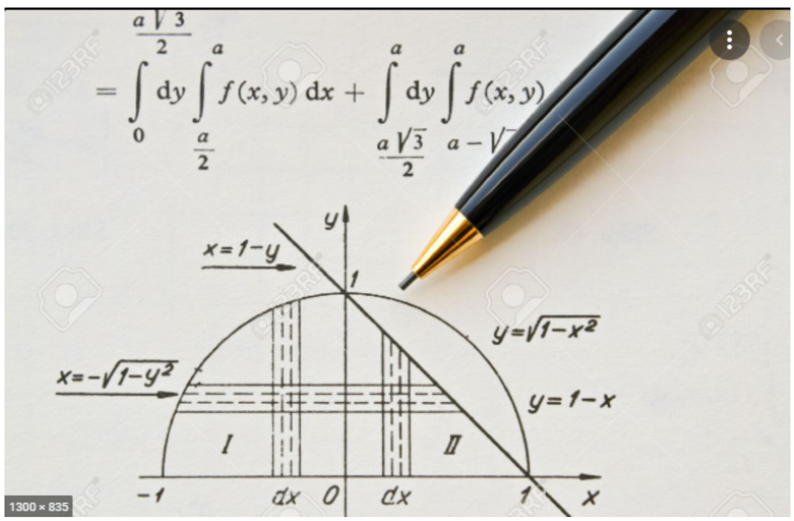
UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MÉXICO
COLEGIO DE CIENCIAS Y HUMANIDADES
PLANTEL ORIENTE

Cuaderno de Trabajo
Cálculo Diferencial e Integral II

CAMPO III. DISEÑO Y ELABORACIÓN DE MATERIALES DIDÁCTICOS PERTINENTES CON LOS PROGRAMAS DE ESTUDIO VIGENTES.



Grupo 401-C

Profesores

Francisco Javier Rodríguez Pérez (Coordinador)
Leticia Aguilar Pascual (Coordinadora)
José Germán Ávila Vicenteño
Juan Humberto Zendejo Sánchez
Ivonne Zenteno Canela

Ed. 2021

Índice General

PRESENTACIÓN

El presente trabajo se desarrolla acorde a los contenidos y aprendizajes del programa de estudios de Cálculo Diferencial e Integral II que se imparte en el Colegio de Ciencias y Humanidades de la UNAM.
Al inicio del documento se anexa el temario del curso y al principio de cada unidad se escribe el propósito general, los aprendizajes correspondientes y las estrategias sugeridas.

El presente documento integra ejercicios en un orden acorde a los aprendizajes de cada unidad y que el alumno debe resolver con apoyo del Profesor. Para ello el alumno debe tener hojas extras o un cuaderno para escribir los desarrollos correspondientes a cada uno de los ejercicios, aunque lo usual sería que al final del presente cuaderno de trabajo se insertaran hojas en blanco, pero tendríamos un ejemplar poco manejable.

Considerando que los ejercicios se ajustan, como ya se mencionó, al programa de estudios, sobra incluir los resultados de cada uno de estos.

La estructura del cuaderno de trabajo no considera un desarrollo por clase, esto depende del ritmo del curso desarrollado. Para apoyarlo, se recomienda utilizar trabajos editados con antelación por nuestro grupo de trabajo, en particular el texto denominado *Cálculo Diferencial e Integral II*.

Los ejercicios de cada unidad se diseñaron con base en la concepción derivada de las discusiones académicas en el grupo de trabajo.

INTRODUCCIÓN

Para describir brevemente el trabajo realizado, conviene mencionar que, de las reuniones realizadas por el grupo de trabajo y las conclusiones obtenidas, después de discutir en varias ocasiones sobre la necesidad de introducir diferentes temáticas complementarias en cada unidad.

En la Unidad 1 es importante manejar diversos tipos de límite para funciones trigonométricas, además se debe incidir en las temáticas relacionadas con las funciones logaritmo y exponencial, en particular tratarlas con más detalle y en consecuencia trabajar con varios ejercicios al respecto, pues en muchas ocasiones los alumnos no conocen con certeza estos contenidos.

Otro aspecto importante que se trató en el presente trabajo es la importancia de valorar y discutir el caso de las funciones inversas trigonométricas, ya que se utilizarán posteriormente. De modo que uno de los puntos a revisar y adecuar es la introducción de ejercicios y resultados relativos a dichas funciones.

Respecto a la Unidad 2, podemos decir que se discutió el orden propuesto de las unidades correspondientes a Integral definida e indefinida y la posibilidad de proponer otra forma de abordarlas. Es también importante trabajar lo correspondiente al tema particular de *sumatorias,* porque los profesores de este grupo han descrito que en sus experiencias, los alumnos lo consideran como una lista de fórmulas olvidando lo importante que es analizar el comportamiento de dichos procesos. Esto reduce el tiempo para tratar el área bajo la curva descrita por la gráfica de una función, en particular la posibilidad de tratar con detalle el caso de funciones crecientes, decrecientes o bien monótonas en general.

Para la Unidad 3 consideramos conveniente trabajar los métodos de integración usando sustitución trigonométrica y un esbozo de integración usando racionalización para la expresión de ciertas funciones.

Un caso aparte y muy especial, es el de la Unidad 4. Es importante que los alumnos obtengan una familiarización con las ecuaciones diferenciales en general y no limitarlos a tratar únicamente el caso de aquéllas con solución exponencial, sin embargo, se propuso que se revise esta unidad para valorar la posibilidad de incidir en una reestructuración del programa de estudios.

Respecto a los ejercicios propuestos en este documento, consideramos que no es posible estructurarlos en forma tajante de acuerdo con un determinado aprendizaje, ya que cada uno de ellos se relaciona con más de uno. En este sentido, creemos que parte del desarrollo de un curso como lo es cálculo, es permitir que éste sea maleable y que se adapte a las necesidades de cada docente, por ello consideramos importante que este cuaderno se publique próximamente.

SOBRE EL USO DE ESTE CUADERNO DE TRABAJO (GUÍA)

Para el uso de este cuaderno el alumno deberá tener siempre el apoyo de un Profesor o un asesor de la asignatura. Es importante que el alumno, como se dijo anteriormente, cuente con un cuaderno en el cual pueda escribir todos los desarrollos necesarios en cada ejercicio.

La mayoría de los ejercicios requieren apoyo gráfico, por lo que se sugiere que el alumno se auxilie de un software como *Geogebra,* que además de amigable es un software libre y adaptable a los dispositivos con los que cuente el alumno. Es importante notar que en este software el alumno puede verificar los resultados obtenidos al menos para las primeras 3 unidades.

SOBRE LA EVALUACIÓN

Si el trabajo se utiliza en un curso y se requiere evaluar, se sugiere que se realice de la siguiente manera:

La *evaluación diagnóstica* podrá observarse cuando el alumno manifieste en forma de dudas, propuestas o precisiones, la incertidumbre que le cause el desarrollo de los ejercicios de introducción en cada unidad.

Por otro lado, las actividades realizadas en el cuaderno de trabajo por el alumno deberán considerarse como una *evaluación formativa*. Para el caso de una *evaluación sumativa*, se integra el examen sugerido en cada unidad

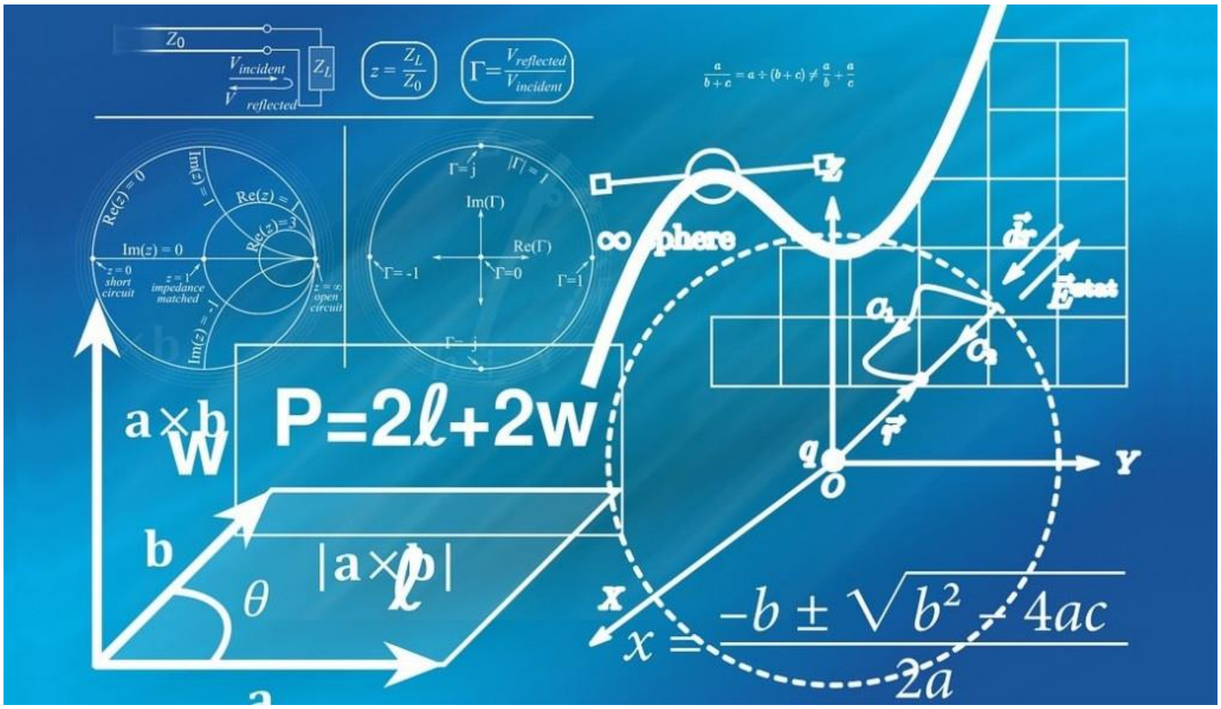
La **valoración** que el Profesor haga sobre los resultados obtenidos al usar este Cuaderno de trabajo permitirá adecuar la estructura de éste, y así optimizarlo.

En la realización del trabajo se presentaron algunas inquietudes en lo que se refiere al contenido del programa y su estructura, creemos que es una valoración que provoca inquietud, se propuso trabajar en esto, para presentar una propuesta del mismo.

También podrá auxiliarse con las formas de evaluación sugeridas anteriormente, y podrá realizar una revisión continua de las actividades que decida implementar para, si lo considera conveniente, adecuarlas al desarrollo de la clase con la finalidad de que el proceso enseñanza-aprendizaje se vea fortalecido.

GRUPO DE TRABAJO 401C

Unidad 1



Derivada de funciones trascendentes

Índice

Unidad 1. Derivada de funciones trascendentes

Unidad 1. Derivadas de funciones trascendentes

Propósito. El alumno ampliará su conocimiento de la derivada, de las funciones trigonométricas, logarítmicas y exponenciales y reforzará el estudio de la variación al resolver problemas que se modelen con ellas.

Aprendizajes

- Relaciona en diversos contextos la variación de las funciones seno y coseno a través de procedimientos gráfico, numérico o algebraico.
- Reconoce que las derivadas de las funciones trigonométricas involucran variación periódica.
- Utiliza las derivadas de las funciones seno y coseno, y reglas de derivación para obtener las derivadas de las funciones: tangente, cotangente, secante y cosecante
- Utiliza la regla de la cadena para derivar funciones trigonométricas compuestas
- Aplica las derivadas de funciones trigonométricas a problemas en diversos contextos
- Relaciona en diversos contextos la variación de funciones exponenciales a través de procedimientos gráficos, numéricos o algebraicos.
- Infiere la derivada de las funciones logarítmicas.
- Utiliza la regla de la cadena para obtener la derivada de funciones exponenciales y logarítmicas compuestas.
- Aplica la derivada a funciones exponenciales y logarítmicas a problemas en diversos contextos.

ESTRATEGÍA PARA LA UNIDAD I

Se recomienda que antes de encontrar las expresiones de las derivadas de las funciones armónicas $f(x) = senx$ y $f(x) = \cos x$ es importante trabajar los límites requeridos en los algoritmos para encontrar dichas derivadas, en particular $\lim_{x \to 0} \frac{senx}{x}$

Para derivar se propone utilizar el proceso de Leibnitz-Newton. Se sugiere trabajar ejercicios de funciones que contengan diferentes funciones armónicas. En esta serie de ejercicios se desarrollan la algoritmia para derivar funciones armónicas y aplicaciones que involucren una interpretación geométrica, así como aplicaciones a la física. Se recomienda resolverlos en clase con apoyo del Profesor.

Una vez obtenidas las derivadas de las funciones armónicas con ayuda de las relaciones trigonométricas y la derivada del cociente adecuado, podemos determinar las derivadas de las restantes funciones trigonométricas. Se sugiere que sea a través de este método y no formalizar utilizando el cálculo de límites, en este curso no se tiene por objetivo que el alumno se apropie de procedimientos de demostración y sí del manejo algorítmico de las fórmulas de derivadas. Se deberán manejar las expresiones de derivada cuando el argumento es otra función *u*(*x*), utilizando la regla de la cadena. Es importante que el alumno realice un resumen de las fórmulas de derivadas de funciones trascendentes y que las plasme en una tabla que siempre la tenga a la mano.

Para derivar las funciones logarítmicas y exponenciales, se debe realizar un repaso de la definición de logaritmo, retomar el concepto de la función logarítmica cuya base es *a;* es decir $f(x)=\log_a x$ y así construir la función $f(x)=a^x$. Es importante el repaso del número e, expresar el logaritmo en esta base (logaritmo natural) y establecer el dominio de estas funciones para cualquier base.

De manera didáctica es conveniente encontrar primero la derivada de la función logaritmo natural y la de cualquier base, aunque no necesariamente, utilizar Leibnitz-Newton, En consecuencia, obtener la derivada de las funciones exponenciales en cualquier base. Del mismo modo realizar derivadas cuando el argumento es $u(x)$.

1.1 Problemas de Introducción

A manera de introducción vamos a relacionar en diversos contextos la variación de las funciones seno y coseno a través de procedimientos gráficos, numéricos o algebraico.

Inicialmente contestaremos las siguientes preguntas para conocer las funciones trascendentes

1. ¿Qué es una función trascendente?
2. ¿Cuáles son las funciones trascendentes?

Funciones trigonométricas

Para introducir a las funciones trigonométricas vamos a trabajar con las funciones $f(x) = senx$ y $f(x) = cosx$

Escribir todas las funciones trigonométricas siguientes en términos de las funciones seno y coseno.

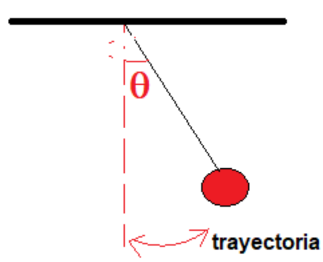
Ahora, vamos a trabajar las siguientes actividades

Ejercicio 1. Utilizando un graficador (Por ejemplo, GeoGebra), graficar las funciones $f(t) = sent$ y

$f(t) = \cos t$

Ahora consideremos dos ejemplos de *Movimiento armónico simple*, un péndulo simple (ver figura 1) y un objeto sujeto a un resorte oscilando (ver figura 2)

Vamos a analizar las funciones de oscilación

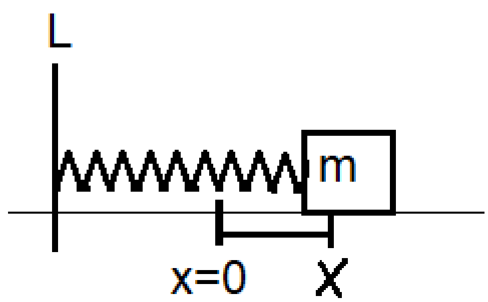
 Figura 1	Un objeto cuelga de una cuerda vertical sujeta en la parte superior, se desplaza un ángulo θ respecto a la horizontal. El objeto comienza a oscilar alrededor de la línea vertical. Su movimiento esta dado por la función $\theta(t) = 4sen(t + \frac{\pi}{3})$ Donde *t* es la variable tiempo y θ es el desplazamiento angular.

Ejercicio 2. Graficar la función $\theta(t) = 4sen(t + \frac{\pi}{3})$ y compararla con la función $f(t) = sent$. Utilizar t en segundos y la variable dependiente en radianes. Es

importante que se realice una tabulación. Con ello tendríamos las representaciones tabulares, gráfica y “algebraica”

2a) Escribir las diferencias
2b) ¿Cuál es la amplitud del movimiento? (Oscilación máxima)
2c) ¿El movimiento se repite? ¿Cada cuanto tiempo? (Periodo)
2d) Al inicio del movimiento $t=0$. ¿Qué diferencia existe? (Fase)

Ahora consideremos un resorte oscilando

 Figura 2	Un objeto de masa m está amarrado a un resorte, se estira el resorte y comienza a realizar un movimiento oscilatorio horizontal. Su movimiento esta dado por la función $x(t)=4\cos(t+\frac{\pi}{2})$ Donde *t* es la variable tiempo y x es el desplazamiento angular.

Ejercicio 3. Graficar las funciones en la misma imagen $x(t)=4\cos(t+\frac{\pi}{2})$ y compararla con la función $f(t)=\cos t$. Utilizar t en segundos y la variable dependiente en cm. Es importante que se realice una tabulación, ésta además de la gráfica y “algebraica”

3a) Escribir las diferencias
3b) ¿Cuál es la amplitud del movimiento? (Oscilación máxima)
3c) ¿El movimiento se repite? ¿Cada cuánto tiempo? (Periodo)
3d) Al inicio del movimiento $t=0$. ¿Qué diferencia existe entre las funciones? (Fase)

Reconoce que las derivadas de las funciones trigonométricas involucran variación periódica.

