\\(10,2),(10,4),(10,6),(10,8),(10,10)\end{array}\right\}$.

5. a. $\left\{\begin{array}{l}(0,0),(0,2)\\(2,0),(2,2)\end{array}\right\}$. **b.** $\left\{\begin{array}{l}\bar{x}_{12}=0,\ \bar{x}_{12}=1\\\bar{x}_{21}=1,\ \bar{x}_{22}=2\end{array}\right\}$. **c.** $\bar{x}=1$.

SECCIÓN 2.2

1. a. $\mu_{\overline{X}}=10$ y $\sigma_{\overline{X}}=0.6$. **b.** $\mu_{\overline{X}}=150$ y $\sigma_{\overline{X}}=0.2857$. **c.** $\mu_{\overline{X}}=6$ y $\sigma_{\overline{X}}=0.1666$. **2. a.** $\mu_{\overline{X}}=1$ y $\sigma_{\overline{X}}=0.8$. **b.** $\mu_{\overline{X}}=16$ y $\sigma_{\overline{X}}=0.625$. **c.** $\mu_{\overline{X}}=6$ y $\sigma_{\overline{X}}=2.5$. **3. a.** $\mu_P=0.4$ y $\sigma_P=0.0489$. **b.** $\mu_P=0.01$ y $\sigma_P=0.00049$. **c.** $\mu_P=0.6$ y $\sigma_P=0.0221$. **d.** $\mu_P=0.25$ y $\sigma_P=0.1443$. **4. a.** $\mu_p=0.25$ y $\sigma_p=0.0541$. **b.** $\mu_p=0.90$ y $\sigma_p=0.015$. **c.** $\mu_p=0.75$ y $\sigma_p=0.0173$. **d.** $\mu_p=0.1$ y $\sigma_p=0.1500$. **5. a.** $\mu_{\overline{X}}=12$, $\sigma^2_{\overline{X}}=0.0001$. **b.** $\mu_{\overline{X}}=12$, $\sigma^2_{\overline{X}}=0.000025$. **c.** 0.6827. **6. a.** 0.914. **b.** 0.918. **c.** 0.2456. **d.** 4.34 miligramos. **7. a.** 0.9938. **b.** 1. **8. a.** 0.9991. **b.** 0. **9. a.** 0.1587. **b.** 0.9987. **c.** 0.8168 miligramos. **d.** 0.8081 miligramos. **10. a.** 0.1974. **b.** 0.1537. **11. a.** 1 . **b.** 0.0002. **c.** 0.9998. **d.** 10.3662. **12. a.** 0.0722. **b.** 0.5871. **c.** 0.5478. **d.** 0.9933. **13. a.** 0.0918. **b.** 0.0038. **14. a.** 0.2005. **b.** 0.9946. **15. a.** 0.1056. **b.** 0.5714. **c.** 0.0000. **d.** 0.0012. **16. a.** 0.1131. **b.** 0.0052. **c.** 0.5832. **17. a.** 0.0019. **b.** 0.9696. **c.** 0.1151. **18. a.** 1000 bolsas. **b.** 0 bolsas. **c.** Aproximadamente 6. **d.** Aproximadamente 125. **19. a.** 0.3050. **b.** 1.0000. **c.** 0.0006. **d.** 0.8830. **20. a.** 1.0000. **b.** 1.0000. **21. a.** 0.9973. **b.** 0.8770. **c.** 0.8770.

SECCIÓN 3.1

1. a. 5.625 y 3.4107. **b.** 0.5

4. a. Media real, $(1-\alpha)100\%=98\%$, $l=6.4$, $\hat{\theta}_i=10.4$ y $\hat{\theta}_S=16.8$.

b. Proporción real, $(1-\alpha)100\%=90\%$, $l=0.21$, $\hat{\theta}_i=0.72$ y $\hat{\theta}_S=0.93$.

c. Desviación estándar real, $(1-\alpha)100\%=99\%$, $l=9.9$, $\hat{\theta}_i=0.72$ y $\hat{\theta}_S=10.3$.

5. De mayor a menor: $10.0\le\mu\le17.8$, $10.4\le\mu\le16.8$, $10.8\le\mu\le16.2$.

6. De mayor a menor: $0.33\le p\le0.89$, $0.4\le p\le0.82$, $0.45\le p\le0.78$.

7. a. No, la proporción es un número comprendido entre cero y uno (inclusive). **b.** No, la proporción es un número comprendido entre cero y uno (inclusive). **c.** sí.

8. a. $9.608<\mu\le10.392$. **b.**. $124.071<\mu\le125.929$. **c.**. $97.060<\mu\le102.940$.