Observar que en ambos casos son gráficos repetitivos, esto es son PERIODICOS.

1.2 Derivadas de Funciones Trigonométricas

Vamos a obtener la derivada de las funciones trigonométricas

Recordemos que la derivada de una función se puede obtener utilizando la formulación de Fermat o la de Newton Leibnitz.

Es opcional cualquiera de las formulaciones. En este trabajo utilizaremos la de Leibnitz-Newton, a saber

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Antes de tratar de obtener alguna de las derivadas mencionadas, debemos obtener los siguientes límites:

$$\lim_{x \to 0} \frac{sen\ x}{x} = 1 \qquad \lim_{x \to 0} \frac{\cos x - 1}{x} = 0$$

Para determinar el límite $\lim_{x \to 0} \frac{senx}{x}$, primero construyamos una tabla donde se puede ver en forma más ó menos evidente el comportamiento de $\frac{senx}{x}$ cuando x tiende a cero:

Ejercicio 4. Llenar la siguiente tabla

$x(rad)$	**-0.1**	**-0.01**	**-.0001**	**0**	**0.001**	**0.01**	**0.1**	**1**
$\frac{sen\ x}{x}$								

De esta tabla se puede observar que conforme x tiende a cero por la izquierda y por la derecha, $\frac{sen\ x}{x}$ tiende a 1. Intuitivamente, entonces, podemos concluir que:

$$\lim_{x \to 0} \frac{sen\ x}{x} = \_\_\_\_\_\_$$

Para determinar el límite $\lim_{x \to 0} \frac{\cos x - 1}{x}$, primero construyamos una tabla donde se puede ver en forma más ó menos evidente el comportamiento de $\frac{\cos x - 1}{x}$ cuando x tiende a cero:

Ejercicio 5. Llenar la siguiente tabla

$x(rad)$	**-0.1**	**-0.01**	**-.0001**	**0**	**0.001**	**0.01**	**0.1**	**1**
$\frac{\cos x - 1}{x}$								

De esta tabla se puede observar que conforme x tiende a cero por la izquierda y por la derecha, $\frac{\cos x-1}{x}$ tiende a 0. Intuitivamente, entonces, podemos concluir que:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x}=\_\_\_\_\_\_$$

DERIVADA DE LA FUNCION $f(x)=senx$

De acuerdo con la definición de derivada y utilizando la notación de Leibnitz

$$\frac{df(x)}{dx}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

Así como las relaciones trigonométricas

$$sen(a+b)=sena\cos b+senb\cos a$$

$$\cos(a+b)=\cos a\cos b-senasenb$$

Ejercicio 6. Demostrar que la derivada de la función $f(x)=senx$ es $\frac{dsenx}{dx}=\cos x$

Ejercicio 7. Demostrar que la derivada de la función $f(x)=\cos x$ es $\frac{d\cos x}{dx}=-senx$

3.1 Fórmulas de Derivación

Vamos a repasar fórmulas de derivación establecidas hasta el momento

1. $\frac{dc}{dx}=0$ 2. $\frac{dx}{dx}=1$ 3. $\frac{dcx}{dx}=c$ c=constante

4. $\frac{d\left(u(x)\pm \mathrm{v}(x)\right)}{dx}=\frac{du(x)}{dx}\pm\frac{d\mathrm{v}(x)}{dx}$

5. $\frac{d\left(u(x)\mathrm{v}(x)\right)}{dx}=u(x)\frac{d\mathrm{v}(x)}{dx}+\mathrm{v}(x)\frac{du(x)}{dx}$

6. $\frac{d\left(\frac{u(x)}{\mathrm{v}(x)}\right)}{dx}=\frac{\mathrm{v}(x)\frac{du(x)}{dx}-u(x)\frac{d\mathrm{v}(x)}{dx}}{\left[\mathrm{v}(x)\right]^2}$

7. $\dfrac{du^n(x)}{dx} = nu^{n-1}(x)\dfrac{du(x)}{dx}$

8. $\dfrac{df(u(x))}{dx} = \dfrac{df(u)}{du}\dfrac{du(x)}{dx}$ regla de la cadena

9. $\dfrac{d\sqrt{f(x)}}{dx} = \dfrac{\dfrac{df(x)}{dx}}{2\sqrt{f(x)}}$

10. $\dfrac{dsenx}{dx} = \cos x$

11. $\dfrac{d\cos x}{dx} = -senx$

1.4. Ejercicios de Derivadas

Ejercicio 8. Derivar las siguientes funciones

8.1) $f(x) = -5x^3 + \dfrac{2}{3}x^2 + 3x - 6$ Resp. ____________________________

8.2) $y = (5x-3)^2(3x^2-5)$ Resp.____________________________

8.3) $y = 4x\cos x$ Resp.____________________________

8.4) $y = \dfrac{3x^2 - senx}{2x}$ Resp____________________________

8.5) $y = \sqrt{4 - 5\cos x}$ Resp____________________________

8.6) $y = \dfrac{\sqrt{3senx}}{\cos x}$ Resp.____________________________

8.7) $y = \dfrac{senx}{\cos x}$ Resp____________________________

8.8) $y = \dfrac{cosx}{senx}$ Resp____________________________

8.9) $y = \dfrac{1}{senx}$ Resp____________________________

8.10) $y = \dfrac{1}{\cos x}$ Resp____________________________

Ejercicio 9. Antes de continuar, debemos escribir las funciones trigonométricas siguientes

$$f(x) = \tan x,\quad g(x) = \cot anx,\qquad h(x) = \sec x \quad \text{y} \quad m(x) = \cos ecx$$

en términos de las funciones $f(x) = senx$ y $f(x) = \cos x$

___

___

Ejercicio 10. Encontrar la derivada de cada una de las siguientes funciones

10.1) $f(x) = \tan x$ Resp___

10.2) $g(x) = \cot anx$ Resp.___

10.3) $h(x) = \sec x$ Resp.___

10.4) $m(x) = \cos ecx$ Resp___

Sugerencia. Utilizar en cada función las expresiones obtenidas en el Ejercicio 9 y obtener las fórmulas de derivación.

1.5 Regla de la cadena para derivar funciones trigonométricas compuestas

Recordemos la regla de la cadena con ejemplos con funciones trigonométricas

Sea $g\ (x) = \cos u(x)$ y $u(x) = 3x^2 - 2x$ la función $g(u(x))$ es:

$$g(u) = g(3\quad x^2 - 2x) = \cos(3x^2 - 2x)$$

Vamos a representar algunos elementos en la expresión del tipo $g(x) = \cos(3x^2 - 2x)$

La variable x es la variable independiente, a la expresión $\left(3x^2 - 2x\right)$ le llamaremos argumento de la función *coseno.* En otras palabras, toda función trigonométrica tiene un argumento.

El argumento de una función trigonométrica tiene unidades grados o radianes. Generalmente en cálculo se manejan las unidades radianes par encontrar el valor de una función para cierto valor de la variable independiente.

1.6 Ejercicios usando la regla de la cadena

Ejemplo. Derivar la función $f(x) = sen(3x^2 - 5x)$

Solución. Para derivar la función dada, vamos a usar la regla de la cadena

Utilizamos $u(x)=3x^2-5x$, podemos escribir $f\left(u\right) = senu$; la derivada es

$$\frac{df(u)}{dx}=\frac{df}{du}\frac{du}{dx}=\frac{d\cos u}{du}\frac{d\left(3x^2-5x\right)}{dx}=-senu(6x-5)=-(6x-5)sen(3x^2-5)$$

Observar que el argumento de la función es $u\left(x\right)=3x^2-5x$ y la derivada de este $\frac{d\left(3x^2-5x\right)}{dx}=6x-5$ no corresponde al argumento. Es conveniente escribirlo al inicio de la expresión derivada. Observar

$$\frac{df(u)}{dx}=\frac{df}{du}\frac{du}{dx}=\frac{d\cos u}{du}\frac{d\left(3x^2-5x\right)}{dx}=-senu(6x-5)=-(6x-5)sen(3x^2-5)$$

Ejercicio 11. Encontrar la derivada de las siguientes funciones

11.1) $f(x)=\cos 2x$ Resp.________________________

11.2) $f(x)=2x^2+sen5x$ Resp._ ______________________

11.3) $y=-x^2-sen\frac{2}{x}$ Resp.________________________

11.4) $g(x)=\frac{sen3x}{\tan 3x}$ Resp. ________________________

11.5) $h(x)=x^2\tan(x-1)-senx^2$ Reps________________________

11.6) $y=x\csc 4x-2\tan 3x$ Resp.________________________

11.7) $f(x)=sen^3(2x^2)$ Resp________________________

11.8) $\rho=\sqrt{sen\theta}$ Resp________________________

11.9) $y=\frac{sen(x-1)}{1+\cos x^2}$ Resp________________________

11.10) $h(t)=sen^3t\cdot\cos t$ Resp________________________

11.11) $y=\frac{1}{4}\cot an8x$ Resp________________________

11.12) $f(x)=\tan\left(ax+b\right)$; a,b constantes Resp________________________

11.13) $r=2sen^3\frac{\varphi}{3}$ Resp________________________

11.14) $y=\dfrac{2x+1}{sen4x}$ Resp____________________________

1.7 Aplicación a problemas que involucran funciones trigonométricas

Ejercicio 12. Un objeto de masa m está suspendido en un péndulo simple, su movimiento esta dado por $\theta=1.5sen(4t-2)$ a) Graficar su movimiento b) Encontrar la magnitud de su velocidad (rapidez) y graficar en el intervalo (0,5) s, c) en la gráfica interior indicar en donde tiene rapidez máxima y d) encontrar su aceleración a cualquier tiempo.

Ejercicio 13. Un objeto está sujeto a un resorte y realiza un movimiento armónico simple cuya ecuación de movimiento es $x=5cos\left(3t+0.5\right)$. a) Encontrar su velocidad b) Graficar su aceleración, c) encontrar la posición máxima del resorte y el tiempo en el cual lo alcanza.

Ejercicio 14. Encontrar la ecuación de la recta tangente a la curva $y=5\cos(2x-3)$ en $x=0.6$

1.8 Funciones exponenciales y logarítmicas

Trabajaremos inicialmente con el concepto de logaritmo de un número

LOGARITMO BASE a

Consideremos un número real a que sea mayor que uno, y un número real positivo arbitrario b. Esto es $a,b\in\mathbb{R},\ a>1$ y $b>0$. $\mathbb{R}$ conjunto de los números reales.

En la siguiente expresión a^x (elevar el número a a una potencia x) establezcamos la siguiente pregunta; **¿Cuál debe ser el valor de x para qué $a^x=b$?**

En la expresión a^x, al número a (fijo) se le denomina base y al número x exponente del número a.

El número x se le denomina LOGARITMO DEL NUMERO b EN LA BASE a y se escribe de la siguiente manera:

$$\boxed{x=\log_a b}$$

Ejercicio 15. Encontrar el valor de los siguientes logaritmos

15.1) $\log_{10}1000$. Resp__________________

15.2) $log_8 64$ Resp__________________

15.13) $\log_3 81$ Resp__________________

LOGARITMO COMUN O BASE 10

Al logaritmo de base 10 se conoce como logaritmo común o vulgar.

Función logaritmo

Se puede construir una función de tal manera que a cada número positivo x le corresponda su logaritmo de base a, es decir

$$f(x) = \log_a x$$

A esta función se le llama FUNCION LOGARITMO DE BASE a, *cuyo dominio son todos los números reales positivos y su rango todos los números reales.*

Función exponencial

Por otra parte, una vez seleccionada la base a, se puede construir una función de tal manera que a cada número real x le corresponde el número a^x, esto es, se tendrá la función

$$f(x) = a^x$$

A esta función se le llama FUNCION EXPONENCIAL DE BASE a, *cuyo dominio son todos los números reales y su rango los números reales positivos*

Se define una función exponencial a expresiones del tipo $f(x) = a^x$ donde el parámetro a (base) es constante y el exponente x es la variable independiente.

Observar que la función $\log_a x = N$ ***es la función inversa de la función*** $f(x) = a^x$

Existe una base natural, llamada *e*, la cual corresponde al número obtenido de

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$$

Este límite visto en el tema de sucesiones es una función $f:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$ ($\mathbb{N}$ son los números naturales y $\mathbb{R}$ los números reales), definida por la regla de correspondencia mostrada. Este número es un número irracional ya que es un número cuya expresión decimal es un número infinito y no periódico.

Y el valor de dicho límite es $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 2.71828...$

Definimos las funciones exponencial y logarítmica con la base particular e, de la siguiente manera

Definición. La función LOGARITMO NATURAL se define como $f(x)=\log_e x = ln\ x$ y la FUNCION EXPONENCIAL ES $f(x)=e^x$.

1.9 Derivada de la función logaritmo y de la función exponencial

Vamos a desarrollar la obtención de la derivada de la función Usaremos la definición de derivada de Leibnitz-Newton

$$\frac{df(x)}{dx}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

Para derivar la función logaritmo natural $f(x)=Inx$; procedemos de la siguiente manera

$$:\ \frac{dInx}{dx}=\lim_{h\to 0}\frac{ln(x+h)-ln(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{ln(x+h)}{h}-\lim_{h\to 0}\frac{lnx}{h}$$

Recordemos que x es un número real positivo, entonces la expresión la vamos a multiplicar y dividir por x

$$\frac{dlnx}{dx}=x\cdot\frac{1}{x}\left[\lim_{\Delta x\to 0}\frac{ln(x+h)}{h}-\lim_{h\to 0}\frac{lnx}{h}\right]=\frac{1}{x}\lim_{h\to 0}\frac{x}{h}\left[ln(x+h)-lnx\right]$$

Hacemos uso de las siguientes propiedades de logaritmos

$$lna^p=p(lna) \quad \text{y} \quad ln\frac{a}{b}=lna-lnb$$

tenemos: $$\frac{dlnx}{dx}=\frac{1}{x}\lim_{h\to 0}\frac{x}{h}\left[ln(x+h)-lnx\right]=\frac{1}{x}\lim_{h\to 0}\frac{x}{h}ln\left(\frac{x+h}{x}\right)=\frac{1}{x}\lim_{h\to 0}ln\left(\frac{x+h}{x}\right)^{\frac{x}{h}}$$

En la expresión anterior podemos establecer lo siguiente:

Si $h\to 0$, entonces $z=\frac{x}{h}\to\infty$ ya que x es fijo respecto a *h* por lo tanto la expresión se puede escribir como:

$$\frac{dlnx}{dx}=\frac{1}{x}\lim_{h\to 0}ln\left(\frac{x+h}{x}\right)^{\frac{x}{h}}=\frac{1}{x}\lim_{h\to 0}ln\left[1+\frac{1}{\frac{x}{h}}\right]^{\frac{x}{\Delta x}}=\frac{1}{x}\lim_{z\to\infty}ln\left[1+\frac{1}{z}\right]^{z}$$

Por otro lado, una de las propiedades de límites establece lo siguiente:

Si f(x) es una función continua, entonces $\lim_{x\to a} f(x) = f\left(\lim_{x\to a} x\right)$; en nuestro caso, la función logaritmo natural es continua por lo tanto al aplicar esta propiedad se tiene

$$\frac{1}{x}\lim_{z\to\infty} ln\left[1+\frac{1}{z}\right]^z$$

De donde

$$\frac{1}{x}\lim_{z\to\infty} ln\left[1+\frac{1}{z}\right]^z = \frac{1}{x} ln\left[\lim_{z\to\infty}\left[1+\frac{1}{z}\right]^z\right] = \frac{1}{x} lne = \frac{1}{x}$$

Observar que el límite encerrado por los corchetes (paréntesis cuadrado) es similar al límite establecido para una sucesión, pero en este caso z es una variable no natural, sin embargo, el comportamiento del límite es análogo al del caso de la sucesión $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.

Finalmente, concluimos que $\frac{dlnx}{dx} = \frac{1}{x}$

Si tenemos una función $f(x) = lnu(x)$, de acuerdo a la regla de la cadena, su derivada será

$$\frac{d \ln u(x)}{dx} = \frac{1}{u(x)}\frac{du(x)}{dx}$$

Ejercicio 16. Encontrar las derivadas de las siguientes funciones

16.1) $f(x) = ln(3x^2 - 5x)$ Resp________________________

16.2) $f(x) = ln(sen3x)$ Resp________________________

16.3) $f(x) = ln\sqrt{3x^2 - 2x}$ Resp________________________

16.4) $f(x) = ln\frac{3x-2}{x}$ Resp________________________

16.5) $f(x) = ln(-20 + 3x^2 - 2x)$ Resp________________________

Derivada de $f(x) = a^x$, a número real positivo.

El procedimiento más simple para encontrar la derivada de la función $f(x) = a^x$ es realizar lo siguiente

Obtener el logaritmo natural de ambos lados de la expresión

$$lnf(x) = lna^x = x\left(lna\right) \quad \text{Propiedad de logaritmos}$$

Ahora derivar ambos lados de la expresión; en el lado izquierdo de la expresión se utiliza la regla de la cadena

$$\frac{dlnf(x)}{dx} = \frac{1}{f(x)}\frac{df(x)}{dx}$$

y la derivada del lado derecho es $\frac{dxlna}{dx} = lna\left(1\right)$, por lo tanto:

$$\frac{1}{f(x)}\frac{df(x)}{dx} = lna$$

de donde:

$$\frac{df(x)}{dx} = f(x)lna \quad \text{pero} \quad f(x) = a^x$$

por lo tanto

$$\frac{da^x}{dx} = a^x lna$$

1.10. Ejercicios de derivadas de funciones logarítmicas y exponenciales

Ejercicio 17. Escribir la expresión para la derivada de $f\left(x\right) = a^{u(x)}$

Resp_________________

Ejercicio 18. Encontrar la derivada de las siguientes funciones}

18.1) $f(x) = 4^{(3x^2-5x)}$ Resp________________________

18.2) $f(x) = 5^{(sen3x)}$ Resp________________________

18.3) $f(x) = 2^{\sqrt{3x^2-2x}}$ Resp________________________

18.4) $f(x) = 6^{\frac{3x-2}{x}}$ Resp________________________

18.5) $f(x) = 5^{(-20+3x^2-2x)}$ Resp________________________

Ahora nuestra pregunta es ¿Cuál la derivada de $f(x) = \log_a x$?

Procedemos de la siguiente manera:

Se tiene que $f(x) = \log_a x,$ entonces $a^{f(x)} = a^{\log_a x} = x$, esto es:

$$x = a^{f(x)}$$

Al obtener la derivada en ambos lados de la expresión se tiene:

$$1 = \frac{da^{f(x)}}{dx} = a^{f(x)} lna \frac{df(x)}{dx}$$

Observar que en el lado derecho se aplicó la expresión para derivar una función del tipo $f(x) = a^x$ y además se aplicó la regla de la cadena.

Despejando $\frac{df(x)}{dx}$ se tiene $\frac{df(x)}{dx} = \frac{1}{a^{f(x)} lna}$; por lo tanto:

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{d \log_a x}{dx} = \frac{1}{xlna}$$

Utilizando la relación de cambio de base para logaritmos $lny = \frac{\log_a y}{\log_a e}$ se tiene:

$$\frac{d \log_a x}{dx} = \frac{1}{xlna} = \frac{1}{x \frac{\log_a a}{\log_a e}} \quad \text{pero} \quad \log_a a = 1$$

por lo tanto

$$\frac{d \log_a x}{dx} = \frac{\log_a e}{x}$$

Ejercicio 19. Escribir la expresión para encontrar la derivada de $\frac{d \log_a u(x)}{dx}$

____

Ejercicio 20. Derivar las siguientes funciones

20.1) $f(x) = log_a(\cos 2x)$ Resp________________________

20.2) $f(x) = log_a(2x^2 + sen5x)$ Resp________________________

20.3) $y = log_a\left(-x^2 - sen\frac{2}{x}\right)$ Resp________________________

20.4) $g(x) = log_a\left(\frac{sen3x}{\tan 3x}\right)$ Resp________________________

Derivada de la función $f(x) = e^x$

Utilizamos la expresión $\frac{da^x}{dx} = a^x lna$ con $a = e$

Por lo tanto $\frac{de^x}{dx} = e^x lne$ pero $Ine = 1$ por lo tanto $\frac{de^x}{dx} = e^x lne$

Ejercicio 21. Escribir la expresión para derivar $f(x) = e^{u(x)}$

Resp___________________________________

Ejercicio 22. Derivar las siguientes funciones

22.1) $f(x) = e^{(\cos 2x)}$ Resp_________________________

22.2) $f(x) = e^{\left(2x^2 + sen5x\right)}$ Resp_________________________

22.3) $y = e^{\left(-sen\frac{2}{x}\right)}$ Resp_________________________

22.4) $g(x) = e^{5x^2 - 3x}$ Resp_________________________

22.5) $m(x) = e^{\left(x^2 - senx\right)}$ Resp_________________________

1.11 Problemas

Ejercicio 23. La carga eléctrica Q en un capacitor en un circuito serie RC (Resistencia capacitor) es una función que depende del tiempo. La corriente eléctrica I en el circuito se obtiene de la siguiente manera $I = \frac{dQ}{dt}$. Si la carga eléctrica en dicho circuito esta dada por la función $Q(t) = 1 - e^{-3t}$. Encontrar la expresión para la corriente eléctrica.

Ejercicio 24. Cierto fenómeno estadístico, se modela con una función denominada *Norma*l, dada por $f(x) = 4e^{-x^2}$. Encontrar las regiones donde esta función es creciente y donde es decreciente. Determinar el (los) puntos críticos y determinar si es máximo o mínimo.

Ejercicio 25. Encontrar la ecuación de la recta tangente a la curva $y = 2xe^{3x}$ en el punto x=3.

Área personal / Mis cursos / Calculo II / UNIDAD 1. DERIVADAS DE FUNCIONES TRASCENDENTES / EXAMEN PARCIAL / Vista previa

regunta **1**

Sin responder aún

untúa como 1,00

La derivada de $y = x^2(10^x)$ es:

- a. $y\acute{} = (x^2 In10 + 2x)$
- b. $y\acute{} = 10^x(xIn10 + 2x)$
- c. $y\acute{} = 10^x(x^2 In10 + 2x)$
- d. $y\acute{} = \frac{1}{10^x}(x^2 In10 + 2x)$
- e. $y\acute{} = 10^x(x^2 In10.2x)$

Pregunta **2**

Sin responder aún

Puntúa como 1,00

La derivada de la función $y = log_a(3x^2 + 5)$

- a. $y\acute{} = \frac{6x^2 log_a e}{3x+5}$
- b. $y\acute{} = 6Ina(3x^2 + 5)$
- c. $y\acute{} = \frac{6x}{Ina3x^2}$
- d. $y\acute{} = \frac{6xIna}{3x+5}$
- e. $y\acute{} = \frac{6xlog_a e}{3x^2+5}$

Pregunta **3**

Sin responder aún

Puntúa como 1,00

La derivada de la función $y = \frac{x+cosx}{x}$ es:

- a. $y\acute{} = \frac{-xsenx-cosx}{x^2}$
- b. $y\acute{} = \frac{x^2senx+xcosx}{x^2}$
- c. $y\acute{} = \frac{xsen^2x+cosx}{x}$
- d. $y\acute{} = \frac{x+senx+cosx}{x^2}$
- e. $y\acute{} = \frac{xsenx+cosx}{x^2}$

Pregunta **4**

Sin responder aún

Puntúa como 1,00

La derivada de la función $y = xcscx$ es:

- a. $y\acute{} = cscxcotx - cscx$
- b. $y\acute{} = x^2cscx + cscx$
- c. $y\acute{} = xcscxtanx + cscx$
- d. $y\acute{} = xcscxcotx + cscx$
- e. $y\acute{} = xsecxcotx + cotx$

Pregunta **5**

Sin responder aún

Puntúa como 1,00

La derivada de la función $y = \frac{sec3x}{x}$ es:

- a. $y\acute{} = \frac{3xsec3xtan3x-sec3x}{x}$
- b. $y\acute{} = \frac{3xsec3x+tan3x-sec3x}{x^2}$
- c. $y\acute{} = \frac{3xsec3xtan3x-sec3x}{x^2}$
- d. $y\acute{} = \frac{3xsec3x-tan3x-sec3x}{x^2}$
- e. $y\acute{} = \frac{xsec3xtan3x+sec3x}{x^2}$

Pregunta **6**

Sin responder aún

Puntúa como 1,00

La derivada de la función $y = 2xIn(5x^3 - 2x + 2)$ es:

- a. $2 + \frac{15x^2-2}{5x^3-2x+2}$
- b. $\frac{15x^2-2}{5x^3-2x+2}$
- c. $y\acute{} = 2x\frac{15x^2-2}{5x^3-2x+2} + 2In(5x^3 - 2x + 2)$ \)
- d. $2xIn\frac{15x-2}{5x^3-2x+2}$
- e. $2x\frac{15x^2-2}{5x^3-2x+2}$

Pregunta **7**

Sin responder aún

Puntúa como 1,00

La derivada de la función $y = x^2 tanx$ es:

- a. $y\acute{} = x^2 tanx + 2xsec^2 x$
- b. $y\acute{} = 2xsec^2 x$
- c. $y\acute{} = -xsec^2 x + xcotanx$
- d. $y\acute{} = xsec^2 x + xtanx$
- e. $y\acute{} = x^2 sec^2 x + 2xtanx$

Pregunta **8**

Sin responder aún

Puntúa como 1,00

La derivada de la función $y = 2x + In3x$ es

- a. $y\acute{} = 2 + \frac{1}{3x}$
- b. $y\acute{} = 2\frac{1}{3x}$
- c. $y\acute{} = \frac{2x+1}{x}$
- d. $y\acute{} = \frac{x}{2x+1}$

◄ EVIDENCIAS DEL PRIMER EXAMEN PARCIAL DE C. D. E I. 2

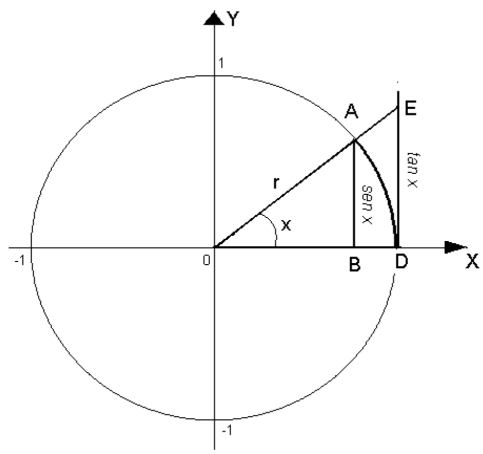
Ir a...

INTRODUCCIÓN AL ÁREA BAJO UNA CURVA ►

Anexo 1. Cálculo del límite $\lim_{x \to 0} \frac{sen\ x}{x} = 1$

Otra manera de concluir que $\lim_{x \to 0} \frac{sen\ x}{x} = 1$, se muestra en este anexo.

A partir del círculo trigonométrico, ver siguiente figura, podemos establecer que



la siguiente desigualdad se cumple:

$$sen\, x \le x \le \tan x$$

que equivale a

$$sen\, x \le x \le \frac{sen\, x}{\cos x} \text{..................(1)}$$

En la desigualdad (1) suponemos que la siguiente desigualdad se cumple $0 < x < \frac{\pi}{2}$ $\left(ó\ sea,\ x\ \ menor\ de\ 90^o\right)$ ya que nos interesan las condiciones en las que los valores de x está muy cercana a cero.

Observar que la desigualdad (1) contiene las siguientes afirmaciones:

$$sen\, x \le x --- \ (2) \quad y \quad x \le \frac{sen\ x}{\cos\ x} ---(3)$$

En particular, la desigualdad (3) está bien definida, ya que $x \ne 0$ y también $x \ne \frac{\pi}{2}$, por lo $\cos x \ne 0$.Ahora, al dividir las expresiones (2) y (3) entre $senx$ se obtiene

$1 \leq \frac{x}{senx}$ ……….(4) y $\frac{x}{senx} \leq \frac{1}{\cos x}$ …………….(5)

Al tomar los recíprocos (las desigualdades cambian) en las ecuaciones (4) y (5), se tiene

$1 \geq \frac{senx}{x}$ ………(6) y $\frac{senx}{x} \geq \frac{\cos x}{x}$ …………….(7)

Como $x \neq 0$, entonces las divisiones involucradas están bien definidas.

Las expresiones (6) y (7) permiten construir la siguiente doble desigualdad

$$\cos x \leq \frac{senx}{x} \leq 1 \text{ ………………….(8)}$$

El término intermedio en la desigualdad es precisamente la función en estudio y cuyo límite se quiere calcular.

Ahora, $\lim_{x \to 0} \cos x = 1$ ya que $\cos 0 = 1$, entonces cuando $x \to 0$, la función $f(x) = \frac{senx}{x}$ esta limitada por ambos lados por 1, esto es:

$$1 \leq \lim_{x \to 0} \frac{senx}{x} \leq 1$$

Finalmente se concluye que

$$\lim_{x \to 0} \frac{senx}{x} = 1 \text{ ……………….(9)}$$

Apéndice 2 Derivadas de las funciones $f(x) = senx$ y $f(x) = \cos x$

Derivar $f(x) = senx$

$$\frac{dsenx}{dx} = \lim_{h \to 0} \frac{sen(x+h) - senx}{h}$$

Utilizando la relación trigonométrica

$$sen\alpha - sen\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2} sen\frac{\alpha-\beta}{2}$$

el límite se convierte en:

$$\frac{dsenx}{dx} = \lim_{h \to 0} \frac{2\cos\frac{x+h+x}{2} sen\frac{x+h-x}{2}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{2}{2}\cos\left(x+\frac{h}{2}\right) sen\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}$$

$$\frac{dsenx}{dx} = \lim_{h \to 0} \frac{\cos\left(x+\frac{h}{2}\right) sen\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} = \lim_{h \to 0} \cos\left(x+\frac{h}{2}\right) \lim_{h \to 0} \frac{sen\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}$$

En donde $\lim_{h \to 0} \cos\left(x+\frac{h}{2}\right) = \cos x$ $\qquad$ $\lim_{h \to 0} \frac{sen\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} = 1$

Por lo tanto:

$$\frac{dsenx}{dx} = \lim_{h \to 0} \cos\left(x+\frac{h}{2}\right) \lim_{h \to 0} \frac{sen\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} = \cos x$$

Concluimos que $\frac{dsenx}{dx} = \cos x$

DERIVADA DE LA FUNCION $f(x)=\cos x$

De acuerdo con la definición de derivada

$$\frac{df(x)}{dx}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

para $f(x)=\cos x$ se tiene

$$\frac{d\cos x}{dx}=\lim_{h\to 0}\frac{\cos(x+h)-\cos x}{h}$$

Utilizando la relación trigonométrica

$$\cos\alpha-\cos\beta=-2sen\frac{\alpha+\beta}{2}sen\frac{\alpha-\beta}{2}$$

el límite se transforma en:

$$\frac{d\cos x}{dx}=\lim_{h\to 0}\frac{-2sen\frac{x+h+x}{2}sen\frac{x+h-x}{2}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{-\frac{2}{2}sen\left(x+\frac{h}{2}\right)sen\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}$$

$$\frac{d\cos x}{dx}=\lim_{h\to 0}\frac{-sen\left(x+\frac{h}{2}\right)sen\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}=-\lim_{h\to 0}sen\left(x+\frac{h}{2}\right)\lim_{\Delta x\to 0}\frac{sen\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}$$

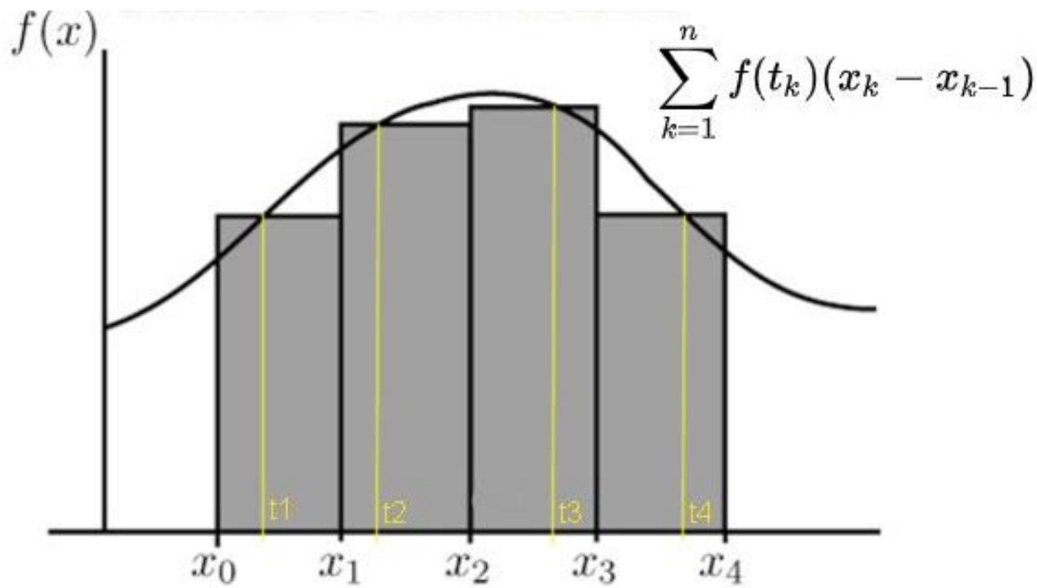
Además: $\lim_{h\to 0}sen\left(x+\frac{h}{2}\right)=senx$ $\qquad$ $\lim_{h\to 0}\frac{sen\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}=1$

Por lo tanto: $\frac{d\cos x}{dx}=-\lim_{h\to 0}sen\left(x+\frac{h}{2}\right)=-senx$

Finalmente

$$\frac{d\cos x}{dx}=-senx$$

Unidad 2



La integral definida

Índice

Unidad 2. Integral Definida

Integral Definida

Propósito. Interpretará el concepto de integral definida, analizando situaciones dadas en diferentes contextos para construir su significado. Relacionará los conceptos de derivada e integral a través del Teorema Fundamental del Cálculo y lo aplicará.

Aprendizajes

- Asocia el área bajo una curva con la solución de una situación dada en diversos contextos.
- Realiza aproximaciones para el cálculo del área bajo una curva utilizando sumas de áreas a través de rectángulos inscritos y circunscritos y reconoce esta aproximación como un método general.
- Relaciona el método de aproximación numérica para calcular el área con un proceso infinito.
- Calcula el área bajo una curva de la forma $f(x)=x^n$ como un límite de sumas infinitas para n=1, 2 y 3.
- Determina el área bajo la gráfica de una función constante o lineal en intervalos de la forma $[0,x]$ y calcula con ella el área en el intervalo $[a,\ b]$.
- Identifica la función área como una antiderivada o primitiva.
- Infiere a la integral definida como el límite de sumas infinitas.
- Interpreta la relación que se establece en el teorema fundamental del cálculo.
- Descubre las ventajas de la existencia de una antiderivada para encontrar la integral definida
- Utiliza las propiedades de la integral definida
- Identifica los elementos que sustentan al teorema fundamental del cálculo.
- Aplica el teorema fundamental del cálculo.
- Interpreta la solución de un problema como el cálculo del área bajo una curva.