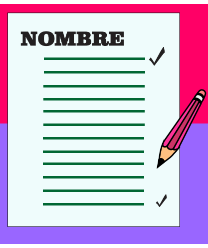
9. a. 90%. $27.588<\mu\le29.043$. **b.** $27.418<\mu\le29.182$. **c.** $27.139<\mu\le29.461$.

10. a. $75.82\le\mu\le78.89$. **b.** $75.180\le\mu\le80.41$. **11. a.** $164.1812\le\mu\le165.8185$. **b.** $164.3123\le\mu\le165.6875$. **12.** $150.5323\le\mu\le153.4677$. **13. a.** $0.208<p<0.292$. **b.** $0.218<p<0.282$. **c.** $0.571<p<0.629$. **14. a.** $0.63445\le p\le0.70555$. **b.** $e=.03555$. **15. a.** $0.02282<p<0.5718$. **b.** $e=0.01718$. **16.** $0.0432<p<0.3568$. **17. a.** $e=0.1603$ **b.** $0.6139<p<0.6897$. **18. a.** $0.392<p<0.528$. **b.** $0.4<p<0.52$. **19. a.** $0.8326<p<0.9073$. **b.** $0.8349<p<0.9051$. **20. a.** $0.3131<p<0.4884$. **b.** $0.286<p<0.5160$. **21. a.** 811. **b.** $3.5587<p<3.6413$. **22.** $n=66348$. **23.** $n=34635$. **24. a.** $n=1472$. **b.** $n=1691$. **25.** $n=7663$. **26. a.** 95%. **b.** 91.64%. **27.** $(1-\alpha)100\%=96.8\%$. **28.** $(1-\alpha)100\%=92.81\%$

SECCIÓN 3.2

1. a. Unilateral izquierda. **b.** Unilateral derecha. **c.** Bilateral. **d.** Unilateral izquierda o bilateral. **e.** Unilateral izquierda. **f.** Unilateral izquierda o bilateral. **g.** Unilateral derecha o bilateral. **h.** Bilateral.

2. a. $H_0 : \mu_0 = 7.83$, $H_a : \mu_a \neq 7.83$. **b.** $H_0 : \mu_0 = 7.83$, $H_a : \mu_a < 7.83$. **c.** $H_0 : \mu_0 = 7.83$, $H_a : \mu_a > 7.83$. **3.** $H_0 : p_0 = 0.373$, $H_a : p_a \neq 0.373$. **4. a.** y **d.** incluyen parámetros. **5. b.**, **c.** y **d.** están mal planteadas. **6. a.** Siendo el viagra eficaz y rechazando la afirmación. **b.** Que el viagra no sea eficaz y aceptando la afirmación. **7. a.** Rechazando la afirmación "al menos el 40% de los estudiantes del quinto semestre de esa escuela, es irregular" siendo verdadera. **b.** Aceptando la afirmación "al menos el 40% de los estudiantes del quinto semestre de esa escuela, es irregular" siendo verdadera. **9. a.** Qué el curso gratuito es efectivo. **b.** Qué el curso gratuito no es efectivo. **10. a.** 0.9877. **b.** 0.3828.**12. a.** 0.4199. **b.** 0.3529. **13. a.** 0.0087. **b.** 0.2776. **14. a.** 0.9808. **b.** 0.1151. **15. a.** 0.943. **b.** 0.570. **16.** $z = 39.89$, rechazar H_0. **17.** $z = -3.98$ **a.** Rechazar H_0. **b.** Rechazar. H_0. **18.** $z = 3.01$. **a.** Rechazar H_0. **b.** Rechazar H_0. **19. a.** Rechazar H_0 . **b.** Rechazar H_0. **c.** $\alpha = 0.0226$. **20. a.** No rechazar H_0 . **b.** No rechazar H_0. **c.** 28.2%. **21. a.** No rechazar H_0 . **b.** No rechazar H_0. **22. a.** No rechazar H_0 . **b.** No rechazar H_0. **c.** No rechazar H_0. **d.** No rechazar H_0. **d.** 28.33%. **23. a.** No rechazar H_0. **b.** 13.76%. **24. a.** Rechazar H_0 . **b.** Rechazar H_0. **25. a.** No rechazar H_0. **b.** $\alpha = 0.3260$. **26. a.** No rechazar H_0. **b.** $\alpha = 0.0727$. **27. a.** Rechazar H_0. **b.** Rechazar H_0. **c.** $\alpha = 0.0226$.