ESTRATEGIA PARA LA UNIDAD 2

Como una estrategia inicial es encontrar el área de un círculo utilizando polígonos regulares inscritos o circunscritos utilizando el Método de exhaución de Eudoxio, esto con el fin de inducir un método para abordar problemas que requieran trabajar con el área bajo la curva de una función. El procedimiento para realizar es calcular el área total bajo una curva del tipo polinomial con una aproximación de una suma de áreas de rectángulos inscritos o circunscritos a dicha curva y calcular el área deseada, usando el límite de la suma de un número infinito de rectángulos. Con este método se recomienda trabajar inicialmente una función de primer grado, continuar con una función cuadrática y con una función de tercer grado. Se sugiere que el

Profesor desarrolle en el pizarrón uno de ellos y los alumnos trabajen los ejercicios del cuaderno de trabajo con el apoyo del Profesor.

En síntesis, a lo realizado anteriormente, es conveniente que el Profesor maneje la definición de las sumas de RIEMANN. Para ello, se propone desarrollar dos ejercicios a manera de presentación. Es importante que el área limitada bajo una curva de una función, por el eje X y por dos líneas verticales se pueda calcular con este procedimiento. Se deja a consideración del Profesor trabajar los ejercicios propuestos.

Una vez que el alumno está familiarizado con el vocablo "AREA BAJO UNA CURVA", es el momento de establecer el concepto de antiderivada y el de *Integral Definida*, se propone como estrategia, resolver ejercicios utilizando $\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{n=1}^{\infty}(\Delta x) f(x)$. Después de realizados los ejercicios sugeridos es importante inducir al alumno a que encuentre la relación entre el resultado obtenido con el método y la derivada. Lo desarrollado hasta este momento, permitirá establecer una relación estrecha entre derivada y antiderivada (integral), lo que determina uno de los resultados más importantes en el Cálculo Diferencial e Integral

Teorema Fundamental del Cálculo

Sea $f(x)$ una función de variable real continua, la cual

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Donde $\frac{dF(x)}{dx} = f(x)$ y $F(x)$ es la función primitiva de $f(x)$

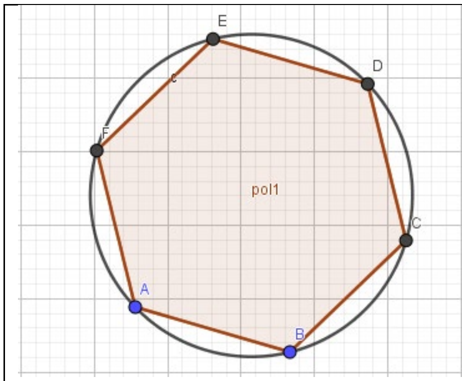
El Profesor ejemplificará con ejercicios y el alumno resolverá lo propuesto en este cuaderno de trabajo, como ya lo hemos mencionado, esto deberá hacerse con el apoyo del Profesor. Y finalmente se retoma el teorema fundamental del cálculo para resolver problemas de área bajo la curva.

El área bajo una curva comprendida entre el eje X y las rectas verticales $x = a$ ***y*** $x = b$ ***está dada por la integral definida*** $\int^b f(x)dx = F(a) - F(b)$

2.1 Introducción. Cálculo de Área de círculo

Vamos a introducir el método de exhaución de Eudoxio en el tema de calcular el área de un círculo de radio r inscribiendo polígonos regulares en el circulo.

Ejercicio 1. Calcular el área del hexágono inscrito en una circunferencia de radio 6 cm.



Procedimiento

1. Trazar triángulos desde el centro del triángulo a los vértices del hexágono.
2. Marcar los ángulos en los vértices. Escribir el valor de cada ángulo _______
3. De acuerdo con la medida de dos de sus lados, los triángulos son ______________________
4. Se forman 6 triángulos congruentes cuyo lado igual mide _____________
5. En cada triángulo, el valor de su base es _________ y el de su altura es __________
6. El área de cada triángulo es ____________
7. El área del hexágono es ____________

Ejercicio 2. Repita el cálculo anterior si se inscribe un polígono regular de 20 lados en la misma circunferencia. Graficar en Geogebra.

Procedimiento

2.1) Trazar triángulos desde el centro del triángulo a los vértices del hexágono.
2.2) Escribir el valor de cada ángulo _______
2.3) De acuerdo con la medida de dos de sus lados, los triángulos son ____________
2.4) Se forman 6 triángulos congruentes cuyo lado igual mide _____________
2.5) En cada triángulo, el valor de su base es _________ y el de su altura es __________
2.6) El área de cada triángulo es ____________
2.7) El área del hexágono es ____________

Ejercicio 3. Con los resultados obtenidos en los ejercicios anteriores, realizar el procedimiento cuando se inscribe un polígono regular de n lados

Procedimiento

3.1) Los ángulos en los vértices. Tienen el valor _______

3.2) De acuerdo con la medida de dos de sus lados, los triángulos son ____________________

3.3) Se forman 6 triángulos congruentes cuyo lado igual mide ____________

3.4) En cada triángulo, el valor de su base es ________ y el de su altura es _________

3.5) El área de cada triángulo es ___________

3.6) El área del hexágono es ___________

Ejercicio 4. Que ocurre si el número de lados del polígono es muy grande (que sea infinito). Utilizar el concepto de límite para explicar lo anterior

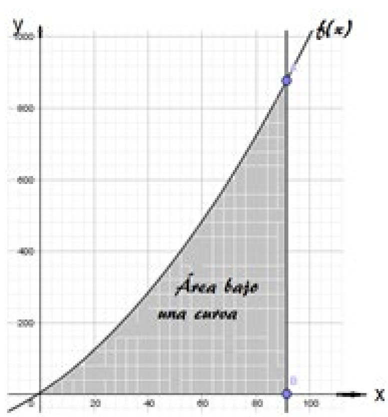
Ejercicio 5. Utilizar el resultado del ejercicio 3, y determine el límite del resultado cuando $n \to \infty$.

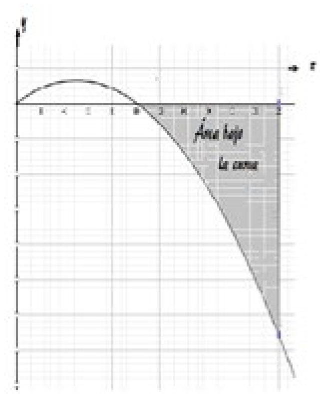
Indicar a que corresponde el resultado obtenido. _____________________________________

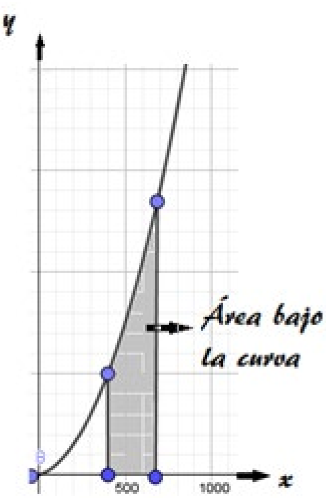
Ejercicio 6. Repita el cálculo anterior si se circunscribe un polígono regular de n lados en la misma circunferencia. Graficar en GeoGebra. Indique el resultado cuando el número de lados tiende a infinito __________________. Realice un gráfico

2.2 DESARROLLO: AREA BAJO UNA CURVA

Ahora vamos a trabajar con funciones, en particular con las polinomiales. Nuestro objetivo será calcular el área bajo una curva usando el método de Exhaución de Eudoxio (Ver figura)



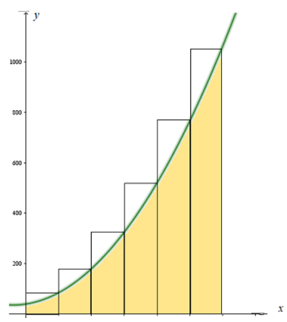




Para comprender lo que significa el área bajo una curva, trabajamos inicialmente con curvas como se muestran en la figura anterior, entenderemos como “ÁREA BAJO UNA CURVA” EL ÁREA COMPRENDIDADA ENTRE UNA CURVA EL EJE X y UN INICIO Y UN FINAL VERTICAL COMO SE MUESTRA en las partes sombreadas, posteriormente iremos afinando este concepto.

2.3 Ejercicios de Área bajo una curva

Ejercicio 7. Vamos a encontrar el área bajo la curva $y = x^2 + 10x + 40$ en el intervalo $[0, 30]$



El área que se quiere calcular es la indicada con color naranja

Vamos a realizar el siguiente procedimiento

Vamos a realizarlo en forma iterativa, esto es repitiendo el procedimiento de circunscribir rectángulos de igual base.

Contestar lo siguiente

Se circunscriben 6 rectángulos como muestra la figura. ¿Cuánto mide la base de cada uno? ______

¿Cuál es la altura del rectángulo 1? Para esto usamos la función ¿Cómo? Observando ¿cuál es la imagen de 5? ¿Porqué? ______________________ Podemos decir que la altura es $f(5)$? Y por lo tanto el área del rectángulo 1 es: ___________

Ahora ¿cuál es el área del rectángulo 2? ________

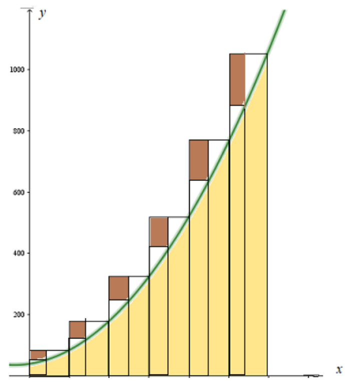
Y así sucesivamente; el área del rectángulo 3 es ____________ y la del rectángulo 4 es __________

Escribir los resultados para el rectángulo 5 ___________ y para el rectángulo 6 _______________

La suma de todas estas áreas es A=____________________

¿El resultado es el área bajo la curva? La respuesta es NO. ¿Entonces que hacer?

Aumentemos el número de rectángulos circunscritos, esto es, por ejemplo, al doble. Veamos la figura



Observamos que los rectángulos marcados con el color café (obscuro) ya no serán incluidos y por lo tanto la suma total de los rectángulos va a disminuir, pero será mayor, pero más cercano al área bajo la curva.

Realizar los cálculos. Observar que todas las bases miden lo mismo base= $\frac{30}{12}$

Primer rectángulo $A_1 = x_1 f(x_1) = (base)x(altura) = \frac{30}{12} f(\frac{1}{12}30) =$ ________

Segundo rectángulo $A_2 = \left(x_2 - x_1\right) f(x_2) = (base)x(altura) = \frac{30}{12} f(2\frac{1}{12}30) =$ _________

Tercer rectángulo $A_3 = \left(x_3 - x_2\right) f(x_3) = (base)x(altura) = \frac{30}{12} f(3\frac{1}{12}30) =$ ___________

Cuarto rectángulo $A_4 = \left(x_4 - x_3\right) f(x_4) = (base)x(altura) = \frac{30}{12} f(4\frac{1}{12}30) =$ ___________

Llenar la siguiente tabla

Rectángulo	Base	Altura	Área
1			
2			
3			
4			
5			
6			
7			
8			
9			
10			
11			
12			
		Área Total	

Pero no tenemos aún el área bajo la curva. ¿Qué hacer? Circunscribir n rectángulos ¿Cuántos?

La base de cada rectángulo será en este caso particular $\frac{30}{n}$ y la altura de cada rectángulo es $f(k(\frac{30}{n}))$ donde $k\frac{30}{n}$ es la abscisa del rectángulo correspondiente y k toma valores de acuerdo al subíndice (1,2,3,4, 5,…………n) n es el número de rectángulos circunscritos considerados. Y en lugar de hablar de muchos tomaremos un límite cuando $n \to \infty$. ¿Lo intentamos? Bien, llenemos la tabla

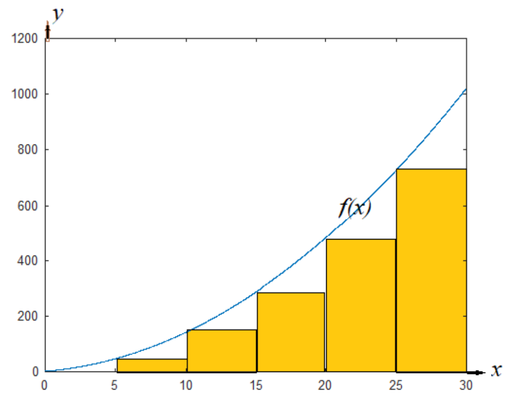
Rectángulo m	Base	Altura	Área
1			
2			
3			
*			
*			
*			
*			
*			
n-2			
n-1			
n			
		Área Total	

Ahora, calcular el límite $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} A_k$. El subíndice *k,* se refiere al número del rectángulo considerado

---

Para calcular A_k se requieren los resultados de las siguientes sumas $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ y $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$. Ver apéndice 1

Ejercicio 8. Encontrar el área bajo la curva $y = x^2 + 10x + 4$ en el intervalo $[0,30]$ utilizando rectángulos inscritos



Observemos que se pide calcular el área que ya se calculo en el ejercicio anterior.

El área que se quiere calcular es la indicada con amarillo

Vamos a realizar el siguiente procedimiento

Vamos a realizarlo en forma iterativa, esto es repitiendo el procedimiento de inscribir rectángulos de igual base.

Contestar lo siguiente

Se inscriben 5 rectángulos como muestra la figura. ¿Cuánto mide la base de cada uno? Observar que se empezó en la abscisa 5. _______

¿Cuál es la altura del rectángulo 1? Para esto usamos la función ¿Cómo? Observando ¿cuál es la imagen de 5? ¿Porqué? _________________________ Podemos decir que la altura es $f(5)$? Y por lo tanto el área del rectángulo 1 es: ____________

Ahora ¿cuál es el área del rectángulo 2? _________

Y así sucesivamente; el área del rectángulo 3 es _____________ y la del rectángulo 4 es ___________

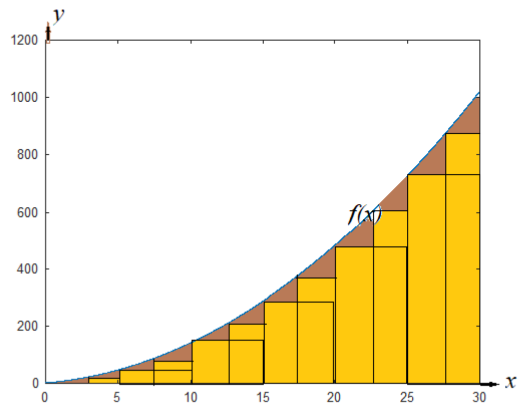
Escribir los resultados para el rectángulo 5 ____________

La suma de todas estas áreas es A=______________________

¿El resultado es el área bajo la curva? La respuesta es NO. ¿Entonces que hacer?

Aumentemos el número de rectángulos inscritos, esto es, por ejemplo, al doble.

Veamos la figura



Observamos que las regiones marcadas marcados con el color amarillo no están incluidos y por lo tanto la suma total de los rectángulos va a aumentar cuando se utilizan más rectángulos. , pero será más cercano al área bajo la curva.

Realizar los cálculos. Observar que todas las bases miden lo mismo base= $\frac{30}{12}$

Primer rectángulo $A_1 = x_1 f(x_1) = (base)x(altura) = \frac{30}{12} f(1\frac{1}{12}30) =$ ________

Segundo rectángulo $A_2 = \left(x_2 - x_1\right) f(x_2) = (base)x(altura) = \frac{30}{12} f(2\frac{1}{12}30) =$ ________

Tercer rectángulo $A_3 = \left(x_3 - x_2\right) f(x_3) = (base)x(altura) = \frac{30}{12} f(3\frac{1}{12}30) =$ ________

Cuarto rectángulo $A_4 = \left(x_4 - x_3\right) f(x_4) = (base)x(altura) = \frac{30}{12} f(4\frac{1}{12}30) =$ ________

Llenar la siguiente tabla

Rectángulo	Base	Altura	Área
1			
2			
3			
4			
5			
6			
7			
8			
9			
10			
11			
12			
		Área Total	

Pero no tenemos aún el área bajo la curva. ¿Qué hacer? Circunscribir n rectángulos ¿Cuántos?

La base de cada rectángulo será en este caso particular $\frac{30}{n}$ y la altura de cada rectángulo es $f(k(\frac{30}{n}))$ donde $k(\frac{30}{n})$ es la abscisa correspondiente al rectángulo considerado y k toma valores de acuerdo al rectángulo correspondiente (1,2,3,4,5,…………n) n es el número de rectángulos circunscritos. Y en lugar de hablar de muchos tomaremos un límite cuando $n \to \infty$. ¿Lo intentamos? Bien, llenemos la tabla

Rectángulo m	Base	Altura	Área
1			
2			
3			
*			
*			
*			
*			
*			
n-2			
n-1			
n			
		Área Total	

Ahora, calcular el límite $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} A_k$ ______________________________. Utilizar las sumas correspondientes

Comparar el resultado del ejercicio 6 con el resultado del ejercicio 7.

¿Se puede escribir una conclusión? __________ ¿Cuál? __________-

De acuerdo con los resultados obtenidos en los ejercicios 6 y 7 explique que significa la siguiente expresión

$$\underbrace{\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(m_k\right)\Delta x}_{rect.\ inscritos} = \underbrace{\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f\left(M_k\right)\Delta x}_{rect.\ circunscritos}$$

; donde Δx corresponde, en nuestro caso, a la base igual de cada uno de los rectángulos utilizados; $f(m_k)$ corresponde a la altura de los rectángulos inscritos y $f(M_k)$ a la altura de los rectángulos circunscritos.

Hasta aquí usamos una función creciente, este proceso es válido también para una función decreciente, con las respectivas adecuaciones en la altura de los rectángulos. El proceso será análogo para funciones monótonas (en regiones creciente y/o decreciente)

En los siguientes ejercicios utilizar rectángulos inscritos o rectángulos circunscritos.

Ejercicio 9. Calcular el área bajo la curva $f(x) = 3x + 5$ entre $[0, x]$

Notar que se trata de una función lineal.

Procedimiento

9.1) Graficar la función.

9.2) Marcar un intervalo entre $x_1 = 0$ y $x_2 = x$

9.3) Dibujar los n-rectángulos inscritos o circunscritos

9.4) Calcular el área de cada rectángulo______________________

9.5) Escribir la suma de todas las áreas______________________

9.6) Escribir la suma total de las áreas _______________________

9.7) Calcular el límite cuando $n \to \infty$ ________________________

Ejercicio 10. Calcular el área bajo la curva $f(x) = 2x^2 + 5x + 5$ entre $[0, x]$

Notar que se trata de una función cuadrática

Procedimiento

10.1) Graficar la función

10.2) Marcar un intervalo entre $x_1 = 0$ y $x_2 = x$

10.3) Dibujar los n-rectángulos inscritos o circunscritos

10.4) Calcular el área de cada rectángulo_____________________

10.5) Escribir la suma de todas las áreas________________

10.6) Escribir la suma total de las áreas _______________________

10.7) Calcular el límite cuando $n \to \infty$ _______________________

Ejercicio 11. Calcular el área bajo la curva $f(x) = 3x^3 + 3x^2 + 5x - 1$ entre $[0, x]$

Notar que se trata de una función cúbica

Procedimiento

11.1) Graficar la función

11.2) Marcar un intervalo entre $x_1 = 0$ y $x_2 = x$

11.3) Dibujar los n-rectángulos inscritos o circunscritos

11.4) Calcular el área de cada rectángulo____________________

11.5) Escribir la suma de todas las áreas_______________

11.6) Escribir la suma total de las áreas ______________________.

Utilizar la suma $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2$

11.7) Calcular el límite cuando $n \to \infty$ ______________________________--

Escribir una respuesta a la siguiente pregunta

¿Qué relación existe entre la función y los resultados obtenidos para las áreas en cada uno de los ejercicios 9, 10 y 11?

2.4 Resumen. Sumas de Riemman

RESULTADO 1. *Podemos observar que la expresión de la función corresponde a la derivada de la expresión obtenida*, en otras palabras, *el resultado es la antiderivada de la función dada.*

RESULTADO 2. Trabajamos una función $f(x)$ real de variable real cuya gráfica se encuentra en el primer cuadrante. Calculamos el área bajo la curva mediante un proceso de inscribir o circunscribir rectángulos, en particular de igual longitud en la base, con un proceso infinito acorde con el método de exhaución. El resultado obtenido esta dado por

$$A = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=0}^{n} (\Delta x) f(x_k)$$

Recordemos que $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k$ es el ancho de la base y es igual a Δx cuando todas las bases son iguales y $f(x_k)$ la altura del k-ésimo rectángulo (circunscrito) inscrito en el dominio dado de la función.

Resumen General

Para verificar que esta fórmula sea correcta, utilizaremos las sumas de Riemann, que establece que la suma de las áreas de rectángulos inscritos en la gráfica de la función es igual a la suma de las áreas de rectángulos circunscritos en la gráfica de la función, cuando el número de rectángulos crece infinitamente.

Si utilizamos $s(n)$ para representar la suma de las áreas de rectángulos inscritos en la gráfica de la función y $S(n)$ que representa la suma de las áreas de rectángulos circunscritos en la gráfica de la función, esto es $s(n)=\sum_{k=1}^{n} f(m_k)\Delta x$; Donde m_k representa el valor mínimo de la función en el intervalo Δx. Y $S(n)=\sum_{k=1}^{n} f(M_k)\Delta x$; donde M_k representa el valor máximo de la función en el intervalo Δx. A estas sumas se le llaman **SUMAS DE RIEMANN.**

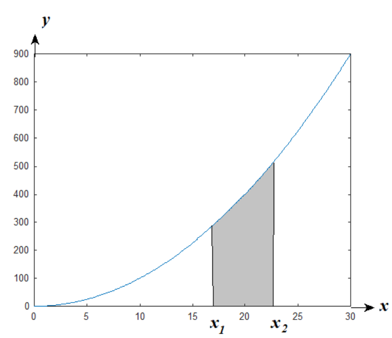
$$\lim_{n\to\infty} s(n)=\lim_{n\to\infty} S(n) \quad \text{de otra forma} \quad \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1} f(m_k)\Delta x=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(M_k)\Delta x$$

Podemos decir que se ha calculado el área bajo la curva en un intervalo $[0,x]$, es decir, el área bajo la curva desde $x=0$ hasta un cierto valor de x.

2.5 ÁREA BAJO UNA CURVA EN UN INTERVALO (x_1,x_2)

Ahora vamos a generalizar nuestro concepto de área bajo una curva limitada por dos rectas perpendiculares al eje X. Veamos el siguiente ejemplo.

Calcular el área iluminada en el siguiente gráfico, si se sabe que el área bajo la curva en el intervalo $(0,x_1)$ es igual a A_1 y el área bajo la curva en el intervalo $(0,x_2)$ es igual A_2, ¿Cuál es el área bajo la curva en el intervalo (x_1,x_2)



Respuesta________________

2.6 Ejercicio de Áreas en un intervalo

Ejercicio 12. Calcular el área bajo la curva cuya función es $f(x)=2x^2+3x+3$ en el intervalo $[10,18]$.
12.1) Graficar la función y trazar las rectas $x=10$ y $x=18$

12.2) Calcular el área con rectángulos circunscritos en el intervalo $\left[0,10\right]$ ___________________

12.3) Calcular el área con rectángulos circunscritos en el intervalo $\left[0,18\right]$ ___________________

12.4) ¿Cuál es área en el intervalo $\left[10,18\right]$?______________________

12.5) Con el mismo procedimiento, calcular el área solicitada en el intervalo circunscribiendo rectángulos en dicho intervalo ______________________

12.6) Compare los resultados obtenidos en los puntos 11.4) y 11.5)___________________________

Escribir una expresión que indique como calcular el área bajo una curva en un intervalo $\left[0,x\right]$ cuando se utilizan n-rectángulos circunscritos a la curva en dicho intervalo. __________________

Es momento de hacer un resumen de lo realizado hasta el momento.

Utilizando los procedimientos anteriores, resolver los siguientes ejercicios correspondientes a función lineal, cuadrática y cúbica. Se sugiere graficar cada uno de ellos.

Ejercicio 13*.* Sea $f(x)=3x-2$, una función real de variable real cuyo dominio es el intervalo cerrado $[1,7]$. Utilizando el procedimiento desarrollado en esta sección, encontrar el área bajo la curva de $f\left(x\right)$ en el dominio dado. Resultado _____________________

Ejercicio 14*.* Sea $f(x)=7x^2+9\text{x}+2$, una función real de variable real cuyo dominio es el intervalo cerrado $[0,\ 8]$. Utilizando el procedimiento desarrollado en la sección, encontrar el área bajo la curva de $f\left(x\right)$ en el dominio dado. Resultado ________________

Ejercicio 15*.* Sea $f(x)=x^3-4\,x+30$, una función real de variable real cuyo dominio es el intervalo cerrado $[3,7]$. Utilizando el procedimiento desarrollado en la sección, encontrar el área bajo la curva de $f\left(x\right)$ en el dominio dado. Resultado ____________________

2.7 CIERRE: (INTEGRAL DEFINIDA)

Después de lo visto en la sección anterior, podemos definir a la integral de la siguiente manera:

DEFINICION

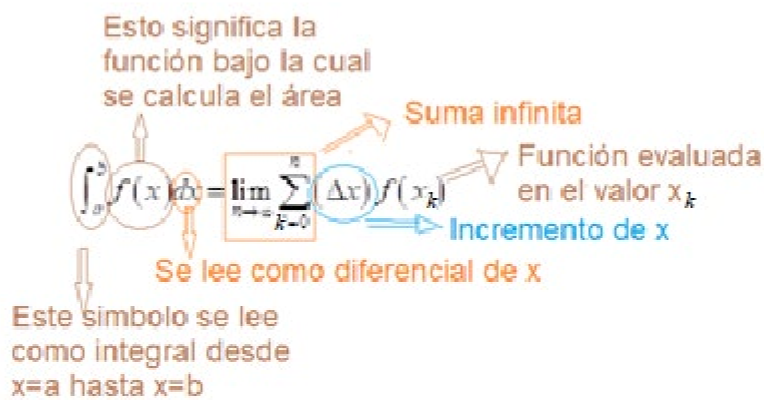
La **integral definida** se denota por $\int_a^b f(x)dx$ y se define como

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}(\Delta x)\, f(x_k)$$

Y su representación geométrica es área bajo la curva cuya función es $f(x)$.

Observamos que geométricamente, la expresión $\int_a^b f(x)dx$ representa el área bajo la curva dada por la función $f(x)$ de $x=a$ a $x=b.$

Como leer la expresión anterior



Observamos que el símbolo integral se relaciona con la suma, el símbolo corresponde a una "s" alargada, el diferencial de x (dx) se relaciona con el incremento de x y corresponde al valor de Δx cuando es infinitamente pequeño, esto es $\Delta x \to 0$

Ejercicio 16. Sea $f(x)=x^3+4$ una función real de variable real, continua con un dominio $[3,8]$, calcule la integral definida $\int_3^8 f(x)dx$.

16.1) Graficar la función en el intervalo $[0,10]$

16.2) Iluminar con azul en la gráfica, el área bajo la curva en el intervalo $[0,3]$. Calcular el área mostrada. ______________________

16.3) Iluminar con azul en la gráfica, el área bajo la curva en el intervalo $\left[0,8\right]$. Calcular el área mostrada. ____________________

16.4) Con los resultados obtenido en los ejercicios 16.2 y 16.3 encontrar el área en el intervalo $\left[3,8\right]$. Explicar. _____________________

Ejercicio 17. Sea $f(x) = x^3 + 4$ una función real de variable real, continua con un dominio $[3,8]$, calcule la integral definida $\int_3^8 f\left(x\right)dx$.

17.1) Calcular el área bajo la curva en el intervalo $\left[0,x\right]$ ____________________
Algebraicamente que es el resultado________________ y geométricamente que es resultado ________________

17.2) En la expresión algebraica obtenida en el punto 17.1, sustituya el valor de x=8. Que se obtiene geométricamente _______________________.

17.3) En la expresión algebraica obtenida en el punto 17.1, sustituya el valor de x=3. Que se obtiene geométricamente _______________________.

17.4) Relacionar los resultados obtenidos en 17.2 y 17.3 y comparar con lo obtenido en 16.4.

Ejercicio 18. Repetir el proceso anterior de los ejercicios 16 y 17 utilizando la función $f(x) = 3x^2 - 2x + 2$ en el intervalo $\left[5,9\right]$.

Ejercicio 19. Repetir el proceso anterior de los ejercicios 16 y 17 utilizando la función utilizando la función $f(x) = 2x^2 + 2x + 3$ en el intervalo $\left[2,8\right]$.

Ejercicio 20. Con los ejercicios 16, 17 y 18 y 19, explicar el siguiente enunciado.

2.7 TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO

Sea $f(x)$ una función real de variable real continua, la cual cumple que

$$\int_a^b f\left(x\right)dx = F\left(b\right) - F\left(a\right)$$

Donde $\dfrac{dF\left(x\right)}{dx} = f\left(x\right)$ y $F(x)$ función primitiva de $f\left(x\right)$

Explicación

____

2.8 ÁREA ENTRE DOS CURVAS

Vamos a calcular el Área entre dos curvas

Sean $f(x)$ y $g(x)$ dos funciones reales de variable real, definidas en el intervalo cerrado $[a,\ b]$ en donde se cumple la condición $f(x) > g(x)$. Entonces el área de la región limitada por $f(x)$ y $g(x)$, $x=a$ y $x=b$, esto es el área entre las curvas está dada por $A=\int_a^b \left(f(x)-g(x)\right)dx$.

Ejercicio 21. Determine el área de la región que se encuentra limitada por las curvas cuyas funciones son $f(x)=\sqrt{x}$ y $g(x)=x^3$

21.1) Graficar las dos curvas en una sola grafica e iluminar el área comprendida entre las dos curvas.

21.2) Encontrar los puntos donde se intersectan las dos curvas. (Ecuaciones simultáneas)

21.3) Iluminar el área entre los puntos encontrados en 21.2 para $f(x)=\sqrt{x}$

21.4) Iluminar el área entre los puntos encontrados en 21.2 para $g(x)=x^3$

21.5) Encontrar gráficamente el área entre las dos curvas ________________________

21.6) Encontrar numéricamente el área entre las dos curvas ______________________

Ejercicio 22. Determine el área de la región que se encuentra limitada por las curvas cuyas funciones son $f(x)=2x^3-3x^2-9x$ y $g(x)=x^3-2x^2-3x$

Respuesta____

En la figura siguiente se muestran las sumas del área de los rectángulos circunscritos para ambas funciones (Figuras A y B) y la diferencia de ambas sumas en la Figura C.

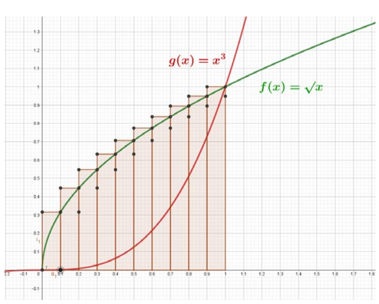


Figura A

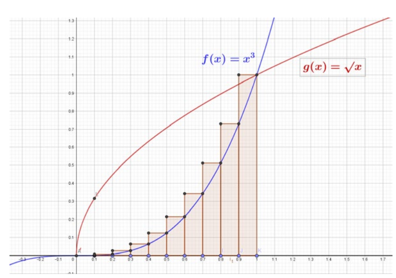


Figura B

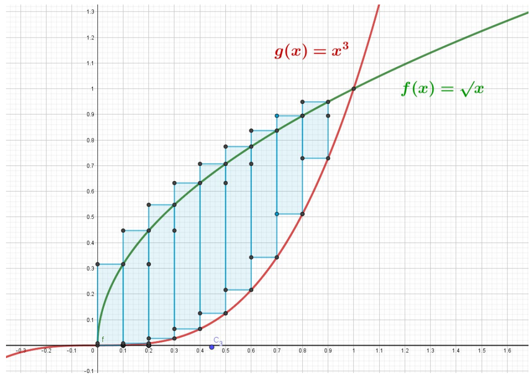


Figura C

Mientras que la suma de las áreas de los rectángulos inscritos se muestra en las Figuras E y F, ambas en el caso de 10 rectángulos, así como la diferencia de éstas en la Figura G

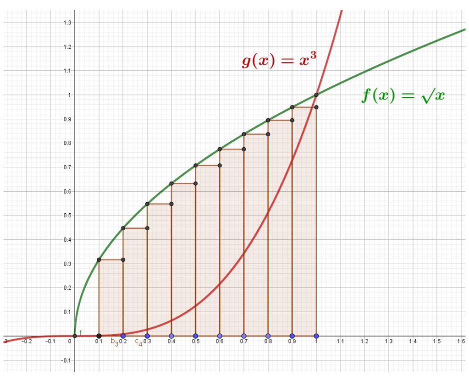


Figura E

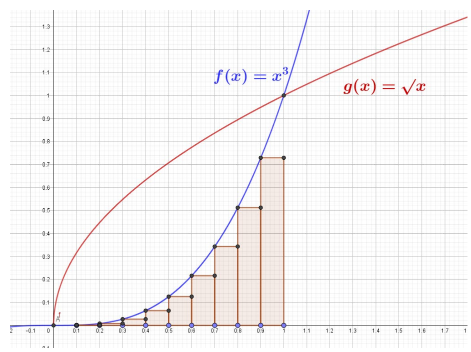


Figura F

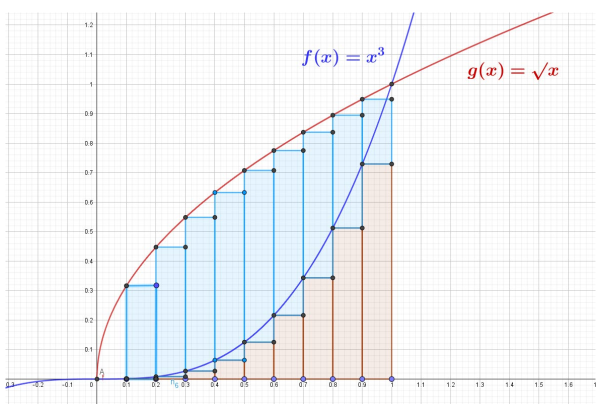


Figura G

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
COLEGIO DE CIENCIAS Y HUMANIDADES
PLANTEL ORIENTE
ACADEMIA DE MATEMÁTICAS

Segundo examen parcial de Cálculo Diferencial e Integral II

Nombre____

Resolver

1. Encontrar el área bajo la curva en el intervalo (0,x) utilizando rectángulos inscritos o circunscritos cuando la función es $f(x) = 2x^2 + 4x + 5$
2. Calcular el área bajo la curva cuya función es $f(x) = 3x^2 + x + 2$ entre x=2 hasta x=7.
3. Usando la integral definida, encontrar $\int_2^8 (\frac{2}{3}x^3 + \frac{4}{5}x^2 - 5x - 2)dx$
4. Encontrar la función f(x) en la siguiente expresión $\int_0^x f(x)dx = \frac{x+1}{3x}$
5. Encontrar el área entre las curvas $y = x^2 + 4x + 5$ y $y = 2x + 20$