B.2 SOLUCIONES A LA AUTOEVALUACIÓN

UNIDAD 1

COMPLETA LOS ESPACIOS

1. ***variable*. 2. *variables aleatorias*. 3. *conjunto finito de números*. 4. *asigna al evento*** A ***el número real*** x **.**

5. $f_X(x_i)$. **6. L*a función de distribución de probabilidades y la función de distribución acumulada*.7. *ser no negativa*. 8. *sumando*. 9. *parámetros*. 10. *parámetros*. 11. *valor que asumirá*. 12. *promedio*. 13. *dispersión*. 14. *"número de éxitos en*** n ***ensayos independientes"*. 15. *variable aleatoria continua*. 16. *cero*. 17. *función de distribución acumulada*. 18. *parámetros*. 19. *centro*. 20. *agudez*. 21. *altura*.**

CIERTO O FALSO

1. F. 2. C. 3. F. 4. C. 5. C. 6. C. 7. C. 8. F. 9. F. 10. C. 11. C. 12. C. 13. C. 14. C. 15. F. 16. C. 17. C. 18. F. 19. C. 20. C. 21. F. 22, F. 23. F. 24. C. 25. C. 26. C. 27. C. 28. F. 29. F. 30. C.

PROBLEMAS PROPUESTOS

1. a. $f_X(x)=0.25$ si $X=-3,\ -1,\ 1,\ 3$. **b.** $F(x)=\begin{cases} 0 & si & x<-3 \\ 0.25 & si & -3\le X<-1 \\ 0.50 & si & -1\le X<1 \\ 0.75 & si & 1\le X<3 \\ 1 & si & X\ge 1 \end{cases}$. **c.** $E[X]=0$. **d.** $V[X]=5$. **e.** $p(-2\le X\le 1)=F(1)-F(-1)=0.75-0.50=0.25$. **f.** $p(-2<X\le 1)=F(1)-F(-1)=0.75-0.50=0.25$. **g.** $p(-2\le X<1)=F(-1)-F(-1)=0.50-0.50=0.25$. **h.** $p(X<1)=F(-1)=0.50=0.25$. **i.** $p(X\ge 1)=1-p(X<1)=1-F(-1)=1-0.25=0.75$. **j.** $p(X\le 1)=F(1)=0.75$. **k.** $p(X=1)=F(1)-F(-1)=0.75-0.50=0.25$.

2. a.

X	-5	-2	2
$f_X(x)$	0.2	0.4	0.4

b. La fdp $f_X(x)=\begin{cases}0.2 & X=-5\\ 0.4 & X=-2\\ 0.4 & X=2\end{cases}$ **c.** $E[X]=1$. **d.** $V[X]=11.2$ y $DE.[X]=3.346$. **e.** $p(-2\le X\le 3)=F(3)-F(-1)=1-0.6=0.4$. **f.** $p(-2<X\le 2)=F(2)-F(-1)=1-0.6=0.4$. **g.** $p(-2\le X<3)=F(2)-F(-1)=1-0.6=0.4$. **h.** $p(X<2)=F(1)=0.6$. **i.** $p(X\ge 2)=1-p(X\le 1)=1-0.6=0.4$. **j.** $p(X<2)=F(1)=0.6$. **k.** $p(X=2)=F(2)-F(1)=1-0.6=0.4$.

3. Sea $X\sim b(x,6,0.40)$ **a.** $X=0,1,2,3,4,5,6$. **b.** $f_X(x)=C_x^6(0.40)^x(0.60)^{6-x}$ si $X=0,1,2,3,4,5,6$. **c.** $F(x)=\sum_{k=0}^{x}C_k^6(0.40)^k(0.60)^{6-k}$.**d.** $E[X]=(6)(0.40)=2.4$. **e.** $V[X]=(6)(0.40)(0.60)=1.44$ y $DE[X]=1.2$. **f.** 0.9590. **g.** 0.0410. **h.** 0.0349. **i.** 0.4516. **j.** 0.0041.**k.** 0.4547. **4. a.** 0.1935. **b.** 0.4642. **c.** 0.0007. **d.** 1. **5. a.** 157.5. **b.** 145. **c.** 116.75. **6. a.** 6.62. **b.** 6.73.**7. a.** $p(X<6.3)=0.1977$. **b.** $p(X>3.2)=0.9573$.

UNIDAD 2

COMPLETA LOS ESPACIOS

1. ***inferencia***. **2.** ***representativas***. **3.** ***sin reemplazo***. **4.** ***inferencia estadística***. **5.** ***estadísticas***. **6.** ***parámetros***. **7.** ***parámetros***. **8.** ***aleatorias***. **9.** ***muestra aleatoria simple***. **10.** ***números aleatorios***. **11.** ***probabilidades***. **12.** ***media aritmética***. **13.** ***proporción***. **14.** ***límite central***. **15.** ***límite central***, ***convergencia***.

CIERTO O FALSO

1. C. 2. C. 3. F. 4. C. 5. F. 6. F. 7. F. 8. F. 9. F. 10. C. 11. C. 12. C. 13. C. 14. F. 15. F. 16. C. 17. C. 18. F. 19. F. 20. C. 21. F.