Apéndice Unidad 2. Integral Definida

Sumatorias

Suma de números naturales

$$\sum_{k=1}^{n} 1 = \underbrace{1+1+1+1.........+1}_{\text{n - veces}} = n \qquad \textit{(1)}$$

Suma de los n primeros números naturales

$$\sum_{k=1}^{n} k = 1+2+3+4+5+.........+n = \frac{n(n+1)}{2} \qquad \textit{(2)}$$

Suma de los cuadrados de los n- primeros número naturales

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2+2^2+3^2+4^2+..........+n^2$$

Para encontrar la expresión general de esta suma, vamos a proceder con la denominada suma telescópica, a saber

Desarrollemos la suma

$$
\begin{array}{lll}
\sum_{k=1}^{n}\left[(k+1)^3-k^3\right] = & & \cancel{(1+1)^3} - 1^3 + \\
 & + & \cancel{(2+1)^3} - \cancel{2^3} + \\
 & + & \cancel{(3+1)^3} - \cancel{3^3} + \\
 & + & \cancel{(4+1)^3} - \cancel{4^3} + \\
 & & ...... \\
 & & ...... \\
 & & \cancel{......} \\
para\ n\text{-}1 & + & \cancel{(n-1+1)^3} - \cancel{(n-1)^3} + \\
para\ n & + & (n+1)^3 - \cancel{n^3} \\
\text{Re}alizamos\ la\ suma & & \overline{} \\
\text{Finalmente} & & (n+1)^3 - 1^3
\end{array}
$$

Encontramos que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left[(k+1)^3-k^3\right] = (n+1)^3 - 1$ *(3)*

Desarrollamos los binomios respectivos y simplificamos, debemos recordar que queremos encontrar la expresión para encontrar la suma $\sum_{k=1}^{n} k^2$

$$\sum_{k=1}^{n}\left[(k+1)^3-k^3\right]=\sum_{k=1}^{n}\left[\cancel{k^3}+3k^2+3k+1-\cancel{k^3}\right]=\sum_{k=1}^{n}\left[3k^2+3k+1\right]=$$
$$\sum_{k=1}^{n}3k^2+\sum_{k=1}^{n}3k+\sum_{k=1}^{n}1=3\sum_{k=1}^{n}k^2+3\sum_{k=1}^{n}k+\sum_{k=1}^{n}1$$

Observamos que en la última expresión tenemos lo que queremos encontrar $\sum_{k=1}^{n} k^2$ y las otras dos sumas, ya conocemos sus resultados (expresiones ***(1)*** y ***(2)***), veamos

$$3\sum_{k=1}^{n}k^2+3\sum_{k=1}^{n}k+\sum_{k=1}^{n}1=3\sum_{k=1}^{n}k^2+3\frac{n(n+1)}{2}+n$$

Sustituyendo en la expresión ***(3)*** tenemos:

$$\sum_{k=1}^{n}\left[(k+1)^3-k^3\right]=\left(n+1\right)^3-1$$
$$3\sum_{k=1}^{n}k^2+3\frac{n(n+1)}{2}+n=n^3+3n^2+3n$$

Solo resta despejar nuestra incógnita $\sum_{k=1}^{n} k^2$

$$\sum_{k=1}^{n}k^2=-\frac{n(n+1)}{2}-\frac{n}{3}+\frac{n^3+3n^2+3n}{3}=\frac{3n^2+n+2n^3}{6}$$

Factorizamos

$$\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Expresión que nos ayuda a encontrar la suma de los primeros n-cuadrados de los números naturales.

Para encontrar la expresión para la suma de los cubos de los n- primeros número naturales procedemos de manera análoga al caso anterior, utilizando la suma telescópica

$$\sum_{k=1}^{n}\left[(k+1)^4 - k^4\right] = \cancel{(1+1)^4} - 1^4 +$$
$$+ \cancel{(2+1)^4} - \cancel{2^4} +$$
$$+ \cancel{(3+1)^4} - \cancel{3^4} +$$
$$+ \cancel{(4+1)^4} - \cancel{4^4} +$$
$$\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots$$
$$\cancel{\ldots\ldots}$$
$$\textit{para } n\text{-}1 \qquad + \cancel{(n-1+1)^4} - \cancel{(n-1)^4} +$$
$$\textit{para } n \qquad + (n+1)^4 - \cancel{n^4}$$
$$\text{Re}\textit{alizamos la suma} \quad \underline{\qquad\qquad\qquad}$$
$$\text{Finalmente} \qquad (n+1)^4 - 1^4$$

Encontramos que $\sum_{k=1}^{n}\left[(k+1)^4 - k^4\right] = (n+1)^4 - 1$

$$\sum_{k=1}^{n}\left[(k+1)^4 - k^4\right] = \sum_{k=1}^{n}\left[\cancel{k^4} + 4k^3 + 6k^2 + 4k + 1 - \cancel{k^4}\right] = \sum_{k=1}^{n}\left[4k^3 + 6k^2 + 4k + 1\right] =$$

$$\sum_{k=1}^{n}4k^3 + \sum_{k=1}^{n}6k^2 + \sum_{k=1}^{n}4k + \sum_{k=1}^{n}1 = 4\sum_{k=1}^{n}k^3 + 6\sum_{k=1}^{n}k^2 + 4\sum_{k=1}^{n}k + \sum_{k=1}^{n}1$$

Ahora $(n+1)^4 - 1 = n^4 + 4n^3 + 6n^2 + 4n$

$$4\sum_{k=1}^{n}k^3 + 6\sum_{k=1}^{n}k^2 + 4\sum_{k=1}^{n}k + \sum_{k=1}^{n}1 = n^4 + 4n^3 + 6n^2 + 4n$$

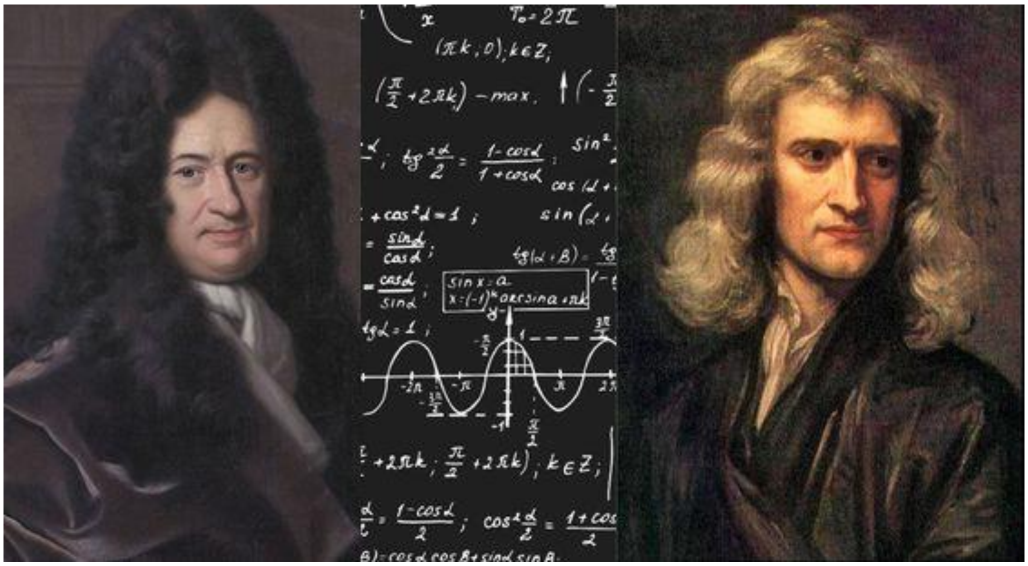
Sustituyendo las expresiones para suma de los cuadrados, la suma de los naturales y la suma de los unos, tenemos:

$$4\sum_{k=1}^{n}k^3 + 6\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + 4\frac{n(n+1)}{2} + n = n^4 + 4n^3 + 6n^2 + 4n$$

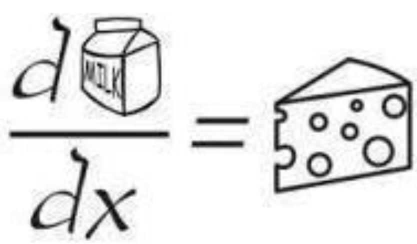
Finalmente realizando el álgebra correspondiente se tiene $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$

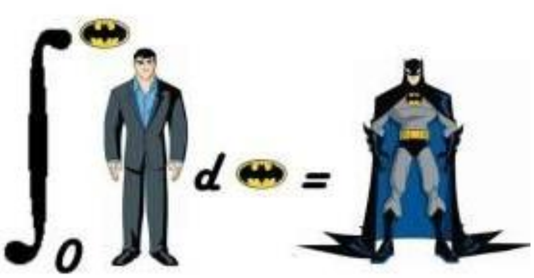
De manera análoga podemos encontrar la suma para cualquier suma de números naturales a una potencia natural.

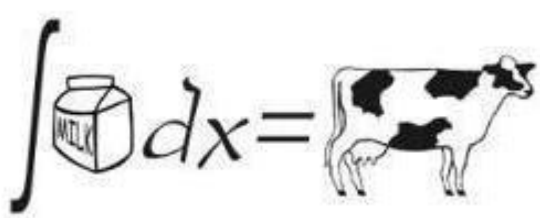
Unidad 3



La integral indefinida







Índice

Unidad 3. Integral Indefinida

La integral indefinida

Propósito. El alumno establecerá mediante el análisis de situaciones de variación la integral de diversas funciones, utilizará las fórmulas inmediatas y algunos métodos de integración

Aprendizajes

- Explica el carácter inverso de las operaciones de derivación e integración para obtener las fórmulas inmediatas de integración.
- Reconoce la relación existente entre la antiderivada y la integral indefinida, así como su notación.
- Utiliza la condición inicial para encontrar el valor de la constante de integración. Reconoce que al modificarse la condición inicial las funciones difieren.
- Identifica la fórmula de la integral inmediata que requiere utilizar para resolver una integral dada.
- Construye una tabla de integrales inmediatas que incluyan funciones trigonométricas y exponenciales
- Realiza las simplificaciones algebraicas pertinentes para convertir una integral a una forma inmediata.
- Identifica y realiza el cambio de variable apropiado para resolver una integral más sencilla.
- Reconoce que el método de integración por partes amplía las posibilidades para integrar algunos productos de funciones.
- Selecciona el método de integración apropiado para calcular integrales que resultan de modelar problemas en diferentes contextos.

ESTRATEGÍA PARA LA UNIDAD 3

Como principal estrategia consideremos el termino antiderivada, el cual empezamos a manejar como integral, para ello se propone trabajar dos problemas de física, recordando que la rapidez instantánea de un móvil es la derivada de la posición, y su aceleración es la derivada de la velocidad. En esta unidad trabajamos con el problema inverso, esto es, si tenemos la aceleración nos preguntamos: ¿Cuál es su velocidad y en consecuencia cuál es su posición? La respuesta sería, en ambos casos, el resultado de efectuar una operación contraria a la derivada. Aquí es el momento de introducir la integral indefinida y las consideraciones de condiciones iniciales para enlazar con la integral definida.

En nuestro siguiente paso, se deberá trabajar la antiderivada para diversos tipos de funciones, en particular polinomiales, trigonométricas, logarítmicas y exponenciales simples. Se establecerán ejercicios para que los alumnos determinen las antiderivadas correspondientes, denominadas en el programa como *inmediatas*. Es el momento de manejar el vocablo antiderivada como la integral y usar el concepto de la función original, ya que lo importante es mostrar que las funciones originales son imposibles de establecer, y por ello se introduce la constante de integración. Es importante mostrar que dos primitivas de una misma función tiene una diferencia de una constante, y también lo es usar el vocablo *constante indefinida*. Con base en esta definición se presentan ejemplos sencillos y se define la *integral indefinida*. Los alumnos deberán resolver los ejercicios propuestos con el apoyo del Profesor. Se podrá establecer un apartado conjuntamente con los alumnos para establecer una TABLA DE FORMULAS DE INTEGRACIÓN, acorde con las derivadas trabajadas por los alumnos hasta el momento.

Después de trabajar integrales *inmediatas*, se trata de obtener antiderivadas no inmediatas, es decir las que requieren un proceso operativo, por lo que se hace necesario e importante introducir el concepto de diferencial.

Una vez que se ha comprendido lo que es la antiderivada y una diferencial, se deberá avanzar con los métodos de integración, inicialmente el método por sustitución y posteriormente el método de integración por partes. El Profesor debe trabajar la operatividad del cálculo de integrales y orientar y apoyar a los alumnos en los ejercicios sugeridos. En cualquiera de los procesos, las integrales se deberán reducir a una integral de las que hemos denominado inmediatas.

3.1 PROBLEMAS DE INTRODUCCIÓN

Problema 1. Se dispara un proyectil horizontalmente sobre un blanco con tal fuerza que su velocidad, después de t segundos, es $(35 - 5t)\ {}^{m}\!/_{s}$.

a) ¿Cuál es la aceleración del proyectil?
b) ¿Cuál es la distancia que recorre el proyectil en los dos primeros segundos?
c) ¿Cuál es la distancia recorrida por el proyectil en t segundos ($0 \le t \le 5$)?

Solución. Podemos observar que la velocidad no es constante, cambia su valor dependiendo del tiempo considerado. Analizando la expresión de la velocidad podemos asegurar que esta decrece conforme el tiempo aumenta.

a) La aceleración es la derivada de la velocidad por lo tanto $a = \frac{d}{dt}\mathrm{v} = \frac{d}{dt}(35 - 5t) = -5\ {}^{m}\!/_{s^2}$

b) La posición del proyectil en cualquier tiempo t lo encontramos como la antiderivada de la velocidad

$$x(t) = \int_o^t (35 - 5t)dt = 35t - \frac{5}{2}t^2$$

Ejercicio 1. Un proyectil se mueve en línea recta con una velocidad $\mathrm{v} = 12t - 80\ {}^{m}\!/_{s}$

a) ¿Cuál es la aceleración del proyectil? ____________________

b) ¿Cuál es la distancia que recorre el proyectil en los tres primeros segundos? ____________________

c) ¿Cuál es la distancia recorrida por el proyectil en t segundos? ____________________

3.2 LA ANTIDERIVADA O PRIMITIVA DE UNA FUNCION

DEFINICIÓN: Una función $F(x)$ es una primitiva o una antiderivada de la función $f(x)$, si se cumple que: $F'(x) = f(x)$ para toda $x \in [a, b]$.

Escribir el Teorema Fundamental del Cálculo.

___

___

___

TEOREMA. Si las funciones $F(x)$ y $G(x)$ son primitivas de la función $f(x)$ en el intervalo $[a, b]$, entonces su diferencia es una constante, es decir $F(x) - G(x) = C$.

Ejercicio 2. Comprobar que las funciones $F(x) = \dfrac{3x}{x+2}$ *y* $G(x) = \dfrac{5x+4}{x+2}$ son primitivas de una misma función y su diferencia es una constante.

___

DEFINICIÓN. Al conjunto de todas la primitivas de la función $f(x)$ en el intervalo $[a, b]$, se le llama la integral indefinida de la función.

La integral indefinida de la función $f(x)$ se denotará por medio del símbolo $\int f(x)dx$ en donde el símbolo $\int$ no es otra cosa que una s alargada y dx es la diferencial de la variable independiente. Si $F(x)$ es una primitiva de $f(x)$ entonces.

$\int f(x)dx = F(x) + C$. En donde C es llamada la *constante de integración.*

Ejercicio 3. Si $\int f(x)dx = x^4 + 4x^3 + 8x + C$, determinar la función $f(x)$

___

Usamos en los siguientes ejercicios el concepto de antiderivada

Ejercicio 4. El resultado de la integral indefinida $\int \left(8x^2 - 7x^3\right) dx$ es: ___________

___

3.3 Ejercicios para encontrar la antiderivada y la constante de integración

En los siguientes ejercicios escribir lo que se requiere utilizando el símbolo de integral, y calcular la constante de integración para la condición dada.

Ejercicio 5. Determinar la primitiva $F(x)$ de $f(x) = 3x^2 - 2x$ tal que para $x_0 = 2$; $y_0 = F(x_0) = 80$ Resp. ____________________

Ejercicio 6. Determinar la primitiva $F(x)$ de $f(x) = 3x^2 - 2x$ tal que para $x_0 = 4$; $y_0 = F(x_0) = 110$ Resp. ____________________

Ejercicio 7. Determinar la función $f(x)$ sabiendo que $f'(x) = 10x^3 - 12x + 3$ y que $f(2) = 32$ Resp. ____________________

Ejercicio 8. Determinar la función $f(x)$ sabiendo que $f'(x) = e^{5x} + 3$ y que $f(0) = -12$ Resp. ____________________

Ejercicio 9. Determinar la función $f(x)$ sabiendo que $f'(x) = 10x^3 - 12x + 3$ y que $f(2) = 32$ Resp. ____________________

Ejercicio 10. Determinar la función $f(x)$ sabiendo que $f'(x) = e^{5x} + 3$ y que $f(0) = -12$ Resp. ____________________

3.4 FÓRMULAS DE INTEGRACIÓN

Al igual que con la derivada, pueden obtenerse fórmulas básicas de integración, es conveniente aprenderse estas fórmulas o tenerlas a disposición, para obtener integrales indefinidas.

Recordemos que la derivada de una función se obtiene directamente aplicando las fórmulas de derivada, en el caso de la integral indefinida suele involucrarse la búsqueda de una transformación.

Ejercicio 11. Completar la siguiente tabla de integrales indefinidas, escribiendo su fórmula en cada una. Hay que recordar que el resultado de una integral es la antiderivada.

1) $\int (f(x) \pm g(x))dx =$	10) $\int \tan u \, du =$
2) $\int dx =$	11) $\int \cot u \, du =$
3) $\int x^n \, dx =$ $\quad n \neq 1$	12) $\int \sec u \, du =$
4) $\int u^n \, du =$ $\quad n \neq 1$	13) $\int \csc u \, du =$
5) $\int \frac{du}{u} =$	14) $\int \sec^2 u \, du =$
6) $\int a^u \, du =$ $\quad a > 0, \, a \neq 1$	15) $\int \csc^2 u \, du =$
7) $\int e^u \, du =$	16) $\int \sec u \tan u \, du =$
8) $\int senu \, du =$	17) $\int \csc u \cot u \, du =$
9) $\int \cos u \, du =$	18) $\int \log u du =$

Para las transformaciones algebraicas, podemos multiplicar tanto el numerador como el denominador de una fracción por un mismo número, sumar y restar una misma cantidad, racionalizar, etc. y en el caso de funciones trigonométricas podemos usar las distintas identidades trigonométricas para obtener expresiones equivalentes cuando en la integral aparecen este tipo de funciones.

3.5 Ejercicios de Integrales inmediatas

Denominaremos Integrales inmediatas, aquellas en las que aplicamos directamente una fórmula directa. En algunas se requiere realizar algebra para simplificar.

Ejercicio 12. Resolver las siguientes integrales

12.1) $\int \frac{2dt}{t^2} =$ ____

12.2) $\int \left(x^{3/2} + x^{2/3} + 5\sqrt{x} + 3\right)dx =$ ______________________________

12.3) $\int \sqrt{x}(2x+3)dx =$ ____________________________________

12.4) $\int \frac{x^2+6x-3}{x}dx =$ ___________________________________

12.5) $\int \frac{dx}{\sqrt{2x}} =$ _______________________________________

12.6) $\int \sqrt[3]{3t}\,dt =$ _______________________________________

12.7) $\int (2x - 3\cos x)dx =$ __________________________________

12.8) $\int (4\tan x - 5x^2)dx =$ _________________________________

12.9) $\int (5Inx - x\sqrt{x})dx =$ __________________________________

12.10) $\int (3senx + 4\sec x)dx =$ ________________________________

12.11) $\int (7e^x - \frac{1}{\sqrt{x}})dx =$ ___________________________________

12.12) $\int (2\tan x - 5\sqrt{x})dx =$ ________________________________

12.13) $\int (\log x\, 3^x)dx =$ ___________________________________

12.14) $\int (5^x + 2e^x)dx =$ ___________________________________

3.6 Método por sustitución para resolver integrales

Para resolver este tipo de integrales, se requiere realizar un ***cambio de variable*** de tal manera que un proceso algebraico nos transforme a una integral *inmediata* donde apliquemos una fórmula directa

Antes de realizar ejercicios de este tipo, vamos a “ambientarnos” con el concepto operativo de ***diferencial de una función*** $f(x)$ **,** expresado como $df(x)$ **.**

Diferencial de una función

Recordemos que la diferencial se entiende como una diferencia infinitamente pequeña, ¿Cómo lo escribimos? Para la variable independiente Δx es una diferencia y la expresemos infinitamente pequeña cuando $\Delta x \to 0$ y a lo cual hemos llamado DIFERENCIAL, esto es $\lim_{\Delta x \to 0} \Delta x = dx$.

Operativamente la diferencial de una función $df(x)$ se define como $df(x) = \frac{df(x)}{dx} dx$, expresión que leeremos como derivada de la función respecto a la variable independiente multiplicado por la diferencial de la variable independiente, en este caso nuestra función está representada por f y nuestra variable independiente la hemos representado con x.

Ejemplos para encontrar la diferencial de una función

Estos procedimientos dependen del buen manejo de la derivada de una función

Si $u(x) = 3x^2 - 2x$ la diferencial $du(x)$, es

$$du(x) = \frac{du(x)}{dx} dx = \frac{d(3x^2 - 2x)}{dx} dx = (6x - 2)dx$$

Si $z(x) = sen(5x - 2)$ la diferencial es

$$dz(x) = \frac{dz(x)}{dx} dx = \frac{dsen(5x - 2)}{dx} dx = \cos(5x - 2)5dx = 5\cos(5x - 2)dx$$

Lo anterior servirá para simplificar algunas integrales

Ejemplo.

Resolver la siguiente integral $\int \frac{2}{\sqrt{3 - 5x}} dx$. Observemos que no podemos aplicar una fórmula inmediata, por ello, vamos a realizar un cambio de variable, definimos $u = 3 - 5x$, nuestra nueva variable es u y depende de la variable x, su diferencial es $du = d(3 - 5x) = \frac{d(3 - 5x)}{dx} dx = \left(0 - 5\right) dx = -5dx$, despejamos el dx para escribirlo en términos de du; tenemos $dx = \frac{du}{-5}$, por lo tanto al sustituir se tiene que nuestra integral tiene solo la variable u y con un poco de álgebra la reducimos a una integral inmediata

$$\int \frac{2}{\sqrt{u}}\frac{du}{-5} = -\frac{2}{5}\int \frac{du}{\sqrt{u}} = -\frac{2}{5}\int \frac{du}{u^{1/2}} = -\frac{2}{5}\int u^{-1/2}du$$

Ahora resolvemos usando una fórmula

$$-\frac{2}{5}\int u^{-1/2}du = -\frac{2}{5}\frac{u^{-1/2+1}}{-\frac{1}{2}+1} + C = -\frac{2}{5}\frac{u^{1/2}}{\frac{1}{2}} + C = -\frac{4}{5}\sqrt{3-5x} + C$$

Ahora, podemos ver que, al resolver, nuestro resultado queda en términos de la variable u, para finalizar regresamos a nuestra variable original utilizando $u = 3 - 5x$.
Vamos a resolver integrales usando el cambio de variable. Es importante aclarar que no basta hacer el cambio de variable, debemos realizar el álgebra correspondiente para obtener una integral inmediata y entonces resolvemos. No olvidar al final que debemos sustituir la variable utilizada en el cambio realizado para volver a nuestra variable original.

En los siguientes ejercicios las literales a, b, c y d representaran constantes, por lo que su manejo debe ser como tal, una constante.

3.7 Ejercicio utilizando el método por sustitución

Ejercicio 13. Efectuar el desarrollo correspondiente y demostrar que las siguientes integrales están correctamente solucionadas.

13.1) $\int (a+bx)^{1/2}dx = \frac{2(a+bx)^{3/2}}{3b} + C$

13.2) $\int \frac{dy}{\sqrt{a-by}} = \frac{2\sqrt{a-by}}{b} + C$

13.3) $\int (3+5x)^4 = \frac{(3+5x)^5}{25} + C$

13.4) $\int x(2+x^2)^2 = \frac{(2+x^2)^3}{6} + C$

13.5) $\int y(a-by^2)dy = -\frac{(a-by^2)^2}{4b} + C$

13.6) $\int \frac{4x^2}{\sqrt{x^3+8}}dx = \frac{8\sqrt{x^3+8}}{3} + C$

13.7) $\int \frac{6zdz}{(5-3z^2)^2} = \frac{1}{5-3z^2} + C$

13.8) $\int \frac{2x+3}{\sqrt{x^2+3x}}dx = 2\sqrt{x^2+3x} + C$

13.9) $\int \frac{(\sqrt{a}-\sqrt{x})^2 dx}{\sqrt{x}} = \frac{2(\sqrt{a}-\sqrt{x})^3}{3} + C$

3.10) $\int sen2x \cos^2 2x dx = -\frac{\cos^3 2x}{6} + C$

13.11) $\int \left(\frac{\sec x}{1+\tan x} \right)^2 dx = \frac{1}{1+\tan x} + C$

13.12) $\int \frac{dx}{2+3x} = \frac{1}{3} ln(2+3x) + C$

13.13) $\int \frac{\cos ax}{\sqrt{b+senax}} = \frac{2\sqrt{b+senax}}{a} + C$

13.14) $\int \frac{e^\theta}{a+be^\theta} = \frac{ln(a+be^\theta)}{b} + C$

13.15) $\int \frac{\sec^2 y}{3+5\tan y} dy = \frac{1}{5} ln(3+5\tan y) + C$

13.16) $\int \frac{e^{2x} dx}{e^{2x}+1} = \frac{1}{2} ln(e^{2x}+1) + C$

13.17) $\int \frac{senx}{1-\cos x} dx = ln(1-\cos x) + C$

13.18) $\int 4e^\theta (2+3e^\theta) d\theta = \frac{2}{3}(2+3e^\theta)^2 + C$

Ejercicio 14. Resolver las siguientes integrales

14.1) $\int \frac{\cos 4x}{sen4x-5} dx$ ______________________________________

14.2) $\int \frac{6x+5}{\sqrt{3x^2-4}} dx$ ______________________________________

14.3) $\int \frac{2x^5-3x^2}{1+3x^3-x^6} dx$ ______________________________________

14.4) $\int \left(7xe^{5x^2} + \frac{3^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} \right) dx$ ______________________________________

14.5) $\int \frac{\ln x}{x\left(1-\ln^2 x\right)} dx$ ______________________________________

14.6) $\int \cos^7 (3x) sen3x\, dx$ ______________________________________

3.8. Integración por partes

Recordemos que si $y = f(x)$ entonces $dy = f'(x)dx$

Consideremos una función $y = u\text{v}$, su derivada es $y' = u'\text{v} + u\text{v}'$, por otra parte, la diferencial de la función es $dy = y'dx$, sustituyendo y' en dy, se tiene:

$$dy = (u'\text{v} + u\text{v}')dx = \text{v}(u'dx) + u(\text{v}'dx),$$

De donde $dy = \text{v}du + ud\text{v}$ entonces podemos escribir $d(u\text{v}) = \text{v}du + ud\text{v}$

Integrando ambos miembros de la última igualdad tenemos

$$\int d(u\,v) = \int(\text{v}du + ud\text{v})$$

aplicando la diferencial en el lado izquierdo de la igualdad se tiene

uv = ∫(vdu + udv)

esta igualdad es equivalente a

Fórmula de integración por partes

$$\int ud\text{v} = u\text{v} - \int \text{v}du$$

Esta fórmula se usa para integrar expresiones que se puedan representar como un producto de dos factores que identificaremos como u y $d\text{v}$ de tal forma que la determinación de la integral de du sea más simple que la integral original.

De hecho, la fórmula de integración por partes consta de una doble sustitución, no existe una regla general que nos permita identificar u y $d\text{v}$, esto se tiene que hacer por ensayo-error, el enfrentar diversos problemas en donde se aplica esta fórmula va dando la experiencia para poder descomponer el integrando en las sustituciones adecuadas. A continuación, se muestran ejemplos en donde se aplica esta fórmula.

Ejemplo. Obtener el resultado de la integral $\int xe^{3x}dx$

SOLUCION. Llamemos $u = x$ y $d\text{v} = e^{3x}dx$

$$du = dx \qquad \int d\text{v} = \int e^{3x}dx \qquad \text{v} = \frac{e^{3x}}{3}$$

Aplicando la fórmula de integración por partes se tiene

$$\int xe^{3x}\,dx = \frac{xe^{3x}}{3} - \int \frac{e^{3x}}{3}\,dx = \frac{xe^{3x}}{3} - \frac{1}{3}\int e^{3x}\,dx = \frac{xe^{3x}}{3} - \frac{1}{3}\left(\frac{e^{3x}}{3}\right) + C$$

$$\int xe^{3x}\,dx = \frac{xe^{3x}}{3} - \frac{e^{3x}}{9} + C$$

$$\int xe^{3x}\,dx = \frac{e^{3x}}{3}\left(x - \frac{e^{3x}}{9}\right) + C$$

3.8a) Ejercicios de Integración por partes

Ejercicio 15. Resolver las siguientes integrales usando la expresión para integrales por partes

15.1) $\int x^5 \ln x dx =$ ____

15.2) $\int x^2 \cos 5x dx$ ____

15.3) $\int e^{3x} sen 4x dx$ ____

15.4) $\int \frac{x^5}{\sqrt{1-x^3}} dx$ ____

15.5) $\int x \cos 7x dx$ ____

15.6) $\int x \sec x \tan x\, dx$ ____

15.7) $\int \ln(x+1) dx$ ____

15.8) $\int \sqrt{x} \ln x\, dx$ ____

15.9) $\int x^3 \cos x^2 dx$ ____

15.10) $\int x \sec^2 x dx$ ____

15.11) $\int x\cos x dx$ ____

Pregunta **1**

Sin responder aún

Puntúa como 1,00

El resultado de la integral $\int(\frac{3}{\sqrt{x}}-\frac{x\sqrt{x}}{4})dx$

- a. $6\sqrt[3]{x}+\frac{\sqrt{x^5}}{10}+C$
- b. $2\sqrt{x}+\frac{\sqrt{x^5}}{10}+C$
- c. $6\sqrt{x}-\frac{\sqrt{x^5}}{10}+C$
- d. $3\sqrt{x}-\frac{\sqrt{x^3}}{10}+C$
- e. $6\sqrt{x}+\frac{\sqrt{x^4}}{10}+C$

Pregunta **2**

Sin responder aún

Puntúa como 1,00

El resultado de la integral $\int(\frac{2}{\sqrt{x}}+5\sqrt[3]{x}+3)dx$

- a. $2\sqrt{x}-\frac{12}{5\sqrt[3]{x^2}}-3x+C$
- b. $4\sqrt{x}+\frac{15}{4}\sqrt[3]{x^4}+3x+C$
- c. $2\sqrt{x}-\frac{15}{3\sqrt[3]{x^2}}+3x+C$
- d. $4\sqrt{x}-\frac{5}{2\sqrt[3]{x^2}}-3x+C$
- e. $4\sqrt[3]{x}+\frac{15}{2\sqrt[3]{x^2}}+3x+C$

Pregunta **3**

Sin responder aún

Puntúa como 1,00

El resultado de la integral $\int \frac{3x}{\sqrt[3]{x^2+5}}dx$

- a. $\frac{3}{2}\sqrt{(x^2-5)^3}+C$
- b. $\frac{9}{4}\sqrt[3]{(x^2+5)}+C$
- c. $\frac{9}{4}\sqrt[3]{(x^3-3)^2}+C$
- d. $\frac{3}{4}\sqrt[2]{(x^2+5)^3}+C$
- e. $\frac{9}{4}\sqrt[3]{(x^2+5)^2}+C$

Pregunta **4**

Sin responder aún

Puntúa como 1,00

El resultado de la integral $\int \frac{3x^2-2x+5}{x^3-x^2+5x}dx$

- a. $In(3x^3+x^2+5x)+C$
- b. $In(x^3-x^2+5x)+C$
- c. x^3-x^2+5x+C
- d. $In(x^3+x^2-5x)+C$
- e. $(x^3-x^2+5x)+C$

Pregunta **5**

Sin responder aún

Puntúa como 1,00

El resultado de la integral $\int \frac{Inx}{x}dx$

- a. $\frac{1}{4}In^2x+C$
- b. $2In^2x+C$
- c. $\frac{1}{2}In^2x+C$
- d. $\frac{1}{2}Inx+C$
- e. $\frac{1}{2}In2x+C$