PROBLEMAS PROPUESTOS

1. **a.** $\mu_{\overline{X}}=80$ y $\sigma_{\overline{X}}=0.40$.

b. $\mu_{\overline{X}}=150$ y $\sigma_{\overline{X}}=0.3536$.

c. $\mu_{\overline{X}}=203$ y $\sigma_{\overline{X}}=0.36$.

2. **a.** $\mu_P=0.45$ y $\sigma_P=.0553$.

b. $\mu_P=0.50$ y $\sigma_p=0.05$.

c. $\mu_P=0.65$ y $\sigma_P=0.025$

d. $\mu_P=0.85$ y $\sigma_P=0.0143$.

3. Si $\mu = 3.0$, $\sigma = 1$ y $n = 81$.

a. 0.1806. **b.** 0.0035.

c. 0.1841. **d.** $\bar{x}_0 = 2.7415$.

e. $\bar{x}_0 = 3.183$. **f.** $\bar{x}_0 = 2.772$.

4.

a. 0.0006. **b.** 0.0694.

c. 0. **d.** 0.2206.

e. 0.2206.

UNIDAD 3

COMPLETA LOS ESPACIOS

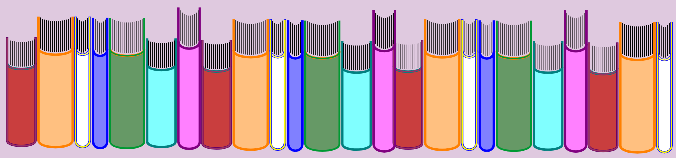
1. ***inferencia estadística***. **2.** ***Inferencia***. **3.** ***estimador*** $\hat{\Theta}$. **4.** ***parámetro objetivo*** y ser lo ***menos***. **5.** ***contener***. **6.** ***incrementa***. **7.** ***nivel de confianza*** . **8.** ***error máximo***. **9.** ***varianza poblacional*** .**10.** ***media y para la proporción***. **11.** ***suposiciones***. **12.** **Las *pruebas de hipótesis***. **13.** ***muestras aleatorias simples***. **14.** ***rechazarla***. **15.** ***hipótesis nula***. **16.** ***negación***. **17.** ***región de rechazo o región crítica***. **18.** ***del estadístico de prueba***. **19.** ***nivel de significancia***. **20.** ***error tipo dos***. **21.** ***hipótesis alternativa***. **22.** ***desigualdad***.

CIERTO O FALSO

1. F. 2. C. 3. F. 4. C. 5. C. 6. C. 7. F. 8. F. 9. C. 10. F. 11. F. 12. F. 13. F. 14. C. 15. C. 16. C. 17. F. 18. F. 19. C. 20. F. 21. C. 22, F. 23. C.

PROBLEMAS PROPUESTOS

1. a. $L_i = 1.7$ y $L_s = 4.2$. **b.** 98%. **c.** $L = 2.5$. **2.** $23.58 < \mu < 23.85$. **3. a.** $E_{Máx} = 1.2$. **b.** 92.82%. **4. a.** $E_{Máx} = 0.6$. **b.** 30. **5. a.** $E_{Máx} = 0.15$. **b.** 91%. **6. a.** $E_{Máx} = 0.16$. **b.** $n = 53$.**7. a.** 0.0027. **b.** 0.9967. **8. a.** 0.3065. **b.** 0.6179. **9. a.** 0.0016. **b.** 0.9084.**10.** Rechazar H_0 en favor de H_a: $\mu \neq 125$. **11.** 6.68%. **12.** 4.95%.**13.** No se rechaza H_0: $p = 0.74$, se requieren mayores evidencias. **14.** No se rechaza H_0: $p = 0.38$ al nivel de significación del 4%.**15.** 5%.



BIBLIOGRAFÍA

Christensen, H. (1997)	*Estadística paso a paso.*	Trillas.
Chao, L. (1987)	*Introducción a la Estadística.*	CECSA.
Triola, M., (2018)	*Estadística (12 ed.).*	Pearson.
Mendenhall, W. (2014)	*Introducción a la probabilidad y a la estadística.*	Cengage Learning.
Mendenhall, W. (2010)	*Estadística matemática con aplicaciones (10a ed).*	Cengage. Learning
Johnson, R. (2008)	*Estadística Elemental (10a ed.)*	Cengage Learning.
Walpole, R. (2012)	*Probabilidad y Estadística para Ingeniería y ciencias (9a ed.).*	Pearson Educación.
Devore, J. (2008)	*Probabilidad y Estadística para ingeniería y ciencias (7a ed.).*	Itemex.