Pregunta **6**

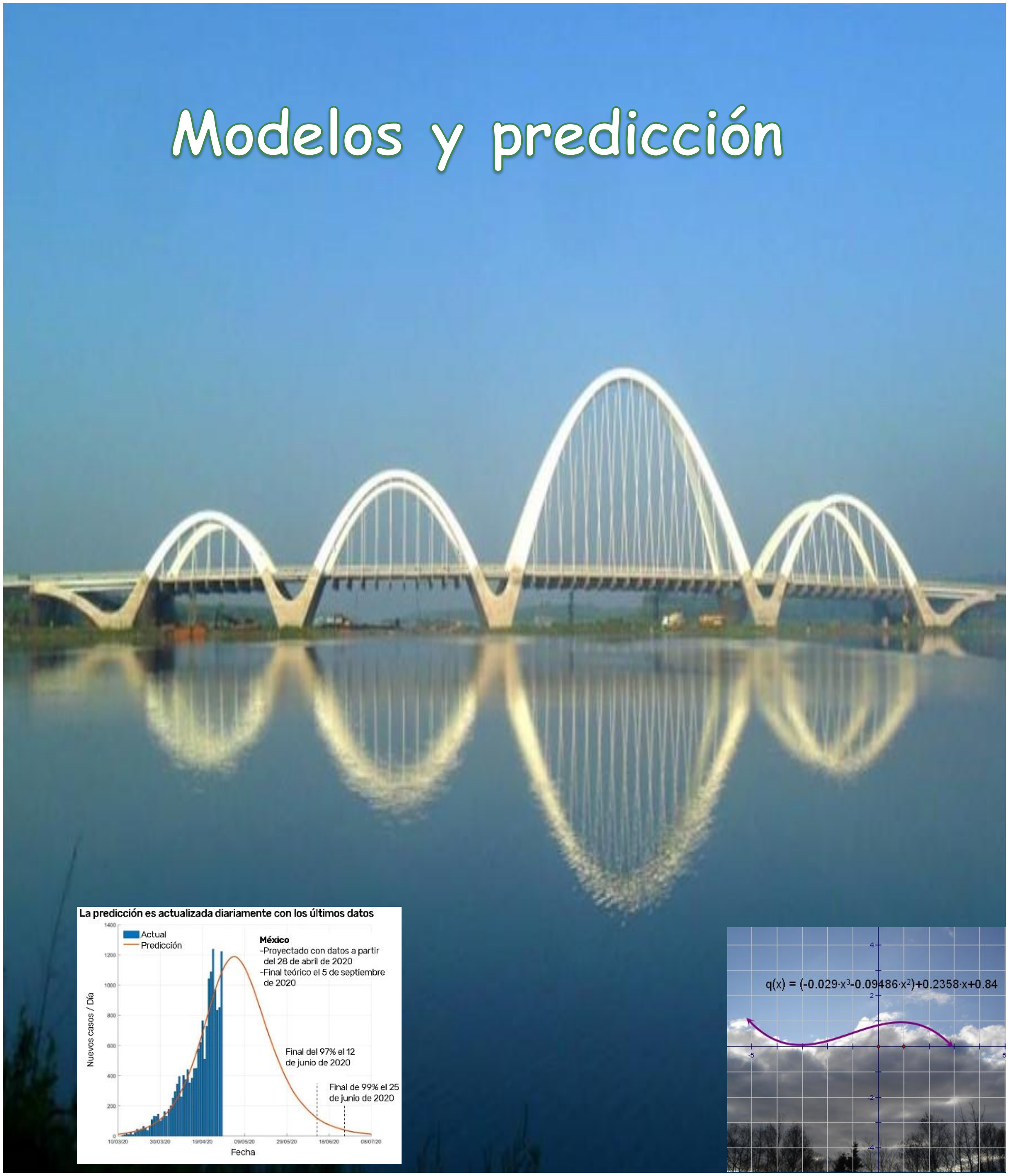
Sin responder aún

Puntúa como 1,00

El resultado de la integral $\int x\sqrt{x+1}dx$

- a. $\frac{2}{3}\sqrt{x+1)^3} + \frac{4x}{15}\sqrt{(x+1)^5} + C$
- b. $\frac{2x}{3}\sqrt{x+1)^3} + \frac{4}{15}\sqrt{(x+1)^5} + C$
- c. $\frac{2x}{3}\sqrt{x+1)^3} - \frac{4}{15}\sqrt{(x+1)^5} + C$
- d. $\frac{2x}{3}\sqrt{x+1)^5} + \frac{4}{15}\sqrt{(x+1)^3} + C$
- e. $\frac{2x}{3}\sqrt{x+1)^4} + \frac{4}{15}\sqrt{(x+1)^5} + C$

Unidad 4


Modelos y predicción
La predicción es actualizada diariamente con los últimos datos
Actual
Predicción
México
-Proyectado con datos a partir del 28 de abril de 2020
-Final teórico el 5 de septiembre de 2020
Final del 97% el 12 de junio de 2020
Final de 99% el 25 de junio de 2020
Nuevos casos / Día
Fecha
q(x) = (-0.029·x³-0.09486·x²)+0.2358·x+0.84

Índice

Unidad 4. Modelos y predicción

Unidad 4. Modelos y predicción

Propósito. Concluirá el estudio de la derivada y la integral, con la construcción de un modelo que las relacione para hacer predicciones sobre el comportamiento de situaciones planteadas.

Aprendizajes

- Identifica que cuando la rapidez de cambio de una función es proporcional a la misma, se puede modelar a través de la ecuación $\frac{dP(t)}{dt} = kP(t)$
- Emplea el método de separación de variables para resolver la ecuación $\frac{dP(t)}{dt} = kP(t)$ y lo aplica en algunos ejemplos.
- Identifica que la solución general del modelo $P(t) = Ce^{kt}$ es una familia de funciones definida por los valores de *C.*
- Considera las condiciones iniciales para obtener una solución particular que representa a la situación, dada y llega a un modelo del tipo $P(t) = P_0e^{kt}$
- Utiliza el modelo para hacer predicciones sobre el comportamiento general y puntual de la situación.
- Distingue la diferencia en el comportamiento del modelo $P(t) = P_0e^{kt}$ dependiendo del signo de k y lo que esto significa en las situaciones modeladas.
- Reconoce la importancia del modelo $P(t) = P_0e^{kt}$

ESTRATEGÍA PARA LA UNIDAD IV

La estrategia para abordar esta unidad, Será identificando y resolviendo ecuaciones diferenciales utilizando el método de separación de variables, ejemplificar con algunas ecuaciones que no puedan ser resueltas con separación de variables. También mostrar la importancia de la constante de integración, posteriormente se deben trabajar problemas de diversa índole, es importante que el alumno se familiarice con la expresión “rapidez de variación¨ que corresponde a la rapidez con la que cambia una función respecto a la variable independiente, también es importante que el alumno comprenda el significado de ecuación diferencial y qué significa el resolverla.

En particular nos interesan las del tipo $\frac{df(t)}{dt} = kf(t)$, en este sentido, se proponen los problemas que se muestran en las secuencias. También es importante introducir problemas donde se requiera justificar rigurosamente el método de separación de variables. Es importante invocar el teorema de EXISTENCIA Y UNICIDAD DE LAS SOLUCIONES.

ECUACIÓN DIFERENCIAL

Iniciaremos con la expresión rapidez de variación de una función f(t) respecto a su variable independiente t, regularmente es el tiempo visto en la unidad 2 de este curso, recordemos $\lim_{\Delta t \to o} \frac{\Delta f(t)}{\Delta t} = \frac{df(t)}{dt}$.

Si tenemos un problema en el cual esta rapidez de variación es directamente proporcional a la misma función, tendremos la expresión $\frac{df(t)}{dt} \alpha f(t)$, este tipo de expresión se convierte en una igualdad si utilizamos una constante C, que nombraremos constante de proporcionalidad $\frac{df(t)}{dt} = Cf(t)$. A esta expresión le llamaremos *Ecuación Diferencial*.

Un método para resolver lo presentamos en el siguiente, este método es denominado, separación de variables. Resolver **significa encontrar explícitamente a la función** $f(t)$**.**

Justificación rigurosa del método de separación de variables aplicado a la ecuación $g(x)\frac{dx}{dt} = f(t),$

Suponiendo que la ecuación diferencial $g(x)\frac{dx}{dt} = f(t),$ tiene solución (aunque ésta no se conozca), que denotaremos por $x = \phi(t),$ tenemos que

$$g(x)\frac{dx}{dt} = g(\phi(t))\frac{d\phi(t)}{dt} = g(\phi(t))\phi'(t) = (f(t)$$

en un cierto intervalo ***I*** de ***t.*** Podemos efectuar la integración de ambos miembros en dicho intervalo, obteniendo

$$\int g(\phi(t))\phi'(t))dt = \int f(t)dt + c,$$ ***c*** constante de integración.

El cambio de variable propuesto, $x = \phi(t)$ transforma el primer miembro en

$$\int g(\phi(t))\frac{d\phi(t)}{dt}dt = \int g(x)\frac{dx}{dt}dt = \int g(x)dx\frac{\cancel{dt}^{1}}{\cancel{dt}} = \int f(t)dt + c,$$

Finalmente

$$\int g(x)dx = \int f(t)dt + c$$

que define, en general implícitamente, la solución general de la ecuación diferencial dada.

Ejemplo. Obtener la solución de la ecuación diferencial

$$(t+1)\frac{dy}{dt} = (1-y)$$

Vamos a proceder; inicialmente multiplicamos por dt en ambos lados

$$(t+1)\frac{dy}{dt}dt = (1-y)dt$$

Aplicando la regla de la cadena, podemos escribir

$(t+1)dy\frac{\cancel{dt}^{1}}{\cancel{dt}} = (1-y)dt$ de donde $(t+1)dy = (1-y)dt$, podemos manipular algebraicamente los coeficientes de las diferenciales

$$\frac{dy}{(1-y)} = \frac{dt}{(t+1)}.$$

Podemos observar en la expresión anterior que del lado izquierdo solo tenemos a la variable y y del lado derecho solo la variable t , en resumen, hemos separado las variables, procedemos a integrar.

Aplicamos el método por sustitución. Para el lado izquierdo utilizamos $u = 1 - y$ y para el lado derecho usamos otro cambio de variable $z = t + 1$, al hacerlo tenemos $dz = dt \quad -du = dy$ y con ello obtenemos

$-\int \frac{du}{u} = \int \frac{dz}{z}$ por lo tanto $-Inu = Inz + C$

regresando a nuestras variables originales se tiene

$$-ln\left|1-y\right| = ln\left|t+1\right| + C$$

lo cual es una expresión explicita para y

Queremos obtener la solución explícita para $y(t)$ Multiplicando por -1, obtenemos

$ln\left|1-y\right| = -ln\left|t+1\right| - C$, de donde $\left|1-y\right| = e^{-ln\left|t+1\right| - C}$

de donde $\left|1-y\right| = e^{-C}e^{-ln\left|t+1\right|} = \frac{e^{-C}}{\left|t+1\right|}$

y obtenemos $y = 1 - \frac{\pm e^{-C}}{t+1}$

La solución depende de la constante C, si definimos $A = -(\pm e^{-C})$ podemos escribir la expresión explícita para y

$$y = 1 + \frac{A}{t+1}$$

Analizáremos el resultado. Si observamos la expresión final, al utilizar $A = 0$, $y = 1$, lo cual es válida en nuestra expresión original, sin embargo, nuestra solución no es válida ya que partimos del cociente $\frac{1}{1-y}$ para solucionar la ecuación diferencial y para $y = 1$ esta última expresión no es válida.

Ejercicios

Resolver y contestar cada una de las preguntas contenidas en cada uno de ellos

Ejercicio 1 Determinar si la ecuación diferencial $\frac{dy}{dt} = 2y^2 - 5t^2$ es posible resolverla por separación de variables.

Explicar____

Ejercicio 2. Demostrar que la Ecuación Diferencial $\frac{dy}{dt} = 1 - y^2$ tiene por solución explícita la expresión $y = \frac{Ae^{2t} - 1}{Ae^{2t} + 1}$, donde $A = \pm e^{2C}$ $A = \pm e^{2C}$; donde C es la constante de integración. Graficar $y(t)$ escribiendo diversos valores para la constante A.

Ejercicio 3. Encuentre la solución de la ecuación diferencial $\frac{dy}{dt} = \frac{1}{1 + e^y}$ **,** determinar, si es posible, escribir la función explícita si es posible. Graficar

____

Ejercicio 4. Encontrar $N(t)$ a partir de la ecuación $\frac{dN}{dt} = \frac{t^2}{N^3}$

Resp. ______________________________

Ejercicio 5. Utilizar la ecuación diferencial $\frac{dy}{dt} = 3y + 2$ y contestar lo siguiente

5.1 La expresión para $y(t)$ es ________________________________

5.2 Calcular la constante de integración cuando $y(0) = 10$

Ejercicio 6. A partir de la expresión $\cos x \frac{dx}{dt} = 5tsenx$ encontrar

6.1 La expresión para $x(t)$ ___________________________________

6.2 Si $x(0) = 0$ hallar la constante de integración___________

Ejercicio 7. A partir de la expresión $x\frac{dx}{dt}=6(x^2-1)$, encontrar

7.1 La expresión para $x(t)$ ____

7.2 Si $x(0)=0$, hallar la constante de integración_____________

Ejercicio 8. A partir de la expresión $\frac{\sec^2 x}{\tan x+1}\frac{dx}{dt}=2t$ encontrar

8.1 La expresión para $x(t)$ ____

8.2 Si $x(1)=0$, hallar la constante de integración______________________

Ejercicio 9. La temperatura de un cuerpo es ***T*** y está rodeado por aire a temperatura de 10^0C varía de modo que el ritmo de variación de su temperatura es proporcional a la diferencia de temperaturas (Ley del enfriamiento de Newton). Encontrar la temperatura T en función del tiempo $T(0)=50^0$. Considerar como condición inicial que $T(2)=35^0$.

9.1 Escribir la rapidez de variación de la temperatura _________________

9.2 Escribir la diferencia de la temperatura menos la temperatura de referencia____________________

9.3 Escribir la Ecuación Diferencial correspondiente___________________

9.4 Escribir la Expresión usando la separación de variables_____________

9.5 Escribir el resultado de las integrales correspondientes_____________

9.6 Encontrar la constante de proporcionalidad. ______________________

9.7 Escribir la temperatura a cualquier tiempo t ____________________

Ejercicio 10. Si la cantidad inicial de un fermento es de 1 g y al cabo de 1 hora es de 1.2 g, ¿cuánto fermento habrá al cabo de 5 horas de comenzar la fermentación (F) si la velocidad de incremento del fermento es proporcional a la cantidad existen Escribir la rapidez de variación de la fermentación.

10.1 Escribir la Ecuación Diferencial _______________________________

10.2 Escribir la Expresión usando la separación de variables____________

10.3 Escribir el resultado de las integrales correspondientes____________

10.4 Encontrar la constante de proporcionalidad. _____________________

10.5 Calcular la cantidad de fermento después de 5 horas ______________

Ejercicio 11. Un esquiador se desliza por una pendiente alcanzando una velocidad v_0 en el instante t = 0, en el que la pista se vuelve horizontal. Desde dicho punto hasta que finalmente se detiene hay 25 m. Sabiendo que la resistencia del aire es proporcional a la velocidad del esquiador, que toda otra resistencia al movimiento del esquiador es despreciable y que, en el primer segundo, es decir en t = 1, recorre 10 m, se pide calcular la velocidad v_0.

Usando la segunda Ley de Newton (masa por aceleración). $m\frac{dv}{dt} = kv$

11.1 Escribir la expresión usando la separación de variables____________

11.2 Escribir el resultado de las integrales correspondientes____________

11.3 Escribir la velocidad en función del tiempo_______________________

11.4 Encontrar la constante de proporcionalidad. _____________________

11.5 Si sabemos que $v = \frac{dx(t)}{dt}$ encontrar la posición $x(t)$ _______________

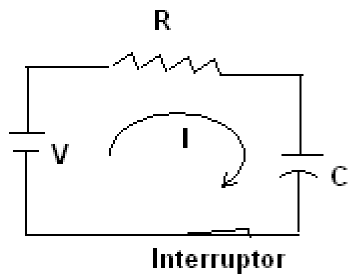
11.6 Usar la condición $x(0)$ para encontrar la nueva constante de integración________________________

11.7 Ahora escribir $x(v)$ y usar la condición anterior para calcular el parámetro __________________________

11.8 Escribir el resultado para la velocidad v_0

____

Ejercicio 12. Para cargar un capacitor a través de una resistencia, se utiliza el circuito mostrado en la figura, la relación matemática entre el voltaje proporcionado por la batería y el que se establece en la resistencia y el capacitor es $CV - Q = RC\frac{dQ}{dt}$.



C indica la capacitancia del capacitor; R la resistencia del resistor, V el voltaje proporcionado por la batería y t el tiempo durante el cual se está cargando el capacitor.

12.1 Escribir la ecuación diferencial para resolver usando la separación de variables

---

12.2 Resolver la ecuación diferencial para obtener la carga en el capacitor como función del tiempo, utilizar las siguientes condiciones iniciales al tiempo al tiempo $t = 0$, la carga en el capacitor es $Q_o = 0$ y al tiempo t la carga es Q.______________________________________

EXAMEN DE LA UNIDAD 4

En las siguientes ecuaciones diferenciales determine si la ecuación diferencial es separable, si es así resuelva la ecuación diferencial o el problema con valor inicial y si es posible escribir la función explícita.

1. $\frac{dy}{dt} = t - 1 \qquad \mathrm{y(0)=3}$
2. $\frac{dy}{dt} + y = e^t$
3. $\frac{dy}{dt} = te^t y^2$
4. $\frac{dy}{dt} = \frac{2sent}{1 - y}$
5. $x\frac{dy}{dx} = e^{-y} \ln x$
6. $\frac{dy}{dt} = ye^{t^2} \qquad y(0) = 2$

Bibliografía

1. Anfossi, A. (1950) ***Cálculo Diferencial e Integral***, Editorial Progreso, México, D.F.
2. Bers, Lipman, (1975) ***Cálculo Diferencial e Integral,*** Editorial Interamericana
3. Boyce William, Di Prima Richard, (1999), ***Cálculo,*** CECSA Ediciones México
4. Granville, Smith, (1970) ***Cálculo Diferencial e Integral, CECSA***
5. Grupo institucional 401-C, CCH UNAM, (2011) ***Cálculo Diferencial e Integral II, Colegio*** de Ciencias y Humanidades, UNAM
6. Gutiérrez S, Sánchez Faustino, (1998), ***Matemáticas para las Ciencias Naturales***, Aportaciones matemáticas, Sociedad Matemática Mexicana
7. Kline, Morris. (2010) ***Matemáticas para los estudiantes de humanidades,*** Fondo de Cultura económica
8. Leithold, Louis, (2007) ***Cálculo con Geometría Analítica,*** Oxford University Press-Harla México, S.A. de C.V
9. Sántalo Carbonell ***Cálculo Diferencial e Integral***, Textos universitarios S.A.
10. Stewart, James, (2015), Calculus, Thompson Matemáticas Editorial
11. Swokowsky, Earl W., (2004) ***Cálculo con Geometría Analítica,*** Oxford University Press-Harla México, S.A. de C.V
12. Zill,Dennis G (1988) ***Ecuaciones diferenciales con aplicaciones.*** Grupo Editorial Iberoamericana.
13. Glenn Ledder, (2006). ***Ecuaciones Diferenciales. Un enfoque de Modelado***. Editorial Mc Graw-Hill. Interamericana, S. A. de C. V.